새교육과정**내신·학평대비 기출문제집**

씨리얼

수학영역**수학(상)**

해 설 편

디딤돌

Ⅰ 다항식

A 다항식의 연산

문제편 pp.9~21

필수 기출

001 ④	002 ⑤	003 ④	004 ③	005 ①	006 ③
007 ④	008 ⑤	009 ①	010 ①	011 ①	012 ④
013 ③	014 ③	015 ④	016 ③	017 ⑤	018 ④
019 12	020 ③	021 ④	022 ④	023 ④	024 ③
025 ③	026 ④	027 ③	028 ⑤	029 36	030 ②
031 100	032 ②	033 16	034 ②	035 ②	036 ⑤
037 17	038 ①	039 16	040 30	041 240	

플러스 기출

042 ①	043 135	044 ②	045 3	046 16	047 48
048 15					

A001 다항식의 전개식에서 계수 구하기

정답 ④

$(2x+3y)(4x-y)$의 전개식에서 xy의 계수는? [2점] [정답률 88%]

❶ 다항식을 전개한다.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

Step ❶ 식을 전개하여 계수를 구한다.

$$\begin{aligned}(2x+3y)(4x-y)&=8x^2-2xy+12xy-3y^2\\&=8x^2+10xy-3y^2\end{aligned}$$

따라서 xy의 계수는 10이다.

A002 다항식의 뺄셈 계산하기

정답 ⑤

두 다항식 [정답률 88%]

$$A=2x^2-y,\ B=-x^2+y$$

에 대하여 $A-B$를 간단히 나타낸 것은? [2점]

❶ 다항식을 대입하여 뺄셈을 한다.

① x^2-2y ② x^2+y ③ $3x^2-y$
④ $3x^2+y$ ⑤ $3x^2-2y$

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$\begin{aligned}A-B&=(2x^2-y)-(-x^2+y)\\&=2x^2-y+x^2-y\\&=3x^2-2y\end{aligned}$$

A003 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ④

두 다항식 $A=x^2-1$, $B=x^2+2x+7$에 대하여 $2A+B$를 간단히 하면? [2점] [정답률 88%]

❶ 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① $2x^2-2x+5$ ② $2x^2+2x+5$ ③ $3x^2-2x+5$
④ $3x^2+2x+5$ ⑤ $3x^2+4x+5$

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$\begin{aligned}2A+B&=2(x^2-1)+(x^2+2x+7)\\&=2x^2-2+x^2+2x+7\\&=3x^2+2x+5\end{aligned}$$

A004 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ③

두 다항식 $A=2x^2+3xy$, $B=x^2-2xy$에 대하여 $A+B$는? [2점] [정답률 96%]

❶ 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① x^2+8xy ② x^2-6xy ③ $3x^2+xy$
④ $3x^2+5xy$ ⑤ $4x^2+xy$

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$A+B=(2x^2+3xy)+(x^2-2xy)=3x^2+xy$$

A005 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ①

두 다항식 $A=5x^2-9x+1$, $B=2x^2+3x-4$에 대하여 $A+2B$를 간단히 하면? [2점] [정답률 95%]

❶ 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① $9x^2-3x-7$ ② $9x^2+5x-5$ ③ $10x^2-3x-7$
④ $10x^2-3x-3$ ⑤ $11x^2+5x-7$

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$\begin{aligned}A+2B&=5x^2-9x+1+2(2x^2+3x-4)\\&=5x^2-9x+1+4x^2+6x-8\\&=9x^2-3x-7\end{aligned}$$

A006 다항식의 전개식에서 계수 구하기

정답 ③

$(2x-y)(x+2y+3)$의 전개식에서 xy항의 계수는? [2점] [정답률 90%]

❶ 다항식을 전개한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ① 식을 전개하여 계수를 구한다.
$(2x-y)(x+2y+3)=2x^2-2y^2+3xy+6x-3y$
따라서 xy항의 계수는 3이다.

A007 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ④

두 다항식 $A=3x^2-xy$, $B=xy+2y^2$에 대하여 [정답률 97%]
$A+B$를 간단히 하면? [2점]
① 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① $3x^2-2y^2$ ② $3x^2-2xy-2y^2$ ③ $3x^2+2xy-2y^2$
④ $3x^2+2y^2$ ⑤ $3x^2+2xy+2y^2$

Step ① 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.
$A+B=(3x^2-xy)+(xy+2y^2)$
$=3x^2-xy+xy+2y^2$
$=3x^2+2y^2$

A008 다항식의 뺄셈 계산하기

정답 ⑤

두 다항식 $A=3x^2-2x+1$, $B=x^2-x-3$에 대하여 [정답률 91%]
$A-B$를 간단히 하면? [2점]
① 다항식을 대입하여 뺄셈을 한다.

① x^2+1 ② x^2+4 ③ $2x^2-x-3$
④ $2x^2-x+1$ ⑤ $2x^2-x+4$

Step ① 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.
$A-B=3x^2-2x+1-(x^2-x-3)$
$=3x^2-2x+1-x^2+x+3$
$=2x^2-x+4$

A009 다항식의 뺄셈 계산하기

정답 ①

두 다항식 $A=2x^2+3xy+1$, $B=2x^2+2xy-3$에 대하여 [정답률 94%]
$A-B$는? [2점]
① 다항식을 대입하여 뺄셈을 한다.

① $xy+4$ ② $xy+2$ ③ xy
④ $xy-2$ ⑤ $xy-4$

Step ① 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.
$A-B=(2x^2+3xy+1)-(2x^2+2xy-3)$
$=2x^2+3xy+1-2x^2-2xy+3$
$=xy+4$

A010 다항식의 덧셈과 뺄셈 계산하기

정답 ①

두 다항식 $A=2x^2-4x-2$, $B=3x+3$에 대하여 [정답률 91%]
$X-A=B$를 만족시키는 다항식 X는? [2점]
① $X=A+B$임을 이용한다.

① $2x^2-x+1$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2+x-1$
④ $-2x^2-x+1$ ⑤ $-2x^2+x+1$

Step ① $X-A=B$를 X에 대하여 정리한 다음 다항식 A, B를 대입한다.
$X-A=B$에서
$X=A+B$
$=(2x^2-4x-2)+(3x+3)$
$=2x^2-x+1$

A011 다항식의 뺄셈 계산하기

정답 ①

두 다항식 $A=2x^2-x+1$, $B=x^2-2x-1$에 대하여 [정답률 97%]
$2A-B$를 간단히 하면? [2점]
① 다항식을 대입하여 뺄셈을 한다.

① $3x^2+3$ ② $5x^2-4x$ ③ x^2+x+2
④ $3x^2-4x+3$ ⑤ $3x^2+x+3$

Step ① 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.
$2A-B=2(2x^2-x+1)-(x^2-2x-1)$
$=4x^2-2x+2-x^2+2x+1$
$=3x^2+3$

A012 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ④

두 다항식 $A=2x^2+3xy$, $B=x^2-2xy$에 대하여 [정답률 95%]
$A+B$는? [2점]
① 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① x^2-2xy ② x^2+3xy ③ $2x^2+xy$
④ $3x^2+xy$ ⑤ $3x^2+2xy$

Step ① 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.
$A+B=(2x^2+3xy)+(x^2-2xy)$
$=2x^2+x^2+3xy-2xy$
$=3x^2+xy$

A013 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ③

두 다항식 $A=2x^2-3xy$, $B=x^2+xy$에 대하여 [정답률 96%]
$A+B$는? [2점]
① 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① x^2+4xy ② x^2-2xy ③ $3x^2-2xy$
④ $3x^2-4xy$ ⑤ $3x^2+4xy$

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$A+B=(2x^2-3xy)+(x^2+xy)$$
$$=2x^2+x^2-3xy+xy$$
$$=3x^2-2xy$$

A014 다항식의 전개식에서 계수 구하기

정답 ③

$(x+2y)(x^2+xy)$의 전개식에서 x^2y의 계수는? [2점] [정답률 96%]

❶ 분배법칙과 지수법칙을 사용하여 식을 전개한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 식을 전개하여 계수를 구한다.

$$(x+2y)(x^2+xy)=x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2$$
$$=x^3+3x^2y+2xy^2$$

따라서 x^2y의 계수는 3이다.

해검단 TALK

전부 다 전개할 것이 아니라 원하는 항이 나오는 부분만 계산하여 계수를 구할 수 있어. 예를 들면 문제에서 $(x\times xy)+(2y\times x^2)=3x^2y$만 구해서 x^2y의 계수가 3임을 알 수 있지~^^

A015 다항식의 덧셈 계산하기

정답 ④

다항식 $A=2x^2-xy$, $B=x^2+2xy$에 대하여 $A+B$는? [2점] [정답률 95%]

❶ 다항식을 대입하여 덧셈을 한다.

① x^2-xy ② x^2+3xy ③ $3x^2-3xy$
④ $3x^2+xy$ ⑤ $3x^2+3xy$

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$A+B=(2x^2-xy)+(x^2+2xy)$$
$$=2x^2+x^2-xy+2xy$$
$$=3x^2+xy$$

A016 다항식의 덧셈과 뺄셈 계산하기

정답 ③

두 다항식 $A=2x^3+x^2-4x+1$, $B=x^2-4x+3$에 대하여 $A-2X=B$를 만족시키는 다항식 X는? [2점] [정답률 94%]

❶ $X=\frac{1}{2}(A-B)$임을 이용한다.

① x^2+1 ② x^2+2 ③ x^3-1 ④ x^3-2 ⑤ x^3+3

Step ❶ $A-2X=B$를 X에 대하여 정리한 다음 다항식 A, B를 대입한다.

$A-2X=B$에서 $2X=A-B$이므로

$$X=\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{2}\{(2x^3+x^2-4x+1)-(x^2-4x+3)\}$$
$$=\frac{1}{2}(2x^3+x^2-4x+1-x^2+4x-3)$$
$$=\frac{1}{2}(2x^3-2)=x^3-1$$

A017 다항식의 뺄셈 계산하기

정답 ⑤

두 다항식 $A=x^2+1$, $B=2x^2+x-1$에 대하여 $3A-B$를 간단히 하면? [2점] [정답률 97%]

❶ 다항식을 대입하여 뺄셈을 한다.

① $3x^2+x+2$ ② $3x^2+x$ ③ x^2+2x-4
④ x^2-x+6 ⑤ x^2-x+4

Step ❶ 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

$$3A-B=3(x^2+1)-(2x^2+x-1)$$
$$=3x^2+3-2x^2-x+1$$
$$=x^2-x+4$$

A018 다항식의 전개식에서 계수 구하기

정답 ④

다항식 $(3x+5)(x^2+x-2)$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점] [정답률 95%]

❶ 분배법칙과 지수법칙을 사용하여 식을 전개한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 식을 전개하여 x^2의 계수를 구한다.

$$(3x+5)(x^2+x-2)=3x^3+3x^2-6x+5x^2+5x-10$$
$$=3x^3+8x^2-x-10$$

따라서 x^2의 계수는 8이다.

해검단 TALK

곱셈을 전개했을 때 x^2의 항이 나오는 부분만 계산하면 $(3x\times x)+(5\times x^2)=8x^2$으로 계수를 구할 수 있어.

A019 다항식의 성질 이해하기

정답 12

$x+y=6$, $xy=2$일 때, x^2y+xy^2의 값을 구하시오. [3점] [정답률 82%]

❶ 분배법칙을 이용한다.

12

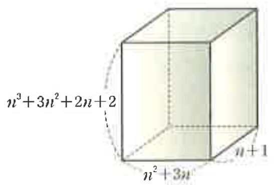
Step ❶ 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 두 식 $x+y$, xy의 곱으로 나타낸다.

$$x^2y+xy^2=xy(x+y)$$
$$=2\times 6$$
$$=12$$

A020 다항식의 연산을 이용한 문제해결하기 정답 ③

3 이상의 자연수 n에 대하여 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 n^2+3n, $n+1$이고 높이가 n^3+3n^2+2n+2인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 한 모서리의 길이가 n인 정육면체로 조각낼 때, 한 모서리의 길이가 n인 정육면체의 최대 개수는? (단, 남은 조각을 붙여서 정육면체를 만들 수는 없다.) [3점] [정답률 60%]

❶ 세 다항식을 n으로 나눈 다음 몫을 곱한다.



① $n(n+1)(n+2)$ ② $n(n+1)(n+3)$
③ $(n+1)(n+2)(n+3)$ ④ $(n+1)(n+2)(n+4)$
⑤ $(n+2)(n+3)(n+4)$

Step ❶ 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 $n\times$(몫)$+$(나머지)의 꼴로 나타낸다.

직육면체의 밑면의

가로의 길이는 $n^2+3n=n(n+3)$

세로의 길이는 $n+1=n\times1+1$

높이는 $n^3+3n^2+2n+2=n(n^2+3n+2)+2$

Step ❷ ❶에서 구한 몫을 곱하여 정육면체의 최대 개수를 구한다.

이때 한 모서리의 길이가 n인 정육면체를 최대

$(n+3)\times1\times(n^2+3n+2)$개 얻을 수 있다.

따라서 구하는 정육면체의 최대 개수는 $(n+1)(n+2)(n+3)$이다.

A021 다항식의 나눗셈하기 정답 ④

다음은 다항식 $3x^3-2x^2+3x+7$을 x^2-x+2로 나누는 과정이다. [정답률 95%]

$$\begin{array}{r|l} & ax+1 \\ x^2-x+2 & 3x^3-2x^2+3x+7 \\ & 3x^3-3x^2+6x \\ \hline & \quad x^2-3x+7 \\ & \quad x^2-\ \ x+2 \\ \hline & \qquad -2x+b \end{array}$$

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

❶ 다항식의 나눗셈을 직접 해본다.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ❶ 다항식의 나눗셈을 하여 $a+b$의 값을 구한다.

$$\begin{array}{r|l} & 3x+1 \\ x^2-x+2 & 3x^3-2x^2+3x+7 \\ & 3x^3-3x^2+6x \\ \hline & \quad x^2-3x+7 \\ & \quad x^2-\ \ x+2 \\ \hline & \qquad -2x+5 \end{array}$$

$a=3$, $b=5$이므로

$a+b=8$

다른 풀이

$(x^2-x+2)(ax+1)-2x+b=3x^3-2x^2+3x+7$이므로

좌변을 전개하면

$ax^3+(1-a)x^2+(2a-3)x+2+b=3x^3-2x^2+3x+7$

등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=3$, $b=5$이므로 $a+b=8$

A022 다항식의 나눗셈하기 정답 ④

두 다항식 $P(x)=3x^3+x+11$, $Q(x)=x^2-x+1$에 대하여 다항식 $P(x)+4x$를 다항식 $Q(x)$로 나눈 나머지가 $5x+a$일 때, 상수 a의 값은? [3점] [정답률 88%]

❶ $P(x)+4x=3x^3+5x+11$임을 이용하여 직접 나눗셈을 해본다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 다항식의 나눗셈을 하여 a의 값을 구한다.

$P(x)+4x=3x^3+5x+11$이므로 $P(x)+4x$를

$Q(x)=x^2-x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 3x+3 \\ x^2-x+1 & 3x^3\qquad\quad+5x+11 \\ & 3x^3-3x^2+3x \\ \hline & \qquad 3x^2+2x+11 \\ & \qquad 3x^2-3x+3 \\ \hline & \qquad\qquad 5x+8 \end{array}$$

따라서 몫이 $3x+3$이고 나머지는 $5x+8$이므로

$a=8$

A023 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제해결하기 정답 ④

실린더에 담긴 액체의 높이를 h(m), 액체의 밀도를 ρ(kg/m^3), 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력을 P(N/m^2)라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다. [정답률 77%]

$P=\rho gh$ (단, g는 중력가속도이다.)

실린더 A에 담긴 액체의 높이는 실린더 B에 담긴 액체의 높이의 15배이고,

❶ $h_A=15h_B$

실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이다.

❷ $\rho_A=\frac{3}{5}\rho_B$

실린더 A에 담긴 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력과 실린더 B에 담긴 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력을 각각 P_A, P_B라 할 때, $\frac{P_A}{P_B}$의 값은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

Step ❶ 두 실린더 A, B에 담긴 액체의 높이를 h_A, h_B로 놓고 관계식을 구한다.

실린더 A에 담긴 액체의 높이를 h_A, 실린더 B에 담긴 액체의 높이를 h_B라 하면 실린더 A에 담긴 액체의 높이가 실린더 B에 담긴 액

체의 높이의 15배이므로

$h_A=15h_B$

Step ❷ 두 실린더 A, B에 담긴 액체의 밀도를 ρ_A, ρ_B로 놓고 관계식을 구한다.

실린더 A에 담긴 액체의 밀도를 ρ_A, 실린더 B에 담긴 액체의 밀도를 ρ_B라 하면 실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이므로

$\rho_A=\frac{3}{5}\rho_B$

Step ❷ $\frac{P_A}{P_B}$의 값을 구한다.

따라서

$$\frac{P_A}{P_B}=\frac{\rho_A g h_A}{\rho_B g h_B}=\frac{\left(\frac{3}{5}\rho_B\right)g(15h_B)}{\rho_B g h_B}=9$$

A024 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제해결하기 정답 ③

별의 표면에서 단위 시간당 방출하는 총 에너지를 광도라고 한다. 별의 반지름의 길이를 R(km), 표면 온도를 T(K), 광도를 L(W)이라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다. [정답률 71%]

$L=4\pi R^2\times\sigma T^4$ (단, σ는 슈테판-볼츠만 상수이다.)

별 A의 반지름의 길이는 별 B의 반지름의 길이의 12배이고, 별 A의 표면 온도는 별 B의 표면 온도의 $\frac{1}{2}$배이다. 별 A와 별 B의 광도를 각각 L_A, L_B라 할 때, $\frac{L_A}{L_B}$의 값은? [4점]

❶ L_A, L_B의 식을 별 A, B의 반지름의 길이와 표면 온도로 나타낸다.

① 3 ② 6 ❸ 9 ④ 12 ⑤ 15

Step ❶ 별 A와 별 B의 반지름의 길이와 표면 온도의 관계를 식으로 나타낸다.

별 A의 반지름의 길이를 R_A, 별 B의 반지름의 길이를 R_B, 별 A의 표면 온도를 T_A, 별 B의 표면 온도를 T_B라 하자.

별 A의 반지름의 길이는 별 B의 반지름의 길이의 12배이므로

$R_A=12R_B$

별 A의 표면 온도는 별 B의 표면 온도의 $\frac{1}{2}$배이므로

$T_A=\frac{1}{2}T_B$

이다.

Step ❷ $\frac{L_A}{L_B}$의 값을 구한다.

그러므로

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{4\pi {R_A}^2\times\sigma {T_A}^4}{4\pi {R_B}^2\times\sigma {T_B}^4}$$

$$=\frac{4\pi(12R_B)^2\times\sigma\left(\frac{1}{2}T_B\right)^4}{4\pi {R_B}^2\times\sigma {T_B}^4}$$

$=144\times\frac{1}{16}$

$=9$

따라서 $\frac{L_A}{L_B}=9$이다.

A025 다항식의 나눗셈 추론하기 정답 ③

다음은 x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 다항식 x^2-x-1로 나누어떨어지기 위한 정수 a, b의 값을 구하는 과정의 일부이다. [정답률 66%]

> 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 p, q라 하면
> $p+q=1$, $pq=-1$
> 이다.
> 따라서 $p^2+q^2=\boxed{(가)}$, $p^4+q^4=\boxed{(나)}$이다.
> ❶ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 (가), (나)에 알맞은 수를 구한다.
> x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 x^2-x-1로 나누어떨어지면
> $ap^9+bp^8=-1$ …… ①
> $aq^9+bq^8=-1$ …… ②
> 이다.
> ①, ②의 양변에 각각 q^8, p^8을 곱하여 정리하면
> $ap+b=-q^8$ …… ③
> $aq+b=-p^8$ …… ④
> 이다.
> ③에서 ④를 뺀 식으로부터 $a(p-q)=p^8-q^8$이고,
> $p\neq q$이므로 $a=\frac{p^8-q^8}{p-q}$이다.
> ❷ 인수분해하여 약분한 다음 (가), (나)에서 구한 값을 이용한다.
> 따라서 $a=\boxed{(다)}$이다.
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 r, s, t라 할 때, $r+s+t$의 값은? [4점]

① 27 ② 29 ❸ 31 ④ 33 ⑤ 35

Step ❶ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 p^2+q^2과 p^4+q^4의 값을 구한다.

$p+q=1$, $pq=-1$이므로

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=\boxed{3}$

또 $p^2+q^2=3$, $p^2q^2=1$이므로

$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=\boxed{7}$

따라서 $r=3$, $s=7$이다.

Step ❷ p^8-q^8을 인수분해하여 약분한 다음 a의 값을 구한다.

$$a=\frac{p^8-q^8}{p-q}=(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)$$

$=7\times3\times1$

$=\boxed{21}$

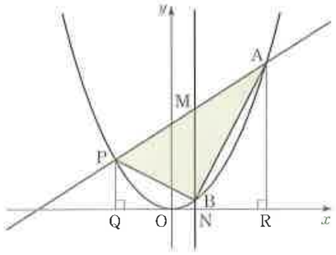
이므로 $t=21$이다.

따라서 $r+s+t=3+7+21=31$

A026 다항식의 연산의 성질을 이용하여 추론하기 정답 ④

다음은 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$, [정답률 60%]
$\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}\left(\frac{a-1}{2},\ \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PAB의 넓이를 구하는 과정이다. (단, $a>1$이다.)

점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 PA와 만나는 점을 M, x축과 만나는 점을 N이라 하자.



두 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$, $\mathrm{R}(a,\ 0)$에 대하여 사각형 PARQ는 사다리꼴이다. 두 점 M과 N은 각각 두 선분 PA, QR의 중점이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AR}})=\boxed{\text{(가)}}$

❶ $\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\overline{\mathrm{AR}}=a^2$임을 이용하여 (가)를 구한다.

이다. 또한

$\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MN}}-\overline{\mathrm{BN}}=\boxed{\text{(가)}}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\boxed{\text{(나)}}$

❷ (가)를 이용하여 (나)를 구한다.

이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$S=2\times\triangle\mathrm{MAB}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MB}}\times\overline{\mathrm{NR}}$

$=\frac{(a+1)^3}{\boxed{\text{(다)}}}$

이다. ❸ $\overline{\mathrm{NR}}$의 길이를 구하여 (다)를 구한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(3)+g(5)+k$의 값은? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ❹ 22 ⑤ 24

Step ❶ 두 점 P, A의 좌표를 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{AR}}$의 길이를 구하여 (가)에 들어갈 식을 구한다.

$\mathrm{P}(-1,\ 1)$, $\mathrm{A}(a,\ a^2)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\overline{\mathrm{AR}}=a^2$이다.

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AR}})=\boxed{\frac{1+a^2}{2}}$

이다. 또한

Step ❷ (가)를 이용하여 (나)에 들어갈 식을 구한다.

$\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MN}}-\overline{\mathrm{BN}}=\boxed{\frac{1+a^2}{2}}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\boxed{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}$

이다.

Step ❸ $\overline{\mathrm{NR}}$의 길이를 구하여 (다)에 들어갈 수를 구한다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$S=2\times\triangle\mathrm{MAB}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MB}}\times\overline{\mathrm{NR}}$ → 점 N은 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$과 점 $\mathrm{R}(a,\ 0)$의 중점이므로 $\overline{\mathrm{NR}}=\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{2}=\frac{a+1}{2}$

$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\times\frac{a+1}{2}$

$=\frac{(a+1)^3}{\boxed{8}}$

따라서 $f(a)=\frac{1+a^2}{2}$, $g(a)=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$, $k=8$이므로

$f(3)+g(5)+k=\frac{1+3^2}{2}+\left(\frac{5+1}{2}\right)^2+8=5+9+8=22$

A027 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제해결하기 정답 ③

단면의 반지름의 길이가 R이고 길이가 l인 원기둥 모양의 [정답률 75%]
혈관이 있다. 단면의 중심에서 혈관의 벽면 방향으로 r만큼 떨어진 지점에서의 혈액의 속력을 v라 하면, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$v=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

(단, P는 혈관 양끝의 압력차, η는 혈액의 점도이고 속력의 단위는 cm/초, 길이의 단위는 cm이다.)

R, l, P, η가 모두 일정할 때, 단면의 중심에서 혈관의 벽면 방향으로 $\frac{R}{3}$, $\frac{R}{2}$만큼씩 떨어진 두 지점에서의 혈액의 속력을 각각 v_1, v_2라 하자. $\frac{v_1}{v_2}$의 값은? [4점]

❶ $r=\frac{R}{3}$, $r=\frac{R}{2}$를 주어진 관계식에 각각 대입하여 v_1, v_2를 구한다.

① $\frac{28}{27}$ ② $\frac{10}{9}$ ❸ $\frac{32}{27}$ ④ $\frac{34}{27}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

Step ❶ $r=\frac{R}{3}$, $r=\frac{R}{2}$를 주어진 관계식에 각각 대입한다.

(i) 단면의 중심에서 혈관의 벽면 방향으로 $\frac{R}{3}$만큼 떨어진 지점의 속력 v_1을 구하려면 $r=\frac{R}{3}$를 주어진 관계식에 대입한다.

$$v_1=\frac{P}{4\eta l}\left\{R^2-\left(\frac{R}{3}\right)^2\right\}=\frac{P}{4\eta l}\times\frac{8}{9}R^2$$

(ii) 단면의 중심에서 혈관의 벽면 방향으로 $\frac{R}{2}$만큼 떨어진 지점의 속력 v_2를 구하려면 $r=\frac{R}{2}$를 주어진 관계식에 대입한다.

$$v_2=\frac{P}{4\eta l}\left\{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}=\frac{P}{4\eta l}\times\frac{3}{4}R^2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{32}{27}$

A028 곱셈 공식을 이용하여 도형 문제해결하기 정답 ⑤

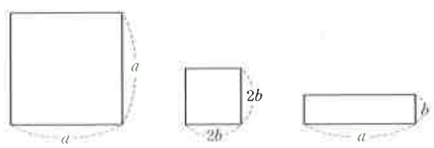
서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 한 변의 길이가 각각 a, $2b$ [정답률 78%]
인 두 개의 정사각형과 가로와 세로의 길이가 각각 a, b이고 넓이가 4인 직사각형이 있다. 두 정사각형의 넓이의 합이 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인

❶ 두 정사각형의 넓이의 합과 직사각형의 넓이의 관계를 식으로 나타낸다.

직사각형의 넓이의 5배와 같을 때, 한 변의 길이가 $a+2b$인 정사각형의 넓이

❷ ❶의 관계식을 이용하여 정사각형의 넓이를 구한다.

는? [3점]



① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ❺ 36

Step ❶ **두 정사각형의 넓이의 관계를 이용하여 식을 세우고 한 변의 길이가 $a+2b$ 일 때의 정사각형의 넓이를 구한다.**

두 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+(2b)^2$이고 직사각형의 넓이는 ab이므로 $a^2+4b^2=5ab$이다.

$ab=4$이고 $(a+2b)^2=a^2+4b^2+4ab$이므로 $(a+2b)^2=9ab=36$

A029 다항식의 전개식에서 계수 구하기 정답 36

$(6x+y-2z)^2$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점] [정답률 88%]

❶ 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한다.

36

Step ❶ **식을 전개하여 x^2의 계수를 구한다.**

$(6x+y-2z)^2=36x^2+y^2+4z^2+12xy-4yz-24zx$

따라서 x^2의 계수는 36이다.

해검단 TALK

x^2의 계수는 $6x\times6x=36x^2$에서만 나오므로 일일이 전개할 필요는 없어.

A030 곱셈 공식의 변형을 이용한 도형 문제해결하기 정답 ②

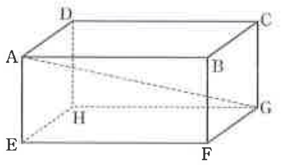
그림과 같이 모든 모서리 길이의 합이 20인 직육면체 [정답률 80%]

❶ 세 모서리의 길이를 a, b, c로 놓고 $a+b+c$의 값을 구한다.

ABCD-EFGH가 있다. $\overline{AG}=\sqrt{13}$일 때, 직육면체 ABCD-EFGH의 겉넓이는? [3점]

❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

❸ 곱셈 공식을 이용하여 겉넓이를 구한다.



① 10 ❷ 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

Step ❶ **이웃하는 세 모서리의 길이를 a, b, c로 놓고 모든 모서리의 길이의 합을 이용하여 a, b, c의 관계식을 구한다.**

이웃하는 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)=20$이므로

$a+b+c=5$

Step ❷ **$\overline{AG}$의 길이를 이용하여 a, b, c의 관계식을 구한다.**

또 $\overline{AG}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{13}$이므로

$a^2+b^2+c^2=13$

Step ❸ **곱셈 공식의 변형을 이용하여 겉넓이를 구한다.**

따라서 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(ab+bc+ca)&=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\&=5^2-13\\&=12\end{aligned}$$

A031 곱셈 공식을 이용하여 다항식 전개하기 정답 100

세 실수 a, b, c에 대하여 [정답률 84%]

$a^2+b^2+4c^2=44$, $ab+2bc+2ca=28$

일 때, $(a+b+2c)^2$의 값을 구하시오. [3점]

❶ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$임을 이용한다.

100

Step ❶ **곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 구한다.**

$$\begin{aligned}(a+b+2c)^2&=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2b(2c)+2(2c)a\\&=a^2+b^2+4c^2+2(ab+2bc+2ca)\\&=44+2\times28\\&=100\end{aligned}$$

A032 다항식의 전개식에서 계수 구하기 정답 ②

x에 대한 다항식 $(ax+2)^3+(x-1)^2$을 전개한 식에서 [정답률 90%]

❶ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$임을 이용한다.

x의 계수가 34일 때, 상수 a의 값은? [3점]

❷ 전개식에서 x의 계수를 찾는다.

① 1 ❷ 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

Step ❶ **주어진 다항식을 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.**

주어진 다항식을 전개하면

$(ax+2)^3+(x-1)^2$

$=(a^3x^3+6a^2x^2+12ax+8)+(x^2-2x+1)$

$=a^3x^3+(6a^2+1)x^2+(12a-2)x+9$

Step ❷ **전개한 식에서 x의 계수가 34임을 이용하여 a의 값을 구한다.**

x의 계수가 34이므로 $12a-2=34$

따라서 $a=3$

해검단 TALK

다항식을 전개하기 전에 x의 계수만 구할 수 있어. $(ax+2)^3$을 전개했을 때 x의 계수는 $12ax$에서 $12a$이고, $(x-1)^2$을 전개했을 때 x의 계수는 $-2x$에서 -2야. 따라서 $12a-2=34$이므로 $a=3$이지^^

A033 곱셈 공식을 활용한 도형 문제해결하기 정답 16

서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 세 모서리의 길이가 각각 [정답률 36%] $a+b$, $a+b$, $a+2b$인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 그림과 같이 각 모서리의 길이가 a 또는 b가 되도록 12개의 작은 직육면체로 나누었을 때,

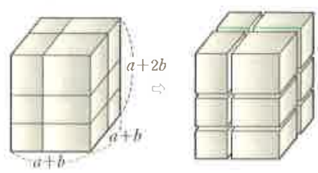
❶ 직육면체의 부피를 a, b에 대한 다항식으로 나타내고 나누어진 직육면체의 부피에 따른 개수를 찾는다.

부피가 150인 직육면체는 5개이다. $a+2b$의 값을 구하시오. (단, $b\neq1$이다.)

❷ 5개의 같은 부피를 가진 직육면체의 부피가 150임을 이용하여 식의 값을 찾는다.

[3점]

16



Step ❶ 직육면체의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$ ← 나누어진 직육면체의 부피는 a^3, a^2b, ab^2, b^3이다.

Step ❷ 전개식의 계수를 이용하여 부피에 따른 직육면체의 개수를 구한다.

부피가 a^3인 직육면체 : 1개, 부피가 a^2b인 직육면체 : 4개

부피가 ab^2인 직육면체 : 5개, 부피가 b^3인 직육면체 : 2개

Step ❸ 부피가 150인 직육면체의 식을 이용하여 식의 값을 구한다.

부피가 150인 직육면체는 5개이므로

$ab^2=150=6\times5^2$

따라서 $a=6$, $b=5$이므로

$a+2b=6+2\times5=16$

해검단 TALK

$b\neq1$이라는 조건이 없어서 답이 두 개였던 문제야.
$ab^2=150$에서 $a=150$, $b=1$이면 a, b가 서로소니까 152도 정답이었겠지?

A034 곱셈 공식을 이용하여 식의 값 구하기 정답 ②

$(2x+y-1)^2=3$을 만족시키는 x, y에 대하여 [정답률 84%]
❶ 곱셈 공식을 이용하여 좌변을 전개하고 식의 값을 찾는다.
$4x^2+y^2+4xy-4x-2y$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 주어진 식을 $4x^2+y^2+4xy-4x-2y$ 꼴이 나오도록 전개한다.

$(2x+y-1)^2=3$의 좌변을 전개하면

$4x^2+y^2+(-1)^2+4xy-2y-4x=3$

이므로

$4x^2+y^2+4xy-4x-2y=2$

다른 풀이

$2x+y-1=\pm\sqrt{3}$이므로

$2x+y=1\pm\sqrt{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(2x+y)^2=(1\pm\sqrt{3})^2$

$4x^2+4xy+y^2=4\pm2\sqrt{3}$

따라서 구하는 식의 값은

$4x^2+y^2+4xy-4x-2y$

$=(4x^2+4xy+y^2)-2(2x+y)$

$=(4\pm2\sqrt{3})-2(1\pm\sqrt{3})$ (복부호동순)

$=2$

A035 곱셈 공식의 변형을 이용한 식의 값 구하기 정답 ②

두 실수 a, b에 대하여 $a+b=4$, $a^3+b^3=40$일 때, [정답률 93%]
❶ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$임을 이용한다.
ab의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$40=64-12ab$

따라서 $ab=2$

해검단 TALK

문자의 합과 곱이 주어지면 곱셈 공식을 이용해도 되지만 곱셈 공식의 변형을 이용하면 편리해! 그러므로 곱셈 공식의 변형을 꼭 기억해 두자!

A036 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값 구하기 정답 ⑤

두 실수 a, b에 대하여 $a+b=3$, $a^2+b^2=7$일 때, a^4+b^4의 값은? [3점] [정답률 81%]
❶ $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$을 이용한다.

① 39 ② 41 ③ 43 ④ 45 ⑤ 47

Step ❶ 주어진 등식을 이용하여 ab의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a^4+b^4의 값을 구한다.

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=3^2-7=2$이므로

$ab=1$

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=7^2-2\times1^2$

따라서 $a^4+b^4=47$

A037 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값 구하기 정답 17

$x+y=5$, $xy=2$일 때, $(x-y)^2$의 값을 구하시오. [3점] [정답률 81%]
❶ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$를 이용한다.
17

Step ❶ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $(x-y)^2$의 값을 구한다.

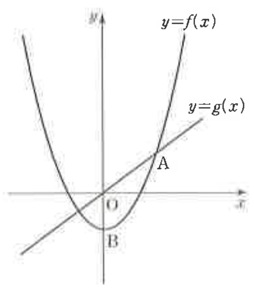
$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=5^2-4\times2$

따라서 $(x-y)^2=17$

A038 곱셈 공식의 변형을 이용한 도형 문제해결하기 정답 ①

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(a, b)$를 지나고 꼭짓점이 점 $\mathrm{B}(0, -b)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 A에서 만난다. $a+b=5$이고 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{5}{2}$일 때, [정답률 78%]
❶ $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(0, -b)$임을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.
a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 양수이고, O는 원점이다.) [3점]
❷ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$임을 이용한다.



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

Step ❶ 삼각형의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{5}{2}$이므로 $\frac{1}{2}ab=\frac{5}{2}$에서 $ab=5$

Step ❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

따라서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times5=15$

해검단 TALK

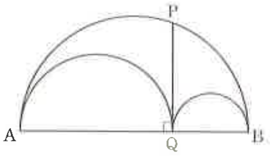
삼각형 OAB의 넓이는 밑변의 길이가 $\overline{OB}=b$, 높이가 점 A의 x좌표, 즉 a이므로 $\frac{1}{2}ab$야~

A039 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값 구하기 정답 16

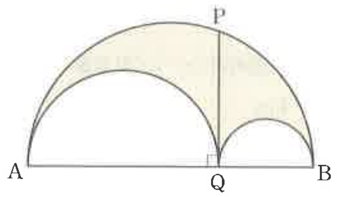
선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 AQ와 선분 QB를 지름으로 하는 반원을 각각 그린다. 호 AB, 호 AQ 및 호 QB로 둘러싸인 모양 도형의 넓이를 S_1, 선분 PQ를 지름으로 하는 반원의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$이고 $S_1-S_2=2\pi$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [4점] [정답률 22%]

❶ $\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$로 두고 S_1, S_2의 식을 구한다.

16

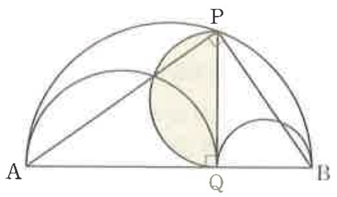


Step ❶ S_1, S_2의 식을 각각 구한다.



$\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하자.

$$S_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}xy$$



$\triangle AQP\backsim\triangle PQB$이므로

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$

따라서 $\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$

그러므로 $S_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}xy$

Step ❷ $S_1-S_2=2\pi$의 식을 이용하여 xy, $x-y$의 값을 각각 구한다.

$S_1-S_2=\frac{\pi}{8}xy=2\pi$에서 $xy=16$이고 $\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$에서

$x-y=8\sqrt{3}$이므로

$\overline{AB}^2=(\overline{AQ}+\overline{QB})^2$

$=(x+y)^2$

$=(x-y)^2+4xy$

$=192+64=256$

따라서 $\overline{AB}=16$

다른 풀이

$\angle APB=90^\circ$이므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(x+y)^2$ …… ㉠

$\angle AQP=90^\circ$, $\angle PQB=90^\circ$이므로

$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2-x^2=\overline{BP}^2-y^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\overline{BP}^2=(x+y)^2+y^2-x^2=2xy+2y^2$이므로

$\overline{BP}^2=xy+y^2$ …… ㉢

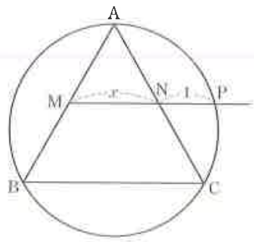
㉢을 ㉡에 대입하면 $\overline{PQ}^2=xy$

A040 이차방정식을 이용하여 다항식의 연산 문제해결하기 정답 30

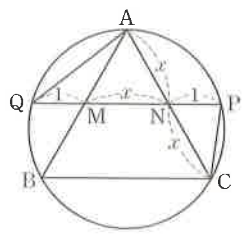
정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 그림과 같이 점 P는 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점이고 $\overline{NP}=1$이다. $\overline{MN}=x$라 할 때, $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 16%]

❶ 도형의 여러 가지 성질을 이용하여 x에 대한 식을 세운 다음 식을 변형해 본다.

30



Step ❶ 도형의 성질을 이용하여 x에 대한 식을 세운다.



그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자.

삼각형 AQN과 삼각형 PCN이 닮음이므로

$(1+x):x=x:1$

$1+x=x^2$

$\angle ANQ=\angle PNC$, $\angle AQP=\angle ACP$이므로 $\triangle AQN\backsim\triangle PCN$ (AA닮음)

Step ❷ 식을 변형하여 값을 구한다.

$x^2-x-1=0$에서 양변을 $x(x\neq0)$로 나누면

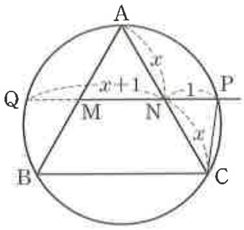
$x-1-\frac{1}{x}=0$이므로

$x-\frac{1}{x}=1$

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$이므로

$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$

다른 풀이 1



원의 성질에 의하여

$\overline{NA}\times\overline{NC}=\overline{NP}\times\overline{NQ}$에서

$x\times x=1\times(x+1)$

$x^2=x+1$

$x^2-x-1=0$에서

$x-1-\frac{1}{x}=0$이므로

$x-\frac{1}{x}=1$

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$이므로

$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$

다른 풀이 2

그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 O, 선분 MN의 중점을 I라 하면 $\overline{AH}=\sqrt{3}x$ 이므로

$\overline{IO}=\frac{1}{6}\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$

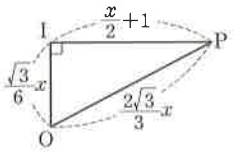
$\overline{IP}=\overline{IN}+\overline{NP}=\frac{x}{2}+1$

$\overline{OP}=\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

$\overline{IO}=\overline{AH}-(\overline{AI}+\overline{OH})$

$=\overline{AH}-\left(\frac{1}{2}\overline{AH}+\frac{1}{3}\overline{AH}\right)$

$=\overline{AH}-\frac{5}{6}\overline{AH}=\frac{1}{6}\overline{AH}$



그림과 같이 삼각형 OPI에서 피타고라스 정리에 의하여

$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$

이고 식을 정리하면

$x^2-x-1=0$에서 $x-1-\frac{1}{x}=0$이므로 $x-\frac{1}{x}=1$

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$이므로

$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$

A041 곱셈 공식의 변형을 이용한 도형 문제해결하기 정답 240

그림과 같이 선분 AB 위의 점 C에 대하여 선분 AC를 한 모서리로 하는 정육면체와 선분 BC를 한 모서리로 하는 정육면체를 만든다. [정답률 65%]

$\overline{AB}=8$이고 두 정육면체의 부피의 합이 224일 때,

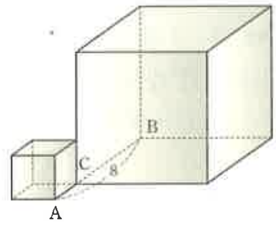
❶ $\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$로 놓으면 $x+y=8$, $x^3+y^3=224$임을 알고 xy의 값을 구한다.

두 정육면체의 겉넓이의 합을 구하시오.

❷ x^2+y^2의 값을 구하고 겉넓이의 합을 구한다.

(단, 두 정육면체는 한 모서리에서만 만난다.) [4점]

240



Step ❶ $\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$로 놓고 곱셈 공식을 이용하여 xy의 값을 구한다.

$\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}=8$에서 $x+y=8$

두 정육면체의 부피의 합이 224이므로 $x^3+y^3=224$

두 정육면체의 겉넓이의 합은 $6(x^2+y^2)$이므로 xy의 값을 구해야 한다.

$(x+y)^3=(x^3+y^3)+3xy(x+y)$이므로

$8^3=224+3xy\times8$

$xy=12$

Step ❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 두 정육면체의 겉넓이의 합을 구한다.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\times12=40$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6(x^2+y^2)=240$

다른 풀이

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{CB}=8-x$이므로 $x^3+(8-x)^3=224$

$x^3-x^3+24x^2-192x+512=224$, $24x^2-192x+288=0$

$x^2-8x+12=0$이므로 $(x-2)(x-6)=0$

$x=2$ 또는 $x=6$이므로 두 정육면체의 모서리의 길이는 각각 2와 6이다.

따라서 두 정육면체의 겉넓이는

$6\times2^2+6\times6^2=240$

A042 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개하고 계수 구하기 정답 ①

두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\langle A, B\rangle$를 [정답률 90%]

$\langle A, B\rangle=A^2+AB+B^2$

❶ 등식의 양변에 $(A-B)$를 곱하여 식을 변형한다.

으로 정의할 때, 다항식 $\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는? [4점]

❷ 다항식을 ❶에 대입하여 x의 계수를 구한다.

❶ 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

Step ❶ 주어진 등식의 양변에 $(A-B)$를 곱하여 식을 변형한다.

$\langle A, B\rangle=A^2+AB+B^2$의 양변에 $(A-B)$를 곱하면

$(A-B)\times\langle A, B\rangle=(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$

Step ❷ ❶에 다항식을 대입한다.

이 식에 $A=x^2+x+1$, $B=x^2+x$를 대입하면

$A-B=(x^2+x+1)-(x^2+x)=1$이므로

$1\times\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle=(x^2+x+1)^3-(x^2+x)^3$

$\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle=(x^2+x+1)^3-(x^2+x)^3$ …… ㉠

㉠의 우변을 정리하면

$\{x^2+(x+1)\}^3-(x^2+x)^3$

$=x^6+3x^4(x+1)+3x^2(x+1)^2+(x+1)^3-(x^2+x)^3$

Step ❸ x의 계수를 구한다.

이때 $(x+1)^3$ 이외의 항에는 차수가 이차 이상인 항들이 곱해져 있으므로 일차항이 나올 수 없다.

그러므로 $\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 $(x+1)^3$의 x의 계수와 일치한다.

$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$에서 x의 계수는 3이다.

따라서 $\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 3이다.

다른 풀이 1

$\langle A, B\rangle=A^2+AB+B^2=(A-B)^2+3AB$

이므로

$\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$

$=\{(x^2+x+1)-(x^2+x)\}^2+3(x^2+x+1)(x^2+x)$

$=1^2+3(x^2+x+1)(x^2+x)$

$=1^2+3x^2(x^2+x)+3x(x^2+x)+3(x^2+x)$

따라서 x의 계수는 $3(x^2+x)$의 x의 계수와 같으므로 3이다.

다른 풀이 2

다항식 $\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수를 구할 때, 이차항인 x^2은 의미를 갖지 않는다. 그러므로 $\langle x^2+x+1, x^2+x\rangle$의 전개식에서 x의 계수와 $\langle x+1, x\rangle$의 전개식에서 x의 계수는 같다.

$\langle x+1, x\rangle$의 전개식에서 x의 계수를 구하면

$\langle x+1, x\rangle=(x+1)^2+(x+1)x+x^2$

$=x^2+2x+1+x^2+x+x^2=3x^2+3x+1$

따라서 x의 계수는 3이다.

해검단 TALK

새로운 연산을 정의하는 문제는 이 새로운 연산이 어떤 식으로 되어 있는지 잘 살피면 돼~

문제에서 $\langle A, B\rangle=A^2+AB+B^2$은 곱셈 공식와 연관지어 생각해 보면

$(A-B)\times\langle A, B\rangle=(A-B)(A^2+AB+B^2)$임을 유추할 수 있겠지?

또 $A^2+AB+B^2=(A+B)^2-AB=(A-B)^2+3AB$임을 이용해서 풀 수도 있어!

A043 곱셈 공식을 이용한 식의 값 구하기 정답 135

세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 62%]

(가) x, y, $2z$ 중에서 적어도 하나는 3이다.
(나) $3(x+y+2z)=xy+2yz+2zx$

❶ 조건 (가)에서 $(x-3)(y-3)(2z-3)=0$이 성립함을 알고 이를 전개한 후 조건 (나)를 대입한다.

$10xyz$의 값을 구하시오. [4점] 135

Step ❶ 조건 (가)를 이용하여 다항식을 세운다.

조건 (가)에서 $(x-3)(y-3)(2z-3)=0$이므로

$(x-3)(y-3)(2z-3)$

$=(xy-3x-3y+9)(2z-3)$

$=2xyz-6xz-6yz+18z-3xy+9x+9y-27$

$=2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27=0$ …… ㉠

Step ❷ 조건 (나)를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

조건 (나)에서 $3(x+y+2z)=xy+2yz+2zx$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-3\{3(x+y+2z)\}+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-9(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-27=0$

즉 $xyz=\dfrac{27}{2}$이므로

$10xyz=135$

해검단 TALK

(가)에서 '적어도 하나는 3'이라는 말은 이 중 하나는 무조건 3이라는 말이니까

x, y, $2z$에게서 모두 3씩 뺀다면 그 중 적어도 하나는 0이 된다는 말이야~

따라서 식으로 표현하면 $(x-3)(y-3)(2z-3)=0$으로 표현할 수 있어~

다른 풀이

x, y, $2z$ 중에서 적어도 하나는 3이므로 (나)의 식에서

$3(x+y+2z)=xy+y(2z)+(2z)x$이므로 $x=3$을 조건 (나)의 식에 대입하여 문제를 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

그러므로 $x=3$이라 가정하면

$3(x+y+2z)=3(3+y+2z)=9+3y+6z$

$xy+2yz+2zx=3y+2yz+6z$

$9+3y+6z=3y+2yz+6z$, $9=2yz$

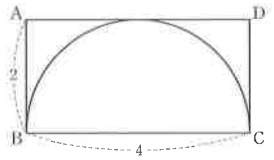
따라서 $yz=\dfrac{9}{2}$이므로

$10xyz=10\times3\times\dfrac{9}{2}=135$

A044 곱셈 공식을 활용한 도형 문제해결하기 정답 ②

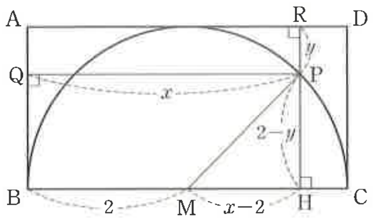
그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형과 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. [정답률 28%]
직사각형 ABCD의 내부에 있는 한 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 선분 AD에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 호 BC 위에 있는 점 P에 대하여 직사각형 AQPR의 둘레의 길이는 10이다. 직사각형 AQPR의 넓이는? [4점]

❶ 호 BC 위의 점 P에 대하여 $\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$로 놓고 피타고라스 정리를 이용하여 xy의 값을 구한다.



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

Step ❶ 호 BC 위의 점 P에 대하여 $\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$로 놓고 식을 세운다.



호 BC 위의 점 P에 대하여 $\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$라 하면
직사각형 AQPR의 둘레의 길이는 10이므로
$2(x+y)=10$ ⋯⋯ ㉠

Step ❷ 선분 BC의 중점을 M으로 놓고 피타고라스 정리를 이용하여 직사각형의 넓이를 구한다.

점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고
선분 BC의 중점을 M이라 하면
$\overline{PH}=2-y$, $\overline{MH}=x-2$
직각삼각형 PMH에서 피타고라스 정리에 의하여
$4=(2-y)^2+(x-2)^2$
$=x^2+y^2-4(x+y)+8$
$=(x+y)^2-2xy-4(x+y)+8$
㉠에서 $x+y=5$이므로
$4=25-2xy-20+8$, $2xy=9$
따라서 $xy=\frac{9}{2}$
따라서 직사각형 AQPR의 넓이는 $\frac{9}{2}$이다.

A045 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값 구하기 정답 3

두 실수 a, b에 대하여 $a^3=9-4\sqrt{5}$, $b^3=9+4\sqrt{5}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 46%]
3

❶ a^3+b^3, a^3b^3의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

Step ❶ 두 실수 a^3, b^3의 합과 곱을 구한다.

$a^3+b^3=(9-4\sqrt{5})+(9+4\sqrt{5})=18$
$a^3b^3=(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})=1$에서 $ab=1$

Step ❷ a^3+b^3, ab의 값을 알고 있으므로 $a+b$의 값을 구하기 위해 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

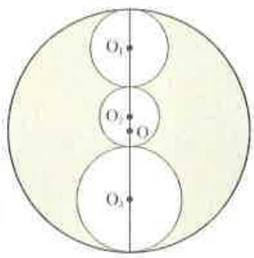
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=18$ ⋯⋯ ㉠
$a+b=t$(t는 실수)라 하면 ㉠에서
$t^3-3t-18=(t-3)(t^2+3t+6)=0$
이때 t는 실수이므로 $t=3$
따라서 $a+b=t=3$

3	1	0	-3	-18
		3	9	18
	1	3	6	0

A046 곱셈 공식의 변형을 이용한 도형 문제해결하기 정답 16

그림과 같이 반지름의 길이가 8인 원 O의 내부에 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2, r_3인 세 원 O_1, O_2, O_3이 있다. 네 원 O, O_1, O_2, O_3의 중심이 한 직선 위에 있고 원 O_1, O_3은 각각 원 O와 내접하며 원 O_2는 원 O_1, O_3과 동시에 외접한다. 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합이 어두운 부분의 넓이와 같을 때, $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$의 값을 구하시오. (단, 원 O_1, O_2, O_3의 중심의 위치는 서로 다르다.) [4점] [정답률 42%]
16

❶ $r_1+r_2+r_3=8$이고 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합은 원 O의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 알고 곱셈 공식의 변형을 이용한다.



Step ❶ 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합은 원 O의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 식을 세운다.

$r_1+r_2+r_3=8$이고, 어두운 부분과 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합이 같으므로 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합은 원 O의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다. 즉
$\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2=\frac{1}{2}\times 64\pi$이므로
$r_1^2+r_2^2+r_3^2=32$

Step ❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구한다.

따라서
$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=\frac{1}{2}\{(r_1+r_2+r_3)^2-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(64-32)=16$$

A047 다항식의 전개 이해하기 정답 48

두 다항식 $A=x^3+x+4$, $B=x+4$에 대하여 A^3-B^3의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [4점] [정답률 50%]
48

❶ A^3-B^3의 전개식을 구한다.

Step ❶ 다항식 A를 다항식 B로 나타내어 A^3-B^3의 식을 간단히 한다.

주어진 조건에서 $A=x^3+B$이므로
$A^3-B^3=(x^3+B)^3-B^3$
$=x^9+3x^6B+3x^3B^2+B^3-B^3$

$=x^9+3x^6B+3x^3B^2$ …… ㉠

Step ② x^3의 계수를 구한다.

㉠에서 x^3의 항은 $3x^3B^2$에만 존재한다.

$3x^3B^2=3x^3(x+4)^2$

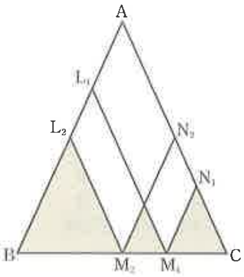
$=3x^3(x^2+8x+16)$

이므로 $3x^3B^2$의 x^3의 계수는 $3\times16=48$

따라서 A^3-B^3의 전개식에서 x^3의 계수는 48이다.

A048 곱셈 공식의 변형을 이용하여 도형 문제해결하기 정답 15

$\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 변 AB 위에 두 점 L_1, L_2를 잡고, 점 L_1, L_2에서 변 AC와 평행한 직선을 그어 변 BC와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하고, 또한 점 M_1, M_2에서 변 AB와 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 N_1, N_2라 하자. [정답률 22%]



$\overline{AL_1}\times\overline{L_2B}=1$이고 어두운 부분 전체의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 되도록 두 점 L_1, L_2를 잡을 때, $15\overline{L_1L_2}$의 값을 구하시오. [4점] 15

Step ① 삼각형의 닮음비를 이용하여 넓이의 비를 구한다.

$\overline{AL_1}=a\ (a>0)$라 하면 $\overline{N_1M_1}=\overline{N_1C}=a$

$\overline{AL_1}\times\overline{L_2B}=1$이므로 $\overline{L_2B}=\frac{1}{a}=\overline{L_2M_2}$

또한 $\overline{L_1M_1}$과 $\overline{M_2N_2}$의 교점을 점 P라 하고, $\overline{L_1L_2}=x(x>0)$라 하면

$\overline{PM_2}=\overline{PM_1}=x$

평행선의 성질에 의하여 $\triangle ABC$, $\triangle L_2BM_2$, $\triangle PM_2M_1$, $\triangle N_1M_1C$는 모두 닮음이고

닮음비는 $4:\frac{1}{a}:x:a$이므로

넓이의 비는 $16:\frac{1}{a^2}:x^2:a^2$

Step ② 어두운 부분의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 방정식을 세운다.

삼각형 ABC의 넓이를 S, 어두운 부분 전체의 넓이를 T라 하면 $S=2T$이므로

$16k=2\left(\frac{1}{a^2}+x^2+a^2\right)k$ (k는 비례상수)

$8=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+x^2$ → $\overline{AB}=\overline{AL_1}+\overline{L_1L_2}+\overline{L_2B}$에서 $4=a+x+\frac{1}{a}$이므로 $a+\frac{1}{a}=4-x$

$8=(4-x)^2-2+x^2$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$

이때 $a>0$이고 $4-x=a+\frac{1}{a}\neq1$이므로

→ $a\geq1$이면 $0<\frac{1}{a}\leq1$이므로 $a+\frac{1}{a}>1$

$0<a<1$이면 $\frac{1}{a}>1$이므로 $a+\frac{1}{a}>1$

따라서 $a+\frac{1}{a}\neq1$

$4-x=3$, $x=1$

따라서 $15\overline{L_1L_2}=15$

실전솔루션

두 닮은 도형의 닮음비가 $m:n$일 때,

① 길이의 비는 $m:n$

② 넓이의 비는 $m^2:n^2$

③ 부피의 비는 $m^3:n^3$

B 나머지정리

문제편 pp.22~34

필수 기출

001 ①	002 ②	003 ①	004 ③	005 ①	006 ⑤
007 ①	008 13	009 42	010 ③	011 ⑤	012 ②
013 ⑤	014 ⑤	015 ③	016 ③	017 ②	018 40
019 ④	020 ①	021 ①	022 14	023 40	024 11
025 ④	026 52	027 9	028 ④	029 40	030 146
031 ④	032 ③	033 ④	034 ③	035 46	036 ⑤
037 45	038 25	039 ③	040 26	041 ①	042 ①

플러스 기출

043 ④	044 ③	045 ②	046 54	047 ②	048 999
049 70					

B001 항등식의 성질 이해하기

정답 ①

모든 실수 x에 대하여 등식 $x^2+ax+4=x(x+2)+b$가 성립할 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [2점] [정답률 97%]

❶ 우변을 전개하여 양변의 계수를 비교한다.

❶ 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step ❶ 주어진 식의 우변을 전개한다.

$x^2+ax+4=x(x+2)+b$에서

$x^2+ax+4=x^2+2x+b$

Step ❷ 등식의 양변의 계수를 비교하여 식의 값을 구한다.

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=2$, $b=4$

따라서 $a+b=6$

B002 항등식의 성질 이해하기

정답 ②

등식 $x^3-x^2+x+3=(x-1)(x^2+1)+a$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a의 값은? [3점] [정답률 86%]

❶ 등식의 양변에 $x=1$을 대입한다.

① 2 ❷ 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ❶ 등식의 양변에 $x=1$을 대입하여 a의 값을 구한다.

주어진 등식

$x^3-x^2+x+3=(x-1)(x^2+1)+a$ ...... ㉠

이 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 참이 되어야 한다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+1+3=a$

이다. 따라서 $a=4$이다.

다른 풀이

등식의 우변을 정리하면

$x^3-x^2+x+3=x^3-x^2+x-1+a$

이다. 항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항을 비교하면

$3=-1+a$

이다. 따라서 $a=4$이다.

B003 항등식을 이용한 미정계수 구하기

정답 ①

모든 실수 x에 대하여 등식

$x^3-2x^2-x+14=(x+a)(x^2+bx+7)$

❶ 우변을 전개하여 양변의 계수를 비교한다.

이 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점] [정답률 91%]

❶ -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Step ❶ 주어진 식의 우변을 전개하여 내림차순으로 정리한다.

$(x+a)(x^2+bx+7)=x^3+(a+b)x^2+(ab+7)x+7a$

이므로

$x^3-2x^2-x+14=x^3+(a+b)x^2+(ab+7)x+7a$

Step ❷ 등식의 양변의 계수를 비교하여 미정계수를 구한다.

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2=a+b$, $-1=ab+7$, $14=7a$

따라서 $a=2$, $b=-4$이므로

$a+b=-2$

다른 풀이

$x^3-2x^2-x+14=(x+2)(x^2-4x+7)$이므로

$a=2$, $b=-4$

따라서 $a+b=-2$

B004 항등식을 이용한 미정계수 구하기

정답 ③

모든 실수 x에 대하여 등식

$x^2+3x+2=(x-2)^2+a(x-2)+b$

❶ 등식의 양변에 $x=2$, $x=0$을 대입한다.

가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점] [정답률 88%]

① 17 ② 18 ❸ 19 ④ 20 ⑤ 21

Step ❶ 등식의 양변에 $x=2$를 대입하여 b의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$b=12$

즉

$x^2+3x+2=(x-2)^2+a(x-2)+12$ ...... ㉠

Step ❷ 등식의 양변에 $x=0$을 대입하여 a의 값을 구한다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=4-2a+12$

이므로 $a=7$

따라서 $a+b=7+12=19$

다른 풀이

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$20=1+a+b$

따라서 $a+b=19$

B005 항등식을 이용한 미정계수 구하기 정답 ①

모든 실수 x에 대하여 등식 $(x-1)(x+a)=bx^2-3x+2$가 [정답률 92%]

❶ 좌변을 전개하여 양변의 계수를 비교한다.

성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

❶ -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

Step ❶ 주어진 등식의 좌변을 전개하여 내림차순으로 정리한다.

$(x-1)(x+a)=bx^2-3x+2$에서

$x^2+(a-1)x-a=bx^2-3x+2$

Step ❷ 등식의 양변의 계수를 비교하여 미정계수를 구한다.

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-2$, $b=1$

따라서 $a+b=-1$

다른 풀이

등식 $(x-1)(x+a)=bx^2-3x+2$의 양변에

$x=0$을 대입하면 $-a=2$이므로 $a=-2$

또 $x=1$을 대입하면 $0=b-1$이므로 $b=1$

따라서 $a+b=-1$

해결단 TALK

항등식의 양변에서 주어진 문자에 대하여 차수가 같은 항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법을 계수비교법이라고 해~~^^!

또 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법을 수치대입법이라고 해~~

실전 솔루션

x에 대한 항등식

=모든(임의의) 실수 x에 대하여 성립하는 등식

=x의 값과 관계없이 성립하는 등식

=x가 어떤 값을 갖더라도 성립하는 등식

B006 항등식을 이용한 미정계수 구하기 정답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 등식 [정답률 95%]

$6x-5=a(x-1)+bx$

가 성립할 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

❶ 우변을 x에 대하여 정리하고 양변의 계수를 비교한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ❺ 5

Step ❶ 주어진 등식의 우변을 x에 대하여 정리한다.

주어진 등식을 정리하면

$6x-5=(a+b)x-a$

Step ❷ 등식의 양변의 계수를 비교하여 미정계수를 구한다.

등식의 양변의 계수를 비교하면 $a=5$

$6=a+b$에서 $b=1$

따라서 $ab=5$

다른 풀이

등식 $6x-5=a(x-1)+bx$에 $x=0$을 대입하면 $-5=-a$이므로

$a=5$, $x=1$을 대입하면 $b=1$이다.

따라서 $ab=5$

B007 항등식을 이용한 미정계수 구하기 정답 ①

등식 $(a+2)x^2+(2-x)a^2+(2-x)b=0$이 x에 대한 항등식 [정답률 80%]

❶ 등식을 전개하고 항등식의 성질을 이용한다.

일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

❶ -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

Step ❶ 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+2)x^2-(a^2+b)x+2a^2+2b=0$

Step ❷ 항등식의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

x에 대한 항등식이므로 $a+2=0$, $a^2+b=0$

따라서 $a=-2$, $b=-4$이므로

$a+b=-6$

다른 풀이

$(a+2)x^2+(2-x)a^2+(2-x)b=0$이 x에 대한 항등식이므로

$x=2$를 대입하면 $4(a+2)=0$에서 $a=-2$

$x=0$을 대입하면 $8+2b=0$에서 $b=-4$

따라서 $a+b=-6$

실전 솔루션

항등식의 성질

❶ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

❷ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

$a=b=c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

B008 항등식을 이용한 미정계수 구하기 정답 13

등식 $x^2+5x+7=(x-1)Q(x)+a$가 x에 대한 항등식일 때, [정답률 85%]

❶ 등식의 양변에 $x=1$을 대입하여 좌변과 우변이 같음을 이용한다.

상수 a의 값을 구하시오. (단, $Q(x)$는 x에 대한 다항식이다.) [3점] 13

Step ❶ **등식의 양변에 적당한 수를 대입한다.**

등식 $x^2+5x+7=(x-1)Q(x)+a$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+5+7=a$

따라서 $a=13$

다른 풀이 1

다항식 x^2+5x+7을 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x+6 \\ \hline x-1 & x^2+5x+7 \\ & x^2-x \\ \hline & \quad 6x+7 \\ & \quad 6x-6 \\ \hline & \qquad 13 \end{array}$$

따라서 $a=13$

다른 풀이 2

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 5 & 7 \\ & & 1 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & \boxed{13} \end{array}$$

따라서 $a=13$

B009 항등식을 이용한 미정계수 구하기 정답 42

모든 실수 x에 대하여 등식 [정답률 73%]

$3x^2+x-2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

❶ 등식의 양변에 $x=1$, $x=0$, $x=2$를 대입하여 a, b, c의 값을 구한다.

가 성립할 때, abc의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [3점] 42

Step ❶ **항등식의 성질을 이용하여 a, b, c의 관계식을 구한다.**

$3x^2+x-2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $x=1$, $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면

$3+1-2=c$ ...... ㉠

$-2=a-b+c$ ...... ㉡

$12+2-2=a+b+c$ ...... ㉢

Step ❷ **대입한 식을 연립하여 식의 값을 구한다.**

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=7$, $c=2$

따라서 $abc=42$

다른 풀이 1

$3x^2+x-2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$에서

$3x^2+x-2=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$

등식의 양변의 계수를 비교하면

$a=3$, $1=-2a+b$, $-2=a-b+c$

따라서 $a=3$, $b=7$, $c=2$이므로

$abc=42$

다른 풀이 2

조립제법을 이용하여 주어진 이차식을 $x-1$로 나눈 나머지를 반복하여 구하면

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 1 & -2 \\ & & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 & \boxed{2} \\ & & 3 & \\ \hline & 3 & \boxed{7} & \end{array}$$

에서

$3x^2+x-2=(x-1)(3x+4)+2$

$=(x-1)\{3(x-1)+7\}+2$

$=3(x-1)^2+7(x-1)+2$

따라서 $a=3$, $b=7$, $c=2$이므로

$abc=42$

B010 나머지정리를 이용한 미정계수 구하기 정답 ③

x에 대한 다항식 x^3+3x^2+a를 $x-1$로 나눈 나머지가 7 [정답률 89%]

❶ $f(x)=x^3+3x^2+a$일 때 $f(1)=7$임을 이용한다.

일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ **나머지정리를 이용하여 주어진 다항식을 $x-1$로 나눈 나머지가 7임을 안다.**

$f(x)=x^3+3x^2+a$라 하자.

$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=1+3+a=a+4$

$f(1)=7$이므로 $a+4=7$이고

따라서 $a=3$

B011 인수정리를 이용한 미정계수 구하기 정답 ⑤

다항식 x^3-ax+6이 $x-1$로 나누어떨어지도록 하는 [정답률 89%]

❶ $f(x)=x^3-ax+6$일 때 $f(1)=0$임을 이용한다.

상수 a의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Step ❶ **인수정리를 이용한다.**

$f(x)=x^3-ax+6$이라 하면 다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$

$f(1)=1-a+6=0$

따라서 $a=7$

B012 나머지정리를 이용한 나머지 구하기 정답 ②

다항식 x^2-2x+5를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는? [2점] [정답률 92%]

❶ $f(x)=x^2-2x+5$일 때 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $f(1)$임을 이용한다.

① 2 ❷ 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ❶ 나머지정리를 이용한다.

$f(x)=x^2-2x+5$라 하면 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=1-2+5=4$

다른 풀이

다항식 x^2-2x+5를 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r}
x-1 \\
x-1\,\big)\,\overline{x^2-2x+5} \\
\underline{x^2-x} \\
-x+5 \\
\underline{-x+1} \\
4
\end{array}$$

이므로 나머지는 4이다.

해검단 TALK

다항식을 일차식으로 나눈 나머지만을 구할 때에는 직접 나누는 것보다 나머지정리를 이용하는 것이 간편해!

B013 조립제법을 이용하여 미지수 구하기 정답 ⑤

다항식 x^3-3x^2+2x+4를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정이다. [정답률 96%]

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\
 & & 2 & a & 0 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & \boxed{b}
\end{array}$$

❶ 직접 조립제법을 해본다.

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ❺ 2

Step ❶ 조립제법을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\
 & & 2 & \boxed{-2} & 0 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & \boxed{4}
\end{array}$$

$a=2\times(-1)=-2$, $b=4+0=4$

따라서 $a+b=2$

실전 솔루션

❶ 조립제법은 다항식을 일차식으로 나눌 때에만 사용한다.

❷ 조립제법을 사용할 때는 다항식의 모든 계수를 내림차순으로 빠짐없이 써야 한다. 즉 계수가 0일 때에도 0을 반드시 써야 한다.

B014 나머지정리를 이용한 나머지 구하기 정답 ⑤

다항식 x^3+3x+9를 $x+1$로 나눈 나머지는? [2점] [정답률 91%]

❶ $f(x)=x^3+3x+9$일 때 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 $f(-1)$임을 이용한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ❺ 5

Step ❶ 나머지정리를 이용한다.

$f(x)=x^3+3x+9$라 하면 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(-1)=-1-3+9=5$

B015 조립제법을 이용하여 미지수 구하기 정답 ③

다음은 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+3x+4$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때, 나머지를 구하는 과정을 나타낸 것이다. [정답률 85%]

$$\begin{array}{c|cccc}
a & 2 & 0 & 3 & 4 \\
 & & 2 & \square & \square \\
\hline
 & 2 & \square & \square & \boxed{b}
\end{array}$$

❶ 조립제법을 이용하여 빈 칸을 차례로 채운다.

위 과정에 들어갈 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ❸ 10 ④ 11 ⑤ 12

Step ❶ 조립제법을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc}
a & 2 & 0 & 3 & 4 \\
 & & 2a & \square & \square \\
\hline
 & 2 & 2a & \square & \boxed{b}
\end{array}$$

에서 $2a=2$이므로 $a=1$

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\
 & & 2 & 2 & 5 \\
\hline
 & 2 & 2 & 5 & \boxed{9}
\end{array}$$

이므로 $b=9$

따라서 $a+b=10$

B016 나머지정리를 이용한 나머지 구하기 정답 ③

다항식 $2x^3-3x+4$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는? [정답률 90%] [3점]

❶ 나머지정리를 이용하여 $x=1$을 다항식에 대입한다.

① 1 ② 2 ❸ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 나머지정리를 이용한다.

$f(x)=2x^3-3x+4$라 하면 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=2-3+4=3$

B017 나머지정리를 이용한 나머지 구하기

정답 ②

다항식 $P(x)$를 x^2-1로 나눈 몫은 $2x+1$이고 나머지가 5일 때, 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는? [3점] [정답률 85%]

❶ $P(x)=(x^2-1)(2x+1)+5$

❷ 나머지정리에 의하여 $P(2)$

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

Step ❶ 다항식 $P(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸다.

다항식 $P(x)$를 x^2-1로 나눈 몫이 $2x+1$이고 나머지는 5이므로

$P(x)=(x^2-1)(2x+1)+5$

Step ❷ 나머지정리를 이용한다.

나머지정리에 의하여 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $P(2)$이므로

$P(2)=(2^2-1)(2\times2+1)+5=3\times5+5=20$

B018 나머지정리를 이용한 나머지 구하기

정답 40

다항식 x^3+5x^2+4x+4를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오. [3점] 40 [정답률 80%]

❶ 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

Step ❶ 나머지정리를 이용하여 주어진 다항식을 $x-2$로 나눈 나머지를 구한다.

$f(x)=x^3+5x^2+4x+4$라 하면 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2)=2^3+5\times2^2+4\times2+4=40$

B019 조립제법을 이용한 나머지 구하기

정답 ④

다음은 조립제법을 이용하여 다항식 x^3-3x^2+5x-5를 $x-2$로 나누었을 때, 나머지를 구하는 과정을 나타낸 것이다. [정답률 89%]

❶ 조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & 1 & a & b & \boxed{c} \end{array}$$

위 과정에 들어갈 세 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값은? [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

Step ❶ 조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 $x-2$로 나눈 나머지를 구한다.

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ & & 2 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{1} \end{array}$$

따라서 $a=-1$, $b=3$, $c=1$이므로 $abc=-3$

B020 나머지정리를 이용한 나머지 구하기

정답 ①

다항식 $2x^3+6x^2+3$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는? [3점] [정답률 93%]

❶ 나머지정리를 이용하여 $x=-1$을 다항식에 대입한다.

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

Step ❶ 나머지정리를 이용하여 주어진 다항식을 $x+1$로 나눈 나머지를 구한다.

$f(x)=2x^3+6x^2+3$이라 하면

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이므로

$f(-1)=2\times(-1)^3+6\times(-1)^2+3=7$

B021 나머지정리를 이용한 미정계수 구하기

정답 ①

다항식 x^2+ax+4를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같을 때, 상수 a의 값은? [3점] [정답률 84%]

❶ $f(x)=x^2+ax+4$라 할 때 $f(1)=f(2)$임을 이용한다.

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

Step ❶ 나머지정리를 이용하여 주어진 다항식을 $x-1$과 $x-2$로 나눈 나머지를 구한다.

나머지정리에 의하여 $f(x)=x^2+ax+4$라 하면

$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=1^2+a+4=a+5$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2)=2^2+2a+4=2a+8$

이때 나머지가 서로 같으므로

$a+5=2a+8$

$a=-3$

B022 나머지정리를 이용한 미정계수 구하기

정답 14

다항식 $f(x)=x^2+ax+b$를 $x+1$로 나눈 나머지가 2이고, $x-1$로 나눈 나머지가 8일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점] 14 [정답률 74%]

❶ $f(-1)=2$, $f(1)=8$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

Step ❶ 나머지정리를 이용한다.

나머지정리에 의하여

$f(-1)=1-a+b=2$

$f(1)=1+a+b=8$

이므로 두 식을 정리하면

$$\begin{cases} -a+b=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+b=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=4$

따라서 $f(x)=x^2+3x+4$이므로

$f(2)=4+6+4=14$

B023 나머지정리를 이용한 나머지 구하기　　정답 40

다항식 $P(x)=x^3+x^2+x+1$을 $x-k$로 나눈 나머지와 $x+k$로 나눈 나머지의 합이 8이다. $P(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지를 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]　[정답률 52%]

❶ $P(k)+P(-k)=8$임을 이용한다.
❷ $P(k^2)$의 값을 구한다.

40

Step ❶ 나머지정리를 이용하여 $x-k$로 나눈 나머지와 $x+k$로 나눈 나머지를 구한다.

나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)$를 $x-k$로 나눈 나머지는

$P(k)=k^3+k^2+k+1$

다항식 $P(x)$를 $x+k$로 나눈 나머지는

$P(-k)=-k^3+k^2-k+1$

Step ❷ 두 나머지의 합이 8임을 이용하여 k^2의 값을 구한다.

나머지의 합이 8이므로

$$P(k)+P(-k)=k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)$$
$$=2k^2+2=8$$

따라서 $k^2=3$

Step ❸ 다항식 $P(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지를 구한다.

다항식 $P(x)$를 $x-k^2$으로 나눈 나머지는

$$P(k^2)=(k^2)^3+(k^2)^2+k^2+1$$
$$=3^3+3^2+3+1=40$$

B024 나머지정리를 이용한 나머지 구하기　　정답 11

다항식 $f(x)$를 x^2-7x로 나눈 나머지가 $x+4$일 때, 다항식 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]　[정답률 72%]

❶ 몫을 $Q(x)$로 놓고 $f(x)$에 대한 식을 세운다.
❷ 나머지정리를 이용한다.

11

Step ❶ 다항식 $f(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

다항식 $f(x)$를 x^2-7x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+4$이므로

$$f(x)=(x^2-7x)Q(x)+x+4$$
$$=x(x-7)Q(x)+x+4$$

Step ❷ 나머지정리를 이용한다.

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는 $f(7)$과 같다.

따라서 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는

$f(7)=11$

B025 인수정리를 이용한 미정계수 구하기　　정답 ④

x에 대한 다항식 $(kx^3+3)(kx^2-4)-kx$가 $x+1$로 나누어떨어지도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]　[정답률 75%]

❶ $P(x)=(kx^3+3)(kx^2-4)-kx$로 놓고 $P(-1)=0$임을 이용한다.

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

Step ❶ $P(x)=(kx^3+3)(kx^2-4)-kx$로 놓고 인수정리를 이용한다.

$P(x)=(kx^3+3)(kx^2-4)-kx$라 할 때, 다항식 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지려면 $P(-1)=0$이어야 한다.

$$P(-1)=(-k+3)(k-4)+k$$
$$=-k^2+7k-12+k$$
$$=-(k^2-8k+12)$$
$$=-(k-2)(k-6)=0$$

따라서 $k=2$ 또는 $k=6$이므로

모든 실수 k의 값의 합은 8이다.

B026 나머지정리를 이용한 나머지 구하기　　정답 52

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 8이고, $f(x)g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 6이다. $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [3점]　[정답률 70%]

❶ $f(3)+g(3)=8$, $f(3)g(3)=6$
❷ $\{f(3)\}^2+\{g(3)\}^2=\{f(3)+g(3)\}^2-2f(3)g(3)$

52

Step ❶ 나머지정리를 이용하여 식을 세운다.

나머지정리에 의하여

$f(3)+g(3)=8$, $f(3)g(3)=6$

Step ❷ 곱셈 공식을 이용하여 나머지를 구한다.

$$\{f(3)\}^2+\{g(3)\}^2=\{f(3)+g(3)\}^2-2f(3)g(3)$$
$$=8^2-2\times6$$
$$=52$$

B027 인수정리를 이용한 미정계수 구하기　　정답 9

다항식 $P(x)=x^3-x^2-kx-6$이 $x+2$로 나누어떨어지도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [3점]　[정답률 86%]

❶ $P(-2)=0$임을 이용한다.

9

Step ❶ 인수정리를 이용한다.

다항식 $P(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지려면

$P(-2)=(-2)^3-(-2)^2-k\times(-2)-6=0$

$2k-18=0$

따라서 $k=9$

B028 인수정리를 이용한 미정계수 구하기　　정답 ④

x에 대한 다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 x^2-1로 나누어떨어질 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]　[정답률 93%]

❶ 몫을 $Q(x)$로 놓고 주어진 다항식이 $x+1$과 $x-1$로 나누어떨어짐을 이용한다.

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

Step ❶ **주어진 다항식을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$로 놓고 식을 세운다.**

다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 x^2-1로 나누어떨어지므로

$2x^3+ax^2+bx+6=(x^2-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) …… ㉠

Step ❷ **주어진 다항식이 $x+1$과 $x-1$로 나누어떨어짐을 이용하여 식의 값을 구한다.**

$x^2-1=(x+1)(x-1)$이므로 ㉠의 양변에

(i) $x=-1$을 대입하면

$-2+a-b+6=0$이므로

$a-b=-4$ …… ㉡

(ii) $x=1$을 대입하면

$2+a+b+6=0$이므로

$a+b=-8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-2$

따라서 $ab=12$

다른 풀이

다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 x^2-1로 나누어떨어지므로

$2x^3+ax^2+bx+6$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^3+ax^2+bx+6=(x-1)(x+1)Q(x)$

조립제법을 이용하여 $2x^3+ax^2+bx+6$을 x^2-1로 나누면

1	2	a	b	6
		2	$a+2$	$a+b+2$
-1	2	$a+2$	$a+b+2$	$a+b+8$
		-2	$-a$	
	2	a	$b+2$	

$a+b+8=0$, $b+2=0$이므로 $a=-6$, $b=-2$

따라서 $ab=12$

해검단 TALK

다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 $x^2-1=(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지면

$2x^3+ax^2+bx+6$은 $x+1$과 $x-1$로 나누어떨어짐을 이용해!^^

실전 솔루션

'다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.'와 같은 표현을 기억해두자!

❶ $x-\alpha$가 다항식 $f(x)$의 인수이다.

❷ 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.

❸ $f(\alpha)=0$이다.

B029 조립제법을 이용하여 미지수 구하기 정답 40

x에 대한 다항식 x^4+ax+b가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, [정답률 43%]

❶ 조립제법을 이용하여 x^4+ax+b를 $x-2$로 두 번 나눈다.

몫을 $Q(x)$라 하자. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b+Q(2)$의 값을 구하시오.

40 [4점]

Step ❶ **조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구한다.**

조립제법을 이용하여 다항식 x^4+ax+b를 $x-2$로 나누고 그 몫을 다시 $x-2$로 나누면

2	1	0	0	a	b
		2	4	8	$2a+16$
2	1	2	4	$a+8$	$b+2a+16$
		2	8	24	
	1	4	12	$a+32$	

$b+2a+16=0$, $a+32=0$

즉 $a=-32$, $b=47$이고

$x^4+ax+b=(x-2)^2(x^2+4x+12)$

따라서 $Q(x)=x^2+4x+12$, $Q(2)=2^2+4\times2+12=24$이므로

$a+b+Q(2)=40$

B030 인수정리를 이용하여 다항식 추론하기 정답 146

두 자연수 a, b에 대하여 일차식 $x-a$를 인수로 갖는 다항식 [정답률 6%]

$P(x)=x^4-290x^2+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

❶ 인수정리에 의하여 $P(a)=0$이다.

> 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해된다.

모든 다항식 $P(x)$의 개수를 p라 하고, b의 최댓값을 q라 할 때,

$\dfrac{q}{(p-1)^2}$의 값을 구하시오. [4점] 146

Step ❶ **조립제법을 이용하여 x^4-290x^2+b를 $x-a$로 나눈 몫과 나머지를 구한다.**

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

a	1	0	-290	0	b
		a	a^2	a^3-290a	a^4-290a^2
	1	a	a^2-290	a^3-290a	$b+a^4-290a^2$

에서 몫은 $x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$이고 나머지는

$b+a^4-290a^2=0$이다. 따라서 $b=a^2(290-a^2)$이고 b가 자연수이므로 $290-a^2>0$에서 이를 만족하는 a의 값은

1, 2, 3, …, 17 → $17^2=289$, $18^2=324$이므로 $290-17^2>0$, $290-18^2<0$

Step ❷ **몫 $x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$에 $x=-a$를 대입하면 0이 됨을 이용한다.**

몫 $x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$가 $x+a$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$-a$	1	a	a^2-290	a^3-290a
		$-a$	0	$-a^3+290a$
	1	0	a^2-290	0

이고 다항식 $P(x)$는

$x^4-290x^2+b=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$

으로 인수분해된다.

조건에 의하여 x^2+a^2-290이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 제외한다.

$x^2+a^2-290=x^2-(290-a^2)$

이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290-a^2$이 제곱수인 경우이다.

$290=1^2+17^2=11^2+13^2$

이므로 $290-a^2$이 제곱수가 되는 자연수 a는 $a=1$, $a=11$, $a=13$, $a=17$인 경우이다.
그러므로 조건을 만족하는 자연수 a의 값의 개수는 $17-4=13$이므로 모든 다항식 $P(x)$의 개수는 13이다.
$b=a^2(290-a^2)=-(a^2-145)^2+145^2$이고 a가 자연수이므로 b의 최댓값은 $a=12$일 때
$12^2\times(290-12^2)$
따라서 $p=13$이고 $q=12^2\times(290-12^2)$이므로
$\dfrac{q}{(p-1)^2}=\dfrac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}=146$

다른 풀이

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로
$P(a)=a^4-290a^2+b=0$을 만족한다.
$b=-a^4+290a^2$, $b=a^2(290-a^2)$
에서 b가 자연수이므로 이를 만족하는 a의 값은
1, 2, 3, $\cdots$, 17
이고
$$P(x)=x^4-290x^2+b=x^4-290x^2+a^2(290-a^2)$$
$$=(x^2-a^2)(x^2-290+a^2)$$
이다.
$a=1$이면 $b=1^2\times(290-1^2)=289$
$P(x)=(x^2-1)(x^2-289)=(x+1)(x-1)(x+17)(x-17)$
으로 인수분해된다.
$a=2$이면 $b=2^2\times(290-2^2)=1144$
$P(x)=(x^2-2^2)(x^2-286)=(x+2)(x-2)(x^2-286)$
으로 인수분해된다.
$a=3$이면 $b=3^2\times(290-3^2)=2529$
$P(x)=(x^2-3^2)(x^2-281)=(x+3)(x-3)(x^2-281)$
으로 인수분해된다.
$a=4$이면 $b=4^2\times(290-4^2)=4384$
$P(x)=(x^2-4^2)(x^2-274)=(x+4)(x-4)(x^2-274)$
로 인수분해된다.
$a=5$이면 $b=5^2\times(290-5^2)=6625$
$P(x)=(x^2-5^2)(x^2-265)=(x+5)(x-5)(x^2-265)$
로 인수분해된다.
$a=6$이면 $b=6^2\times(290-6^2)=9144$
$P(x)=(x^2-6^2)(x^2-254)=(x+6)(x-6)(x^2-254)$
로 인수분해된다.
$a=7$이면 $b=7^2\times(290-7^2)=11809$
$P(x)=(x^2-7^2)(x^2-241)=(x+7)(x-7)(x^2-241)$
으로 인수분해된다.
$a=8$이면 $b=8^2\times(290-8^2)=14464$
$P(x)=(x^2-8^2)(x^2-226)=(x+8)(x-8)(x^2-226)$
으로 인수분해된다.
$a=9$이면 $b=9^2\times(290-9^2)=16929$
$P(x)=(x^2-9^2)(x^2-209)=(x+9)(x-9)(x^2-209)$
로 인수분해된다.
$a=10$이면 $b=10^2\times(290-10^2)=19000$
$P(x)=(x^2-10^2)(x^2-190)=(x+10)(x-10)(x^2-190)$
으로 인수분해된다.
$a=11$이면 $b=11^2\times(290-11^2)=20449$
$$P(x)=(x^2-11^2)(x^2-169)$$
$$=(x+11)(x-11)(x+13)(x-13)$$
으로 인수분해된다.
$a=12$이면 $b=12^2\times(290-12^2)=21024$
$P(x)=(x^2-12^2)(x^2-146)=(x+12)(x-12)(x^2-146)$
으로 인수분해된다.
$a=13$이면 $b=13^2\times(290-13^2)=20449$
$$P(x)=(x^2-13^2)(x^2-121)$$
$$=(x+13)(x-13)(x+11)(x-11)$$
으로 인수분해된다.
$a=14$이면 $b=14^2\times(290-14^2)=18424$
$P(x)=(x^2-14^2)(x^2-94)=(x+14)(x-14)(x^2-94)$
로 인수분해된다.
$a=15$이면 $b=15^2\times(290-15^2)=14625$
$P(x)=(x^2-15^2)(x^2-65)=(x+15)(x-15)(x^2-65)$
로 인수분해된다.
$a=16$이면 $b=16^2\times(290-16^2)=8704$
$P(x)=(x^2-16^2)(x^2-34)=(x+16)(x-16)(x^2-34)$
로 인수분해된다.
$a=17$이면 $b=17^2\times(290-17^2)=289$
$P(x)=(x^2-17^2)(x^2-1)=(x+17)(x-17)(x+1)(x-1)$
으로 인수분해된다.
계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식으로 인수분해되는 경우는 a가 1, 11, 13, 17일 때를 제외한 13가지이므로 모든 다항식 $P(x)$의 개수 $p=13$이고 $a=12$일 때, b의 최댓값 $q=12^2\times(290-12^2)$이다.
따라서 $\dfrac{q}{(p-1)^2}=\dfrac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}=146$이다.

B031 나머지정리를 이용한 식의 값 구하기 정답 ④

최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 [정답률 52%]
$(x-1)f(x)=(x-2)g(x)$가 항상 성립한다. $f(1)=-2$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]
❶ $F(x)=(x-1)f(x)=(x-2)g(x)$라 하면 $F(x)$는 $(x-1)$, $(x-2)$를 인수로 갖는다.

① -3 ② -1 ③ 1 ❹ 3 ⑤ 5

Step ❶ 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 관한 등식을 $F(x)$라 놓는다.
$f(x)$와 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로
$F(x)=(x-1)f(x)=(x-2)g(x)$라 하면 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이다.
$F(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$라 하면
$F(x)=(x-1)f(x)$이므로

Step ❷ $g(x)$를 구하고 $g(2)$의 값을 구한다.
$f(x)=(x-2)(x+a)$

$f(1)=-2$이므로

$(1-2)(1+a)=-2$, $a=1$

$F(x)=(x-2)g(x)$이므로 $g(x)=(x-1)(x+1)$

따라서 $g(2)=(2-1)(2+1)=3$

B032 나머지정리를 이용한 식의 값 구하기

정답 ③

최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때 의 몫을 $Q_1(x)$라 하고, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 [정답률 41%]

❶ $f(x)$를 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$를 이용한 식으로 나타낸다.

$Q_1(x)$, $Q_2(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Q_2(1)=f(2)$
(나) $Q_1(1)+Q_2(1)=6$

❷ 조건을 만족시킬 때 미지수의 값을 구한다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

Step ❶ $f(x)$를 $x-1$과 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 식을 세운다.

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 R_1이라 하면

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 R_2라 하면

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+R_2$ …… ㉡

Step ❷ 주어진 조건을 이용하여 이차식 $f(x)$를 구한다.

㉡에 $x=2$를 대입하면 (가)에서

$R_2=f(2)=Q_2(1)$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+Q_2(1)$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-Q_2(1)+Q_2(1)=0$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=R_1=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $Q_1(x)=x+a$라 하면

$f(x)=(x-1)(x+a)$

$Q_1(1)=1+a$, $f(2)=2+a=Q_2(1)$이므로 (나)에서

$Q_1(1)+Q_2(1)=(1+a)+(2+a)=2a+3=6$

그러므로 $a=\frac{3}{2}$, $f(x)=(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

Step ❸ $f(3)$의 값을 구한다.

따라서 $f(3)=(3-1)\left(3+\frac{3}{2}\right)=9$

B033 나머지정리를 이용한 미지수 구하기

정답 ④

모든 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 44%]

(가) $f(x)<0$
(나) $\{f(x+1)\}^2-9=(x-1)(x+1)(x^2+5)$

❶ 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

다항식 $f(x+a)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -6이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [4점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

Step ❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

조건 (나)에서

$\{f(x+1)\}^2=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$이므로

$\{f(x)\}^2=x(x-2)(x^2-2x+6)+9$

$=(x^2-2x)(x^2-2x+6)+9$ → $x^2-2x=A$로 치환하면 $A(A+6)+9=A^2+6A+9=(A+3)^2$

$=(x^2-2x+3)^2$

또 조건 (가)에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)=-x^2+2x-3$

Step ❷ ❶에서 구한 $f(x)$를 이용하여 $f(x+a)$의 식을 세우고 미지수를 구한다.

$f(x+a)=-(x+a)^2+2(x+a)-3$에 대하여

$f(x+a)=g(x)$라 하면 $g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -6이 되기 위해서는

$g(2)=-(2+a)^2+2(2+a)-3=-6$

따라서 $a^2+2a-3=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은 -3이다.

B034 나머지정리를 이용하여 추론하기

정답 ③

최고차항의 계수가 양수인 다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^3=4x^2f(x)+8x^2+6x+1$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] [정답률 49%]

<보기>

ㄱ. 다항식 $f(x)$를 x로 나눈 나머지는 1이다.
ㄴ. 다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.
ㄷ. 다항식 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x+13$이다.

❶ <보기>를 식에 대입하여 보고 참, 거짓을 판별한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 주어진 <보기>를 식에 대입하여 보고 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\{f(0)\}^3=1$이므로 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로 $n=1$

$f(x)=ax+b$라 하면 좌변의 최고차항의 계수는 a^3, 우변의 최고차항의 계수는 $4a$이므로 $a^3=4a$

$a>0$이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2 (거짓)

Step ❷ ㄱ, ㄴ에서 구한 식 $f(x)$를 이용하여 보기 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의하여 $f(x)=2x+1$이므로 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$라 하면

$\{f(x)\}^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$이므로

$\{f(1)\}^3=c+d=27$

$\{f(-1)\}^3=-c+d=-1$

이를 연립하여 풀면 $c=14$, $d=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x+13$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

B035 나머지정리를 이용하여 식의 값 구하기 정답 46

x에 대한 삼차다항식 $P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$에 [정답률 52%]
대하여 $P(x+1)$을 x^2-4로 나눈 나머지가 -3일 때, $50a+b$의 값을 구하
❶ $P(x+1)$의 식을 구한 후 나머지정리를 이용한다.
시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점] 46

Step ❶ 다항식 $P(x)$를 이용하여 $P(x+1)$의 식을 세우고 나머지정리를 이용한다.

$P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$ ⋯⋯ ㉠

$P(x+1)$을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x+1)=(x^2-4)Q(x)-3$

$\quad=(x-2)(x+2)Q(x)-3$ ⋯⋯ ㉡

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$P(3)=-3$

$x=-2$를 ㉡에 대입하면

$P(-1)=-3$

이 된다.

㉠에 $x=3$, $x=-1$을 대입하여 정리하면

$3a+b=-1$, $-a+b=-5$이므로

$a=1$, $b=-4$

따라서 $50a+b=50-4=46$

B036 항등식의 정의를 이해하여 나머지 구하기 정답 ⑤

세 다항식 $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2x-1$, $h(x)$에 대하여 [정답률 58%]

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3=(2x^2-x-1)h(x)$

❶ 인수분해 공식을 이용하여 좌변을 인수분해한다.

가 x에 대한 항등식일 때, $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는? [4점]

❷ $h(1)$의 값을 구한다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

Step ❶ 인수분해 공식을 이용하여 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$의 식을 변형한다.

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

$=(2x^2-x-1)h(x)$

Step ❷ $f(x)+g(x)$의 식을 구한다.

$f(x)+g(x)=(x^2+x)+(x^2-2x-1)$

$\quad=2x^2-x-1$

Step ❸ 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

따라서 $h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$

이때 $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $h(1)$이다.

$f(1)=2$, $g(1)=-2$이므로

$h(1)=2^2-2\times(-2)+(-2)^2=12$

B037 나머지정리와 인수정리를 이용하여 식의 값 구하기 정답 45

다항식 $f(x)=x^3-x^2+ax+b$를 다항식 x^2-2x-2로 [정답률 26%]
나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하자.
$R(2)=9$이고 $f(x)$는 $Q(x)$로 나누어떨어질 때, $f(4)$의 값을 구하시오.
❶ 나머지정리와 인수정리를 이용하여 $f(x)$를 구한다.
(단, a, b는 상수이다.) [4점] 45

Step ❶ $f(x)$를 x^2-2x-2로 나누어 $Q(x)$, $R(x)$의 식을 구한다.

$f(x)=x^3-x^2+ax+b$를 x^2-2x-2로 나누면

$$\begin{array}{rl}
 & x+1 \\
x^2-2x-2\,\big) & x^3-x^2+ax+b \\
 & x^3-2x^2-2x \\ \hline
 & \phantom{x^3-{}}x^2+(a+2)x+b \\
 & \phantom{x^3-{}}x^2-2x-2 \\ \hline
 & \phantom{x^3-x^2+{}}(a+4)x+(b+2)
\end{array}$$

이므로

$Q(x)=x+1$, $R(x)=(a+4)x+b+2$

Step ❷ 나머지정리와 인수정리를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$R(2)=2(a+4)+b+2=9$이므로

$2a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1-1-a+b=0$

$a-b=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=-1$, $b=1$이므로

$f(x)=x^3-x^2-x+1$

Step ❸ ❷에서 구한 $f(x)$의 식을 이용하여 $f(4)$의 값을 구한다.

따라서

$f(4)=4^3-4^2-4+1$

$\quad=64-16-4+1=45$

다른 풀이

$f(x)=x^3-x^2+ax+b$를 x^2-2x-2로 나누었을 때의 몫이

$Q(x)=x+1$이므로 $R(x)$가 $x+1$로 나누어떨어진다.

$R(x)=k(x+1)$ (단, k는 상수)

$R(2)=9$에서 $k=3$

$R(x)=3(x+1)$

다항식 x^2-2x-2를 $g(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서

$f(4)=g(4)Q(4)+R(4)$

$\quad=(4^2-2\times4-2)\times(4+1)+3\times(4+1)$

$\quad=6\times5+3\times5$

$\quad=45$

B038 나머지정리를 이용한 문제해결하기 정답 25

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5이고, [정답률 62%]
❶ $f(x)=(x-1)Q(x)+5$ …… ㉠
$Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 10이다.
❷ $Q(x)=(x-2)Q_1(x)+10$ …… ㉡
$f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지를 $ax+b$라 할 때, 두 상수 a, b에 대
❸ ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하고 나머지를 구한다.
하여 $3a+b$의 값을 구하시오. [4점] 25

Step ❶ $f(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+5$ …… ㉠

Step ❷ $Q(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

다항식 $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 10이므로

$Q(x)=(x-2)Q_1(x)+10$ …… ㉡

Step ❸ ㉡을 ㉠에 대입하여 나머지를 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)=(x-1)\{(x-2)Q_1(x)+10\}+5$
$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+10(x-1)+5$
$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+10x-5$

이므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $10x-5$이다.

따라서 $a=10$, $b=-5$이므로

$3a+b=25$

B039 나머지정리를 이용하여 추론하기 정답 ③

이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 [정답률 42%]
❶ $f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.
$R(x)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b는 서로 다른 두 실수이다.) [4점]

〈보기〉
ㄱ. $f(a)-R(a)=0$
ㄴ. $f(a)-R(b)=f(b)-R(a)$
ㄷ. $af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$

❷ $f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$가 항등식임을 이용하여 참과 거짓을 판별한다.

① ㄱ ② ㄴ ❸ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 다항식 $f(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ …… ㉠

Step ❷ ㉠이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

ㄱ. ㉠은 x에 대한 항등식이므로 $x=a$를 ㉠에 대입하면
$f(a)=R(a)$, 즉 $f(a)-R(a)=0$ (참)

Step ❸ $f(a)=R(a)$, $f(b)=R(b)$임을 이용한다.

ㄴ. $f(x)=(x-a)(x-b)+x$라 하면
$R(x)=x$이고
$f(a)-R(b)=a-b$, $f(b)-R(a)=b-a$
이때 $a\neq b$이므로
$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$ (거짓)

Step ❹ $R(x)=px+q$로 놓고 $f(a)$와 $f(b)$를 이용한다.

ㄷ. $R(x)=px+q$라 하면
$f(a)=pa+q$, $f(b)=pb+q$에서
$af(b)-bf(a)=abp+aq-abp-bq=(a-b)q$
$R(0)=q$이므로
$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

B040 항등식의 성질과 나머지정리를 이용하여 문제해결하기 정답 26

삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 13%]

(가) $f(1)=2$
(나) $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫과 나머지가 같다.

❶ 조건 (나)에서 $f(x)=(x-1)^2(ax+b)+(ax+b)$로 놓고 $f(1)=2$임을 이용한다.
$f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $R(0)=R(3)$일 때,
$R(5)$의 값을 구하시오. [4점] 26
❷ ❶의 식을 이용하여 $R(x)$를 구한다.

Step ❶ 두 조건을 이용하여 $f(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

조건 (나)에 의하여 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b$ …… ㉠

$f(1)=2$이므로 $a+b=2$에서 $b=2-a$

따라서 $ax+b=a(x-1)+2$

이 식을 ㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$
$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$

Step ❷ $R(x)$를 구하고 $R(0)=R(3)$임을 이용한다.

그러므로 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지는

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$

$R(0)=R(3)$이므로

$2-a+2=8+2a+2$, $a=-2$

따라서 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=26$

B041 나머지정리를 이용한 문제해결하기 정답 ①

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지는 3 [정답률 79%]
❶ $P(x)=(x-2)Q(x)+3$ …… ㉠
이고, 다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.
❷ $Q(x)=(x-1)Q_1(x)+2$ …… ㉡
$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하자.
❸ ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하고 나머지를 구한다.
$R(3)$의 값은? [4점]

❶ 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

Step ❶ $P(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 3이므로

$P(x)=(x-2)Q(x)+3$ ⋯⋯ ㉠

Step ❷ $Q(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 2이므로

$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+2$ ⋯⋯ ㉡

Step ❸ ㉡을 ㉠에 대입하여 나머지를 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-2)\{(x-1)Q_1(x)+2\}+3\\&=(x-2)(x-1)Q_1(x)+2(x-2)+3\\&=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x-1\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=2x-1$이므로

$R(3)=5$

다른 풀이

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 3이므로 $P(x)=(x-2)Q(x)+3$ ⋯⋯ ㉠

따라서 $P(2)=3$

다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 2이므로 $Q(x)=(x-1)Q_1(x)+2$

따라서 $Q(1)=2$

㉠에서 $P(1)=(1-2)Q(1)+3=1$

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+ax+b$이므로

$P(2)=2a+b=3$ ⋯⋯ ㉡

$P(1)=a+b=1$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

따라서 $R(x)=2x-1$이므로 $R(3)=5$

B042 나머지정리를 이용한 문제해결하기 정답 ①

삼차다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 35%]

(가) $(x-1)P(x-2)=(x-7)P(x)$
❶ $P(1)=0$, $P(5)=0$임을 안다.

(나) $P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 나머지는 $2x-10$이다.
❷ 몫을 $ax+b$로 놓고 식을 세운다.

$P(4)$의 값은? [4점]
❸ 나머지정리를 이용한다.

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

Step ❶ 조건 (가)를 이용하여 $P(1)$과 $P(5)$의 값을 구한다.

조건 (가)의 식에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=0$이고, $x=7$을 대입하면 $P(5)=0$이다.

Step ❷ 조건 (나)를 이용하여 $P(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

$P(x)$는 삼차다항식이므로 $P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-4x+2)(ax+b)+2x-10$

Step ❸ 나머지정리를 이용하여 $P(4)$의 값을 구한다.

$P(1)=0$이므로 $-a-b-8=0$

$a+b=-8$ ⋯⋯ ㉠

$P(5)=0$이므로 $35a+7b=0$

$5a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-10$

따라서 $P(x)=(x^2-4x+2)(2x-10)+2x-10$이므로

$P(4)=-6$

다른 풀이 1

조건 (가)의 식에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=0$이고, $x=7$을 대입하면 $P(5)=0$이므로 상수 a, k에 대하여

$P(x)=a(x-1)(x-5)(x-k)(a\neq0)$로 놓을 수 있다.

위 식을 조건 (가)에 대입하면

$a(x-1)(x-3)(x-7)(x-k-2)$

$=a(x-7)(x-1)(x-5)(x-k)$

이므로

$(x-3)(x-k-2)=(x-5)(x-k)$

에서 $k=3$

따라서 $P(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)$

조건 (나)에 의하여 $P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$a(x-1)(x-3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$

즉 $a(x^2-4x+3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-4x+2=0$의 해를 α라 하면 $\alpha^2-4\alpha+2=0$이므로 식 ㉠에 $x=\alpha$를 대입하면

$a(\alpha-5)=2\alpha-10$에서 $a=2$

따라서 $P(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$이므로 $P(4)=-6$이다.

다른 풀이 2

조건 (나)에 의하여 $P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$($Q(x)$는 일차식)으로 놓을 수 있다. 조건 (가)에 위의 식을 대입하면 좌변은

$(x-1)P(x-2)$

$=(x-1)[\{(x-2)^2-4(x-2)+2\}Q(x-2)+2(x-2)-10]$

$=(x-1)\{(x^2-8x+14)Q(x-2)+2(x-7)\}$

우변은

$(x-7)P(x)$

$=(x-7)\{(x^2-4x+2)Q(x)+2(x-5)\}$

좌변과 우변을 비교하면 $(x^2-8x+14)Q(x-2)$가 $x-7$을 인수로 가져야 한다. 즉 $Q(x-2)$는 $x-7$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $Q(x-2)=a(x-7)$이므로 $Q(x)=a(x-5)$이다.

또한 $a(x^2-4x+2)(x-5)+2(x-5)$가 $x-1$을 인수로 가지므로 $x=1$을 대입하면

$a(1-4+2)\times(-4)+(-8)=0$, $a=2$

$P(x)=2(x^2-4x+2)(x-5)+2(x-5)$이므로 $P(4)=-6$

B043 나머지정리를 이용한 문제해결하기

정답 ④

다항식 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점] [정답률 37%]

(가) $f(x)$를 x^3+1로 나눈 몫은 $x+2$이다.
(나) $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 $x-6$이다.
(다) $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 -2이다.
❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(x)$를 나타내고 조건 (다)를 이용한다.

① -10 ② -9 ③ -8 ❹ -7 ⑤ -6

Step ❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(x)$를 나타낸다.

$f(x)$를 x^3+1로 나눈 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면 조건 (가), (나)에서

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+1)(x+2)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x^2-x+1)(x+2)+ax^2+bx+c \\ &= (x^2-x+1)(x^2+3x+2)+a(x^2-x+1)+x-6 \end{aligned}$$

Step ❷ 조건 (다)를 이용하여 $f(0)$의 값을 구한다.

조건 (다)에서 $f(1)=-2$이므로

$6+a-5=-2$, $a=-3$

따라서 $f(0)=2-3-6=-7$

B044 나머지정리를 이용한 추론하기

정답 ③

다음은 n차 다항식 $P(x)$가 [정답률 53%]

$$P(k)=\frac{k}{k+1} \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

를 만족시킬 때, $P(n+1)$의 값을 구하는 과정이다.

n차 다항식 $P(x)$는 $(k+1)P(k)-k=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 만족시킨다.

$Q(x)=(x+1)P(x)-x$

라 두면 $Q(x)$는 $n+1$차 다항식이고

$Q(0)=Q(1)=Q(2)=\cdots=Q(n)=0$

이므로 0이 아닌 상수 a에 대하여

$Q(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$

으로 나타낼 수 있다. 따라서

$(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ ······ ㉠

이다. ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\boxed{(가)}}$ ❶ ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하여 (가)를 구한다.

이고, ㉠의 양변에 $x=n+1$을 대입하여 정리하면

$(n+2)P(n+1)-(n+1)=\boxed{(나)}$
❷ ㉠의 양변에 $x=n+1$을 대입하여 (나)를 구한다.

이므로

$P(n+1)=\dfrac{\boxed{(나)}+n+1}{n+2}$

이다. 따라서

n이 홀수이면 $P(n+1)=1$이고,

n이 짝수이면 $P(n+1)=\boxed{(다)}$이다.
❸ (다)를 구하고 주어진 식의 값을 구한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)\times g(5)}{h(6)}$의 값은? [4점]

① 150 ② 155 ❸ 160 ④ 165 ⑤ 170

Step ❶ ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하여 (가)를 구한다.

n차 다항식 $P(x)$는

$(k+1)P(k)-k=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

을 만족시킨다.

$Q(x)=(x+1)P(x)-x$

라 두면 $Q(x)$는 $n+1$차 다항식이고

$Q(0)=Q(1)=Q(2)=\cdots=Q(n)=0$

이므로 0이 아닌 상수 a에 대하여

$Q(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$

으로 나타낼 수 있다. 따라서

$(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ ······ ㉠

이다. ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$a=\frac{(-1)^{n+1}}{\boxed{(n+1)\times n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1}}$$

Step ❷ ㉠의 양변에 $x=n+1$을 대입하여 (나)를 구한다.

이고, ㉠의 양변에 $x=n+1$을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} (n+2)P(n+1)-(n+1) &= a(n+1)\times n\times(n-1)\times\cdots\times1 \\ &= \boxed{(-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

이므로

$$P(n+1)=\frac{\boxed{(-1)^{n+1}}+n+1}{n+2}$$

이다.

Step ❸ (다)를 구하고 주어진 식의 값을 구한다.

따라서 n이 홀수이면 $P(n+1)=1$이고,

n이 짝수이면 $P(n+1)=\boxed{\dfrac{n}{n+2}}$이다.

따라서 $f(n)=1\times2\times3\times\cdots\times(n+1)$, $g(n)=(-1)^{n+1}$,

$h(n)=\dfrac{n}{n+2}$이므로

$f(4)=1\times2\times3\times4\times5=120$, $g(5)=(-1)^6=1$, $h(6)=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\dfrac{f(4)\times g(5)}{h(6)}=160$

B045 항등식을 이용한 추론하기

정답 ②

다음은 계수가 실수인 다항식 $P(x)$에 대하여 방정식 [정답률 53%]
$x^3+2x-1=0$의 서로 다른 세 근이 모두 방정식 $(x^2+x+1)P(x)=1$의 근이 되도록 하는, 차수가 최소인 다항식 $P(x)$를 구하는 과정이다.

> $x^3+2x-1=0$의 서로 다른 세 근이 모두 방정식 $(x^2+x+1)P(x)=1$의 근이므로
>
> $(x^2+x+1)P(x)-1=(x^3+2x-1)Q(x)$
>
> 인 다항식 $Q(x)$가 존재한다.
>
> 즉, $(x^2+x+1)P(x)=(x^3+2x-1)Q(x)+1$이다.
>
> 그런데 x^3+2x-1을 x^2+x+1로 나눈 몫과 나머지는
>
> 각각 $x-1$, (가) 이므로
>
> ❶ 나머지를 구해 (가)를 구한다.
>
> $(x^2+x+1)P(x)$
>
> $=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+$ (가) $Q(x)+1$ …… ㉠
>
> 이다. 등식 ㉠을 만족하는 다항식 $P(x)$의 차수가 최소가 되기 위해서는 $Q(x)$가 다항식이므로
>
> (가) $Q(x)+1=x^2+x+1$
>
> 이어야 한다. 따라서 $Q(x)=$ (나) 이다.
>
> 그러므로 구하고자 하는 다항식 $P(x)=$ (다) 이다.
>
> ❷ 등식을 이용하여 차수가 최소가 되는 $P(x)$를 구하여 (나), (다)를 구한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$라 할 때, $f(1)+g(3)+h(5)$의 값은? [4점]
❸ 식의 값을 구한다.

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

Step ❶ 나머지를 직접 구해 (가)를 구한다.

$x^3+2x-1=0$의 서로 다른 세 근이 모두 방정식
$(x^2+x+1)P(x)=1$의 근이므로
$(x^2+x+1)P(x)-1=(x^3+2x-1)Q(x)$
인 다항식 $Q(x)$가 존재한다.
즉, $(x^2+x+1)P(x)=(x^3+2x-1)Q(x)+1$이다.
그런데 x^3+2x-1을 x^2+x+1로 나눈 몫과 나머지는 각각
$x-1$, $\boxed{2x}$이므로
$(x^2+x+1)P(x)$
$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+\boxed{2x}Q(x)+1$ …… ㉠
이다.

Step ❷ 등식 ㉠을 이용하여 차수가 최소가 되는 $P(x)$를 구하여 (나), (다)를 구한다.

등식 ㉠을 만족하는 다항식 $P(x)$의 차수가 최소가 되기 위해서는 $Q(x)$가 다항식이므로
$\boxed{2x}Q(x)+1=x^2+x+1$
이어야 한다. 따라서 $Q(x)=\boxed{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$이다.
이때

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)P(x)&=(x-1)(x^2+x+1)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)+(x^2+x+1)\\&=\left\{(x-1)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)+1\right\}(x^2+x+1)\\&=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

이다.
그러므로 구하고자 하는 다항식 $P(x)=\boxed{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$이다.

Step ❸ $f(1)+g(3)+h(5)$의 값을 구한다.

$f(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로
$f(1)+g(3)+h(5)=2+2+13=17$

B046 항등식의 성질을 이용한 문제해결하기

정답 54

삼차다항식 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$가 있다. 0이 아닌 모든 [정답률 21%]
실수 x에 대하여 $f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=x^3-2+\frac{1}{x^3}$이 성립할 때,
❶ $f(x)$를 이용하여 $f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)$의 식을 변형하고 계수를 비교한다.
$pq+r$의 값을 구하시오. (단, p, q, r는 상수이다.) [4점]

54

Step ❶ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)$의 식을 변형한다.

$$\begin{aligned}f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)&=x^3-2+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\\&=\left\{\left(x-2+\frac{1}{x}\right)+2\right\}^3-3\left\{\left(x-2+\frac{1}{x}\right)+2\right\}-2\end{aligned}$$

Step ❷ 전개한 식을 이용하여 $f(x)$를 나타내고 식의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=(x+2)^3-3(x+2)-2=x^3+6x^2+9x$
따라서 $p=6$, $q=9$, $r=0$이므로
$pq+r=6\times9+0=54$

다른 풀이

$f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=x^3-2+\frac{1}{x^3}$이 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$x=1$을 대입하면 $f(0)=0$, $x=2$를 대입하면 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{49}{8}$

$x=-1$을 대입하면 $f(-4)=-4$
이때 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$에서 $f(0)=r=0$
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}q=\frac{49}{8}$에서 $p+2q=24$ …… ㉠
$f(-4)=-64+16p-4q=-4$에서 $4p-q=15$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=6$, $q=9$
따라서 $pq+r=6\times9+0=54$

B047 나머지정리를 이용한 문제해결하기

정답 ②

삼차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 55%]

> (가) $f(0)=3$
> (나) $f(x+1)=f(x)+x^2$
>
> ❷ 조건 (가), (나)를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지는? [4점]
❶ 나머지를 $ax+b$로 놓고 $f(x)$를 몫과 나머지가 있는 식으로 나타낸다.

① $x+3$ ② $x+2$ ③ $x+1$ ④ x ⑤ $x-1$

Step ① $f(x)$를 몫과 나머지가 있는 다항식으로 나타낸다.

삼차식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

Step ② 조건 (가), (나)를 이용하여 나머지를 구한다.

한편 $f(x+1)=f(x)+x^2$이므로

(i) $x=0$을 대입하면

$f(1)=f(0)+0=3$ (조건 (가)에서 $f(0)=3$)

(ii) $x=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+1=4$

(i), (ii)의 결과를 ㉠에 각각 대입하면

$f(1)=a+b=3$ …… ㉡

$f(2)=2a+b=4$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

따라서 삼차식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지는 $x+2$이다.

B048 항등식의 성질을 이용하여 추론하기 정답 999

3 이하의 자연수 n에 대하여 A_n을 다음과 같이 정한다. [정답률 21%]

(가) $A_1=9+99+999$
(나) $A_n=$(세 수 9, 99, 999에서 서로 다른 $n(n\geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

① A_2, A_3을 식으로 나타낸다.

이때, $A_1+A_2+A_3$의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하시오. [4점] 999

Step ① A_1, A_2, A_3을 각각 구한다.

$A_1=9+99+999$,

$A_2=9\times 99+99\times 999+999\times 9$,

$A_3=9\times 99\times 999$

이므로

Step ② $A_1+A_2+A_3$의 값을 구하고 1000으로 나눈 나머지를 구한다.

$(x+9)(x+99)(x+999)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$10\times 100\times 1000=1+A_1+A_2+A_3$에서

$A_1+A_2+A_3=999999$

따라서 $A_1+A_2+A_3$의 값을 1000으로 나눈 나머지는 999이다.

해검단 TALK

A_1, A_2, A_3을 각각 구할 수도 있지만 곱셈 공식을 이용하면 훨씬 간편해!

$(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

B049 나머지정리를 이용하여 나머지 구하기 정답 70

다항식 $f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나누었을 때의 나머지가 [정답률 29%]

① 나머지정리를 이용하여 $R(x)$를 구한다.

$2x+1$이고, $(x^2+1)f(x+3)$을 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)$일 때, $R(1)$의 값을 구하시오. [4점] 70

Step ① 다항식 $f(x)$와 $(x^2+1)f(x+3)$을 몫과 나머지를 포함한 식으로 나타낸다.

다항식 $f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나누었을 때의 몫을 $P(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-8x+12)P(x)+2x+1$

$\quad=(x-2)(x-6)P(x)+2x+1$ …… ㉠

$(x^2+1)f(x+3)$을 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$(x^2+1)f(x+3)=(x^2-2x-3)Q(x)+R(x)$

$\quad=(x-3)(x+1)Q(x)+ax+b$ …… ㉡

㉠에서 $f(2)=5$, $f(6)=13$

㉡에 $x=-1$을 대입하면 $2f(2)=-a+b=10$ …… ㉢

㉡에 $x=3$을 대입하면 $10f(6)=3a+b=130$ …… ㉣

㉢과 ㉣을 연립하여 풀면 $a=30$, $b=40$

Step ② 나머지정리를 이용하여 $R(x)$를 구한다.

따라서 $R(x)=30x+40$이므로

$R(1)=70$

C 인수분해

문제편 pp.35~41

필수 기출

001 ④	002 ②	003 ①	004 ②	005 ②	006 ①
007 ⑤	008 ①	009 ③	010 ④	011 5	012 ①
013 ③	014 ⑤	015 ②	016 ⑤		

플러스 기출

017 ⑤	018 24	019 20	020 ②	021 228	022 15

C001 인수분해를 이용한 미정계수 구하기 정답 ④

다항식 x^3-8이 $(x-a)(x^2+bx+4)$로 인수분해될 때, [정답률 90%]
❶ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$임을 이용한다.
두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 인수분해 공식을 이용하여 식을 인수분해하고 미지수를 구한다.

$x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$이므로

$a=2$, $b=2$

따라서 $a+b=4$

C002 인수분해를 이용한 미지수 구하기 정답 ②

다항식 x^3-8y^3이 $(x-ay)(x^2+2xy+4y^2)$으로 인수분해 [정답률 96%]
❶ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$임을 이용한다.
될 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 인수분해하여 a의 값을 구한다.

$x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

따라서 $a=2$

C003 인수분해 이해하기 정답 ①

x에 대한 다항식 $x(x+2)+a$가 이차식 $(x+b)^2$으로 인수분 [정답률 86%]
❶ $x(x+2)+a=(x+b)^2$
해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 주어진 두 이차식을 전개하여 계수를 비교한다.

$x(x+2)+a=x^2+2x+a$,

$(x+b)^2=x^2+2bx+b^2$

이므로 $x^2+2x+a=x^2+2bx+b^2$에서

$2=2b$, $a=b^2$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $ab=1$

C004 인수분해를 이용한 미정계수 구하기 정답 ②

1이 아닌 두 자연수 a, $b(a<b)$에 대하여 [정답률 79%]

$11^4-6^4=a\times b\times 157$
❶ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$임을 이용한다.

로 나타낼 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

Step ❶ 인수분해 공식을 이용하여 식을 인수분해하고 미지수를 구한다.

$$11^4-6^4=(11^2-6^2)(11^2+6^2)$$
$$=(11-6)(11+6)\times 157$$
$$=5\times 17\times 157$$

이므로 $a=5$, $b=17$

따라서 $a+b=5+17=22$

C005 인수분해를 이용한 식의 값 구하기 정답 ②

$\dfrac{2016^3+1}{2016^2-2016+1}$의 값은? [3점] [정답률 88%]
❶ $2016=x$로 놓고 인수분해한다.

① 2016 ② 2017 ③ 2018 ④ 2019 ⑤ 2020

Step ❶ 2016을 x로 놓고 인수분해하여 약분한다.

$2016=x$로 놓으면

$$\frac{2016^3+1}{2016^2-2016+1}=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2017$$

C006 인수분해를 이용한 식의 값 구하기 정답 ①

2018^3-27을 $2018\times 2021+9$로 나눈 몫은? [4점] [정답률 78%]
❶ 2018^3-3^3

① 2015 ② 2025 ③ 2035 ④ 2045 ⑤ 2055

Step ❶ 2018^3-27에서 $a=2018$, $b=3$으로 놓고 인수분해한다.

2018^3-27을 $2018\times 2021+9$로 나눈 몫은

$$\frac{2018^3-27}{2018\times 2021+9} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에서 $a=2018$, $b=3$이라 하면

$$\frac{a^3-b^3}{a\times(a+b)+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}$$
$$=a-b$$
$$=2018-3=2015$$

따라서 몫은 2015이다.

C007 인수분해를 이용한 미정계수 구하기 정답 ⑤

다항식 x^3+x^2-2가 $(x-1)(x^2+ax+b)$로 인수분해될 때, [정답률 90%]
❶ 다항식을 조립제법을 이용하여 인수분해한다.
두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

Step ❶ 조립제법을 이용하여 식을 인수분해하고 미지수를 구한다.

다항식 x^3+x^2-2를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	1	0	-2
		1	2	2
	1	2	2	0

$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$이므로

$a=2$, $b=2$

따라서 $a+b=4$

C008 인수분해를 이용한 미정계수 구하기 정답 ①

다항식 x^4+7x^2+16이 [정답률 80%]
❶ 주어진 식을 a^2-b^2의 꼴로 변형시킨다.
$(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)$
로 인수분해될 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 식을 변형하고 합차공식을 이용하여 인수분해한다.

다항식 x^4+7x^2+16을 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^4+7x^2+16&=(x^4+8x^2+16)-x^2\\ &=(x^2+4)^2-x^2\\ &=(x^2+x+4)(x^2-x+4) \end{aligned}$$

이므로 $a=1$, $b=4$

따라서 $a+b=5$

실전솔루션

x^4+ax^2+b(복이차식) 꼴의 인수분해

[방법 ❶] $x^2=X$로 치환하여 이차식 X^2+aX+b를 인수분해한다.

[방법 ❷] [방법 ❶]이 안 되는 경우
x^4+ax^2+b의 이차항 ax^2을 적당히 분리하여
$(x^2+A)^2-(Bx)^2$의 꼴로 변형한 후
$Y^2-Z^2=(Y+Z)(Y-Z)$를 이용하여 인수분해한다.

C009 복잡한 식의 인수분해를 이용한 미지수 구하기 정답 ③

다항식 $(2x+y)^2-2(2x+y)-3$을 인수분해하면 [정답률 85%]
❶ $2x+y=t$로 놓고 인수분해한다.
$(ax+y+1)(2x+by+c)$일 때, $a+b+c$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

Step ❶ $2x+y=t$로 놓고 이차식을 인수분해한다.

$2x+y=t$로 놓으면

$$\begin{aligned} &(2x+y)^2-2(2x+y)-3\\ &=t^2-2t-3\\ &=(t+1)(t-3)\\ &=(2x+y+1)(2x+y-3) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=2+1+(-3)=0$

C010 복잡한 식의 인수분해를 이용한 미지수 구하기 정답 ④

다항식 $(x^2-x)^2+2x^2-2x-15$가 $(x^2+ax+b)(x^2+ax+c)$ [정답률 82%]
❶ $x^2-x=t$로 놓고 인수분해한다.
로 인수분해될 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Step ❶ $x^2-x=t$로 놓고 주어진 다항식을 t에 대한 식으로 나타내어 인수분해한다.

$x^2-x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2-x)^2+2x^2-2x-15&=(x^2-x)^2+2(x^2-x)-15\\ &=t^2+2t-15\\ &=(t+5)(t-3)\\ &=(x^2-x+5)(x^2-x-3) \end{aligned}$$

이므로

$a=-1$, $b=5$, $c=-3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$, $c=5$

따라서 $a+b+c=1$

C011 인수분해 이해하기 정답 5

모든 실수 x에 대하여 [정답률 91%]
$2x^3-x^2-7x+6=(x-1)(x+2)(ax+b)$
❶ $x-1$과 $x+2$를 인수로 가짐을 알고 조립제법을 이용하여 인수분해한다.
일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점] 5

Step ❶ 주어진 등식의 좌변을 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

다항식 $2x^3-x^2-7x+6$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	2	-1	-7	6
		2	1	-6
-2	2	1	-6	0
		-4	6	
	2	-3	0	

$2x^3-x^2-7x+6=(x-1)(x+2)(2x-3)$이므로

$a=2$, $b=-3$이다.

따라서 $a-b=5$

다른 풀이

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2-1+7+6=-2(-a+b)$, $10=2(a-b)$

따라서 $a-b=5$

C012 인수분해를 이용한 미지수 구하기 정답 ①

다항식 x^4+4x^2+16이 $(x^2+ax+b)(x^2-cx+d)$로 [정답률 80%]

❶ X^2-Y^2의 꼴로 변형한 다음 $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$임을 이용한다.

인수분해될 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 양수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

Step ❶ $(x^2+A)^2-(Bx)^2$의 꼴로 변형하여 인수분해한다.

$$x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$$
$$=(x^2+4)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$
$$=(x^2+ax+b)(x^2-cx+d)$$

이때 a, b, c, d가 양수이므로

$a=2$, $b=4$, $c=2$, $d=4$

따라서 $a+b+c+d=12$

C013 복잡한 식의 인수분해를 이용한 미지수 구하기 정답 ③

다항식 $(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2$를 인수분해하면 [정답률 91%]

❶ $x^2+2x=X$로 놓고 인수분해한다.

$(x^2+ax+b)(x^2+2x-2)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

Step ❶ $x^2+2x=X$로 놓고 주어진 다항식을 X에 관한 식으로 나타내어 인수분해한다.

$x^2+2x=X$로 놓으면

$$(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2=X(X-3)+2$$
$$=X^2-3X+2$$
$$=(X-1)(X-2)$$

이므로

$$(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2=(x^2+2x-1)(x^2+2x-2)$$

Step ❷ 인수분해한 식을 비교하여 상수를 구한다.

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로 $a+b=1$

다른 풀이

등식 $(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2=(x^2+ax+b)(x^2+2x-2)$는 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$을 대입하면 $2=-2b$, $b=-1$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2=1+a+b$이고

$b=-1$이므로 $a=2$ ↳ $a+b=1$이 바로 나온다.

따라서 $a+b=1$

C014 인수분해를 활용하여 문제해결하기 정답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 36%]

(가) $P(x)+Q(x)=4$

❶ $P(x)=ax^2+bx+c$이면 $Q(x)=-ax^2-bx+4-c$

(나) $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$

❷ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$임을 이용한다.

$P(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때, $P(2)+Q(3)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step ❶ 곱셈공식의 변형을 이용하여 $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$을 $P(x)+Q(x)$를 이용하여 나타내고 조건 (가)의 등식을 대입한다.

조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=4$이므로

$$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$$
$$=\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$$
$$=4^3-3P(x)Q(x)\times 4$$

Step ❷ 조건 (나)를 이용하여 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$의 곱 $P(x)Q(x)$을 구한다.

조건 (나)에서

$$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$$

이므로

$$4^3-3P(x)Q(x)\times 4=12x^4+24x^3+12x^2+16$$
$$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$$
$$-P(x)Q(x)=x^4+2x^3+x^2-4$$
$$-P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$$
$$P(x)Q(x)=-(x^2+x-2)(x^2+x+2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

Step ❸ 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$의 합 $P(x)+Q(x)$의 값이 4이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이기 위한 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

두 다항식 $P(x)Q(x)$의 곱이 사차식이므로 두 식 $P(x)$, $Q(x)$는 일차식과 삼차식이거나 모두 이차식이다. 그런데 두 식 $P(x)$, $Q(x)$가 일차식과 삼차식이면 두 식의 합은 삼차식이어야 하므로 $P(x)+Q(x)=4$임에 모순된다. 따라서 두 식 $P(x)$, $Q(x)$는 모두 이차식이다. ㉠을 만족시키면서 $P(x)+Q(x)=4$이려면 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$는

$P(x)=-x^2-x+2$, $Q(x)=x^2+x+2$

이어야 한다. 따라서 $P(2)+Q(3)=-4+14=10$

다른 풀이

$P(x)=ax^2+bx+c(a<0)$

$Q(x)=4-(ax^2+bx+c)$

라 하자.

$$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$$
$$=(ax^2+bx+c)^3+64-48(ax^2+bx+c)$$
$$+12(ax^2+bx+c)^2-(ax^2+bx+c)^3$$
$$=12a^2x^4+24abx^3+(12b^2+24ac-48a)x^2$$
$$+(24bc-48b)x+(12c^2-48c+64)$$
$$=12x^4+24x^3+12x^2+16$$

에서 $12a^2=12$

$a<0$이므로 $a=-1$

$24ab=24$에 $a=-1$을 대입하면 $b=-1$

$12b^2+24ac-48a=12$에 $a=b=-1$을 대입하면 $c=2$

$b=-1$, $c=2$를 $24bc-48b=0$, $12c^2-48c+64=16$에 대입하면 등식이 성립하므로

$P(x)=-x^2-x+2$

$Q(x)=4-(-x^2-x+2)=x^2+x+2$

따라서 $P(2)+Q(3)=-4+14=10$

C015 인수분해를 이용하여 미지수 구하기 　　정답 ②

두 자연수 a, b에 대하여 $a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$의 값이 　[정답률 68%]

❶ b에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

245일 때, $a+b$의 값은? [4점]

❷ 소인수분해하여 a, b의 값을 구한다.

① 9　❷ 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

Step ❶ 주어진 식을 인수분해한다.

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$

$=(a+1)^2b+(a+1)^2$

$=(a+1)^2(b+1)$

Step ❷ 식과 자연수의 형태를 같게 하여 자연수 a, b의 값을 구한다.

위의 식의 값이 $245=7^2\times5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\times5$

a, b는 자연수이므로

$a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=10$

해결단 TALK

주어진 식이 a에 대한 이차식이고 b에 대한 일차식이므로 차수가 낮은 b에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하는 것이 일반적이야. 하지만 다음과 같이 a에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해할 수도 있어.

$(b+1)a^2+2(b+1)a+(b+1)=(b+1)(a^2+2a+1)$

$=(a+1)^2(b+1)$

C016 나머지정리와 인수분해를 이용한 문제해결하기 　　정답 ⑤

다항식 x^3-4x^2+7x+4를 이차항의 계수가 1인 서로 다른 　[정답률 57%]

두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나눈 나머지가 모두 $2x+6$이다.

❶ $A(x)$, $B(x)$는 $x^3-4x^2+7x+4-(2x+6)$의 인수임을 이용한다.

다항식 $A(x)+B(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　❺ 15

Step ❶ 주어진 다항식을 $A(x)$, $B(x)$로 나눈 나머지가 같음을 이용한다.

다항식 x^3-4x^2+7x+4를 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나눈 나머지가 $2x+6$으로 같으므로 $A(x)$, $B(x)$는

$x^3-4x^2+7x+4-(2x+6)$의 인수이다.

$x^3-4x^2+7x+4-(2x+6)=x^3-4x^2+5x-2$

$=(x-1)^2(x-2)$ 　…… ㉠

Step ❷ 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$를 찾고 나머지를 구한다.

두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 ㉠의 서로 다른 인수이므로

$A(x)=(x-1)^2$, $B(x)=(x-1)(x-2)$

또는 $A(x)=(x-1)(x-2)$, $B(x)=(x-1)^2$

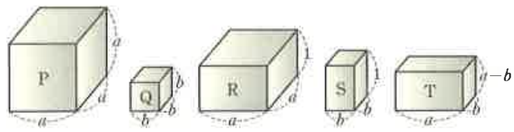
따라서 $A(x)+B(x)=(x-1)^2+(x-1)(x-2)$이므로

다항식 $A(x)+B(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는

$A(4)+B(4)=3^2+3\times2=15$

C017 인수분해를 이용한 도형 문제해결하기 　　정답 ⑤

두 양수 a, $b(a>b)$에 대하여 그림과 같은 직육면체 P, Q, R, S, T의 부피를 각각 p, q, r, s, t라 하자. 　[정답률 64%]



❶ 입체도형의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타내고 인수분해를 이용한다.

$p=q+r+s+t$일 때, $a-b$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{4}{5}$　④ $\frac{5}{6}$　❺ 1

Step ❶ 입체도형의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

입체도형 P, Q, R, S, T의 부피가 각각 p, q, r, s, t이므로

$p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(a-b)$

Step ❷ $p=q+r+s+t$를 a, b에 대한 식으로 나타내고 인수분해를 이용하여 $a-b$의 값을 구한다.

$p=q+r+s+t$이므로

$a^3=b^3+a^2+b^2+ab(a-b)$

$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+b^2)-ab(a-b)=0$

$\{(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)ab\}-(a^2+b^2)=0$

$\{(a-b)(a^2+ab+b^2-ab)\}-(a^2+b^2)=0$

$(a-b)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)=0$

$(a-b-1)(a^2+b^2)=0$

$a^2+b^2\neq0$이므로 $a-b-1=0$

따라서 $a-b=1$

다른 풀이

$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$의 좌변을 전개한 후 a에 대하여 정리하면

$a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)$

$=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^3-b^2$

$=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)$

$f(x)=x^3-(b+1)x^2+b^2x-b^2(b+1)$이라 하면

$f(b+1)=(b+1)^3-(b+1)(b+1)^2+b^2(b+1)-b^2(b+1)=0$

그러므로 $f(x)$는 $x-b-1$을 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
b+1 & 1 & -b-1 & b^2 & -b^2(b+1) \\
 & & b+1 & 0 & b^2(b+1) \\
\hline
 & 1 & 0 & b^2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

즉 $f(x)=(x-b-1)(x^2+b^2)$으로 인수분해된다.

$f(a)=(a-b-1)(a^2+b^2)$이므로

$a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)=(a-b-1)(a^2+b^2)$

$a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)=0$에서

$(a-b-1)(a^2+b^2)=0$

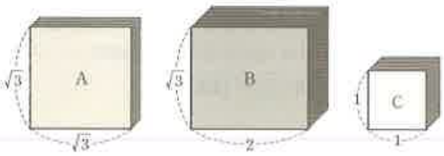
이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2>0$

따라서 $a-b-1=0$이므로

$a-b=1$

C018 인수분해를 이용한 도형 문제해결하기 정답 24

그림과 같이 크기가 다른 직사각형 모양의 색종이 A, B, C가 [정답률 25%]
각각 5장, 11장, 8장 있다.



❶ $\sqrt{3}=x$로 놓고 색종이 A, B, C를 x에 대한 식으로 나타낸 다음 인수분해를 이용하여 직사각형의 둘레의 길이를 구한다.

이들을 모두 사용하여 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙여서 하나의 직사각형을 만들었다. 이 직사각형의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{3}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점] 24

Step ❶ $\sqrt{3}=x$로 놓고 색종이 A, B, C를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\sqrt{3}=x$라 하면

색종이 A 한 장의 넓이는 x^2

색종이 B 한 장의 넓이는 $2x$

색종이 C 한 장의 넓이는 1

Step ❷ 주어진 색종이를 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 만든 직사각형의 넓이를 구하고 인수분해한다.

색종이 A 5장, 색종이 B 11장, 색종이 C 8장을 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙여서 만든 직사각형의 넓이는 $5x^2+22x+8$이다.

이 식을 자연수 계수를 갖는 두 일차식의 곱으로 나타내면

$5x^2+22x+8=(5x+2)(x+4)$

Step ❸ 직사각형의 두 변의 길이를 구하고 그 둘레의 길이를 구한다.

즉 직사각형의 두 변의 길이는

$5x+2$, $x+4$

로 나타낼 수 있으므로 구하는 직사각형의 둘레의 길이는

$$
\begin{aligned}
2(5x+2)+2(x+4)&=10x+4+2x+8\\
&=12x+12\\
&=12+12\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

따라서 $a=12$, $b=12$이므로 $a+b=24$

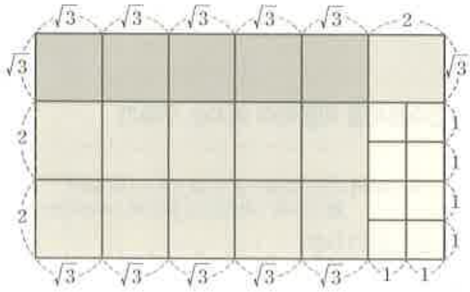
실전 솔루션

색종이 24장의 넓이의 합 S는

$$
\begin{aligned}
S&=5\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})+11\times(2\times\sqrt{3})+8\times(1\times1)\\
&=5\times(\sqrt{3})^2+22\times\sqrt{3}+8\\
&=(5\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+4)
\end{aligned}
$$

이므로 $5\sqrt{3}+2$와 $\sqrt{3}+4$를 두 변의 길이로 하는 직사각형의 넓이 $(5\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+4)$와 같다.

따라서 24장의 색종이를 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙인 직사각형의 두 변의 길이는 $5\sqrt{3}+2$와 $\sqrt{3}+4$이다.



C019 인수분해를 이용한 배수 문제해결하기 정답 20

자연수 n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되도록 하는 [정답률 10%]

❶ n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$를 포함한 식으로 인수분해한 다음 자연수 n의 최댓값을 구한다.

자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점] 20

Step ❶ 인수분해를 이용하여 n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$를 포함한 식으로 나타낸다.

$$
\begin{aligned}
n^4+n^2-2&=(n^2-1)(n^2+2)\\
&=(n-1)(n+1)(n^2+2)\\
&=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)\\
&=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}\\
&=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1) \quad \cdots\cdots ㉠
\end{aligned}
$$

Step ❷ 주어진 다항식이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 ㉠이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되어야 한다.

즉 $18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (단, k는 자연수)

$18=(n-2)k$이고, k가 최솟값을 가질 때 n이 최댓값을 가지므로 $k=1$일 때 n이 최대이다.

따라서 n의 최댓값은 20이다.

다른 풀이

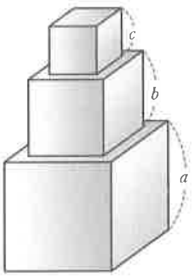
n^4+n^2-2를 조립제법을 이용하여 $(n-1)(n-2)$로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
 & & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 6 & 16 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 8 & \boxed{18} &
\end{array}
$$

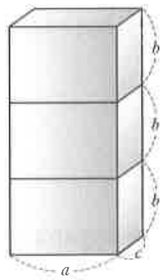
n^4+n^2-2를 $n-1$로 나눈 몫은 n^3+n^2+2n+2, 나머지는 0이므로
$n^4+n^2-2=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$
n^3+n^2+2n+2를 $n-2$로 나눈 몫은 n^2+3n+8, 나머지는 18이다.
그러므로 식을 정리하면
$n^4+n^2-2=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$
문제의 조건에서 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이다.
그런데 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 $18(n-1)$도 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되어야 한다.
$18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (단, k는 자연수)
$18=(n-2)k$
k가 최솟값을 가질 때 n이 최댓값을 가지므로 $k=1$일 때 n이 최대이다.
따라서 n의 최댓값은 20이다.

C020 다항식에 조건을 적용하여 참, 거짓 추론하기 정답 ②

두 가지 모양의 케이크를 만들려고 한다. 그림과 같이 〈케이크 A〉는 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 정육면체 세 개를 쌓아서 만들고, 〈케이크 B〉는 세 모서리의 길이가 a, b, c인 직육면체 세 개를 쌓아서 만든다. 〈보기〉에서 옳은 설명만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>b>c$) [4점] [정답률 50%]



〈케이크 A〉



〈케이크 B〉

〈보기〉
ㄱ. 〈케이크 A〉가 〈케이크 B〉보다 높다.
ㄴ. 〈케이크 A〉에서 밑면을 제외한 겉넓이는 $5a^2+4b^2+4c^2$이다.
ㄷ. 〈케이크 A〉와 〈케이크 B〉의 부피를 같게 만들 수 있다.

❶ 〈보기〉의 설명을 식으로 만들어 참, 거짓을 판별한다.

① ㄱ ❷ ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ a, b, c의 값을 임의로 놓고 참, 거짓을 판별한다.
ㄱ. $a=4$, $b=3$, $c=1$이면 〈케이크 A〉의 높이는 $a+b+c=8$이고 〈케이크 B〉의 높이는 $b+b+b=9$이므로 〈케이크 B〉가 〈케이크 A〉보다 높다. (거짓)
Step ❷ 케이크 A에서 밑면을 제외한 겉넓이를 구한다.
ㄴ. $(5a^2-b^2)+(5b^2-c^2)+5c^2=5a^2+4b^2+4c^2$ (참)
Step ❸ 케이크 A의 부피에서 케이크 B의 부피를 뺀다.
ㄷ. (케이크 A의 부피)$-$(케이크 B의 부피)
$=a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$
이므로 〈케이크 A〉의 부피는 〈케이크 B〉의 부피보다 항상 크다.
즉 〈케이크 A〉와 〈케이크 B〉의 부피를 같게 만들 수 없다.
(거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

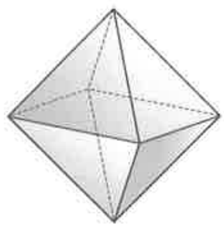
C021 인수분해를 이용하여 문제해결하기 정답 228

1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여 [정답률 54%]
$3587=15^3+15^2-15+2=a\times b$
❶ $A=15$라 하고 다항식을 세운다.
로 나타낼 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점] 228

Step ❶ $A=15$라 하고 주어진 등식을 인수분해한다.
$A=15$라 하면
$3587=15^3+15^2-15+2$
$=A^3+A^2-A+2=(A+2)(A^2-A+1)$
$=(15+2)(15^2-15+1)=17\times 211$
따라서 $a+b=17+211=228$

C022 인수분해를 이용하여 도형 문제해결하기 정답 15

그림과 같이 여덟 개의 정삼각형으로 이루어진 정팔면체가 있다. 여섯 개의 꼭짓점에는 자연수를 적고 여덟 개의 정삼각형의 면에는 각각의 삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 수의 곱을 적는다. 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합이 105일 때, 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수들의 합을 구하시오. [4점] 15 [정답률 40%]
❶ 각 꼭짓점에 적힌 자연수를 미지수로 놓는다.
❷ ❶의 미지수를 이용하여 식을 세운다.



Step ❶ 각 꼭짓점에 적힌 숫자를 문자로 놓고 각각의 면에 적힌 수의 합을 구한다.
각 꼭짓점에 적힌 숫자를 a, b, c, d, e, f라고 하자.
이때 면에 적힌 수는 각각 abe, ade, acd, abc, bef, def, cdf, bcf이다.
$abe+ade+acd+abc+bef+def+cdf+bcf$
$=ae(b+d)+ac(b+d)+ef(b+d)+cf(b+d)$
$=(b+d)(ae+ac+ef+cf)$
$=(b+d)\{a(c+e)+f(c+e)\}$
$=(b+d)\{(a+f)(c+e)\}$
$=(b+d)(a+f)(c+e)$
$=105$

Step ② ❶에서 구한 식을 이용하여 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수의 합을 구한다.

$105=3\times5\times7$이므로 $b+d$, $a+f$, $c+e$의 값은 다음 표와 같다.

$b+d$	$a+f$	$c+e$
3	5	7
3	7	5
5	3	7
5	7	3
7	3	5
7	5	3

따라서

$a+b+c+d+e+f=3+5+7=15$

씨리얼 Special

문제편 pp.42 ~ 43

1 ④ 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 ⑤ 6 77 7 ②

1 다항식의 전개식에서 계수 구하기

정답 ④

두 다항식 A, B에 대하여

$A+B=x^2+4x-1$, $A-B=x^2+2x-3$

❶ 두 식을 연립하여 A, B의 식을 구한다.

일 때, 다항식 AB의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

❷ AB의 전개식을 구한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ① $A+B$의 식과 $A-B$의 식을 연립하여 A, B의 식을 각각 구한다.

$A+B=x^2+4x-1$ …… ㉠

$A-B=x^2+2x-3$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2A=2x^2+6x-4$이므로

$A=x^2+3x-2$

㉠−㉡을 하면 $2B=2x+2$이므로

$B=x+1$

Step ② AB의 전개식에서 x^2의 계수를 찾는다.

따라서 $AB=(x^2+3x-2)(x+1)=x^3+4x^2+x-2$

이므로 다항식 AB의 전개식에서 x^2의 계수는 4이다.

2 나머지정리를 이용하여 나머지 구하기

정답 ④

최고차항의 계수가 1인 다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

❶ 조건을 만족하는 다항식 $f(x)$를 구한다.

$f(x^2)=(x^2+1)f(x)$

를 만족시킬 때, 다항식 $f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는? [4점]

❷ 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$임을 이용한다.

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

Step ① 다항식 $f(x)$의 최고차항을 x^n으로 놓고 n의 값을 구한다.

다항식 $f(x)$의 최고차항을 x^n (n은 자연수)이라 하자.

다항식 $f(x^2)$의 최고차항은 x^{2n}이고, 다항식 $(x^2+1)f(x)$의 최고차항은 x^{n+2}이므로 $2n=n+2$, 즉 $n=2$

Step ② 다항식 $f(x)$를 구한다.

다항식 $f(x)$는 이차식이고 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(x^2)=(x^2+1)f(x)$에서

$x^4+ax^2+b=(x^2+1)(x^2+ax+b)$이므로

$x^4+ax^2+b=x^4+ax^3+(b+1)x^2+ax+b$ …… ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$a=0$, $a=b+1$

따라서 $a=0$, $b=-1$

Step ❸ $f(5)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=x^2-1$이므로 $f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$f(5)=5^2-1=24$

3 인수분해를 이용하여 다항식 문제해결하기 정답 ③

10 이하의 세 자연수 a, b, c가

$a^2+5b^2+5c^2-3ab-bc-3ca=0$

❶ 인수분해하여 식을 간단히 한다.

을 만족시킬 때, $a+b+c$의 최댓값은? [4점]

❷ $a+b+c$의 최댓값을 구한다.

① 13 ② 14 ❸ 15 ④ 16 ⑤ 17

Step ❶ 식을 변형하여 완전제곱식의 꼴로 만들고 a, b, c 사이의 관계를 찾는다.

$a^2+5b^2+5c^2-3ab-bc-3ca=0$의 양변에 2를 곱하면

$2a^2+10b^2+10c^2-6ab-2bc-6ca=0$

$(a^2-6ab+9b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(9c^2-6ca+a^2)=0$

$(a-3b)^2+(b-c)^2+(3c-a)^2=0$

따라서 $a=3b$, $b=c$, $3c=a$

Step ❷ a, b, c의 값을 찾고 $a+b+c$의 최댓값을 구한다.

이때 a, b, c는 10 이하의 자연수이므로

$a=3$, $b=1$, $c=1$ 또는 $a=6$, $b=2$, $c=2$ 또는 $a=9$, $b=3$, $c=3$

따라서 $a+b+c$의 최댓값은 $9+3+3=15$

해결단 TALK

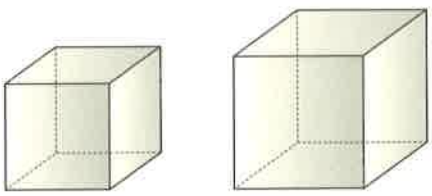
두 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$이다.

4 곱셈 공식의 변형을 이용하여 도형 문제해결하기 정답 ③

그림과 같은 두 정육면체의 부피의 합은 224이고, 두 정육면체의 모든 모서리

❶ 각 정육면체의 한 모서리의 길이를 x, y로 놓고 식을 세운다.

의 길이의 합은 96일 때, 두 정육면체의 겉넓이의 합은? [4점]



① 200 ② 220 ❸ 240 ④ 260 ⑤ 280

Step ❶ 각 모서리의 길이를 각각 x, y로 놓고 주어진 조건을 식으로 세운다.

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하자.

두 정육면체의 부피의 합이 224이므로

$x^3+y^3=224$ …… ㉠

또 두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 96이므로

$12x+12y=96$

$x+y=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=224$

$8^3-3xy\times8=224$

$xy=12$

Step ❷ 두 정육면체의 겉넓이의 합을 구한다.

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6x^2+6y^2=6(x+y)^2-12xy$

$=6\times8^2-12\times12=240$

다른 풀이

두 정육면체의 모서리의 길이를 각각 x, y라 하자.

모든 모서리의 길이의 합이 96이므로

$12x+12y=96$, $x+y=8$

따라서 $y=8-x$

또 두 정육면체의 부피의 합이 224이므로

$x^3+(8-x)^3=224$

$x^3-x^3+24x^2-192x+512=224$

$24x^2-192x+288=0$, $x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

$x=2$ 또는 $x=6$

$x=2$일 때 $y=6$이고, $x=6$일 때 $y=2$이므로

두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6\times2^2+6\times6^2=240$

5 나머지정리를 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

다음 조건을 만족시키는 삼차다항식 $f(x)$에 대하여

$f(4)+f(-2)$의 값은? [4점]

(가) $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫은 $x+3$이다.
(나) $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 -5이다.

❶ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지를 구한다.

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ❺ 80

Step ❶ 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나머지의 계수의 합을 구한다.

조건 (가)에서 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지를 $ax+b$

(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)+ax+b$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 -5이므로

$f(1)=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(1)=2\times(-1)\times4+a\times1+b=-8+a+b=-5$

따라서 $a+b=3$

Step ❷ $f(4)+f(-2)$의 식에 ❶의 값을 대입하여 구한다.

㉠에 $x=4$를 대입하면

$f(4)=5\times2\times7+4a+b=70+4a+b$

또 ㉠에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=(-1)\times(-4)\times1-2a+b=4-2a+b$

따라서

$f(4)+f(-2)=(70+4a+b)+(4-2a+b)$

$=74+2(a+b)$

$=74+2\times 3=80$

실전 솔루션

❶ 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $f(\alpha)$, $g(\alpha)$이다.

❷ 다항식 $f(x)$를 이차식 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$(a, b는 상수)로 놓고 $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

6 인수분해를 이용하여 문제해결하기

정답 77

$1<a<b<c$인 세 자연수 a, b, c가

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=55(a+c)$

❶ 좌변을 인수분해한다.

를 만족시킬 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. [4점] 77

❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

Step ❶ 주어진 식의 좌변을 전개하여 정리한다.

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=55(a+c)$에서

좌변을 전개하면

$a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-abc=55(a+c)$

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc=55(a+c)$

$(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=55(a+c)$

$(b+c)(a+b)(a+c)=55(a+c)$

Step ❷ a, b, c의 값을 구하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다.

$a+c>0$이므로

$(a+b)(b+c)=5\times 11$ ······ ㉠

$1<a<b<c$이므로

$5\le a+b<b+c$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b=5$, $b+c=11$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=8$이므로

$a^2+b^2+c^2=2^2+3^2+8^2=77$

7 인수분해를 이용하여 도형 문제해결하기

정답 ②

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a^2b-b^2c-b^3+a^2c=0$
(나) $a+b=16$
(다) $a^2+b^2=c^2$

❶ (가), (나), (다)를 만족시키는 삼각형의 변의 길이 또는 모양을 찾는다.

삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

❷ 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

Step ❶ 주어진 조건을 이용하여 삼각형의 변의 길이와 모양을 알아낸다.

조건 (가)에서

$a^2b-b^2c-b^3+a^2c=0$

$a^2(b+c)-b^2(b+c)=0$

$(b+c)(a+b)(a-b)=0$

이때 $b+c>0$, $a+b>0$이므로 $a-b=0$, 즉 $a=b$이다.

조건 (나)에서 $a+b=16$이므로 $b=a$를 대입하면 $2a=16$

따라서 $a=8$, $b=8$

조건 (다)에서 $a^2+b^2=c^2$이므로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

Step ❷ 삼각형의 넓이를 구한다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$

II 복소수와 이차방정식

D 복소수

문제편 pp.47 ~ 56

필수 기출

001 ③	002 ④	003 ②	004 ④	005 ③	006 ⑤
007 ④	008 ①	009 ③	010 ③	011 53	012 ③
013 ①	014 9	015 ⑤	016 7	017 16	018 ④
019 ②	020 ④	021 38	022 16	023 ⑤	024 ①
025 ②	026 ⑤	027 ⑤	028 ⑤	029 ⑤	

플러스 기출

030 24	031 ②	032 ①	033 ⑤	034 ①	035 18
036 7	037 ①	038 ③	039 27		

D001 복소수 계산하기

정답 ③

$(3+i)-2i$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점] [정답률 87%]

❶ 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

① $1-i$ ② $2-i$ ❸ $3-i$ ④ $4-i$ ⑤ $5-i$

Step ❶ 허수부분을 모아서 계산한다.

$$(3+i)-2i=3+(1-2)i$$
$$=3-i$$

D002 복소수 계산하기

정답 ④

$(2+i)^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점] [정답률 91%]

❶ 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 이용한다.

① $2+2i$ ② $2+3i$ ③ $3+3i$ ❹ $3+4i$ ⑤ $3+5i$

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$(2+i)^2=2^2+2\times2\times i+i^2$$
$$=4+4i+(-1)$$
$$=3+4i$$

D003 복소수 계산하기

정답 ②

$-2i+(2+3i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점] [정답률 89%]

❶ 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

① $2-i$ ❷ $2+i$ ③ $3-i$ ④ $3+i$ ⑤ $4-i$

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$-2i+(2+3i)=2+(-2+3)i$$
$$=2+i$$

D004 복소수 계산하기

정답 ④

$(4+2i)+(1-3i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점] [정답률 91%]

❶ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

① $3-i$ ② $3+i$ ③ $4-i$ ❹ $5-i$ ⑤ $5+i$

Step ❶ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

$$(4+2i)+(1-3i)=(4+1)+(2-3)i$$
$$=5-i$$

해검단 TALK

복소수의 사칙연산은 i를 문자로 생각하고 계산하는 거야.

D005 복소수 계산하기

정답 ③

두 복소수 $z_1=2-3i$, $z_2=2+3i$에 대하여 z_1z_2의 값은? [정답률 95%]

❶ 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

(단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① 9 ② 11 ❸ 13 ④ 15 ⑤ 17

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$z_1z_2=(2-3i)(2+3i)$$
$$=2^2-(3i)^2$$
$$=4+9$$
$$=13$$

D006 복소수 계산하기

정답 ⑤

$(2-i)+(3+2i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점] [정답률 95%]

❶ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $3+i$ ④ $3-i$ ❺ $5+i$

Step ❶ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

$$(2-i)+(3+2i)=(2+3)+(-1+2)i$$
$$=5+i$$

D007 복소수가 서로 같을 조건 이해하기

정답 ④

등식 $2x(3+i)=3y+4i$를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점] [정답률 91%]

❶ $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$임을 이용하여 x, y를 구한다.

① 3 ② 4 ③ 5 ❹ 6 ⑤ 7

Step ❶ 두 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$2x(3+i)=6x+2xi=3y+4i$에서

$2x=4,\ 6x=3y$

따라서 $x=2,\ y=4$이므로 $x+y=6$

해검단 TALK

실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리한 다음, 복소수가 서로 같을 조건을 이용하면 돼.

실전 솔루션

두 복소수가 서로 같을 조건

$a,\ b,\ c,\ d$가 실수일 때

❶ $a+bi=c+di$이면 $a=c,\ b=d$

$a=c,\ b=d$이면 $a+bi=c+di$

❷ $a+bi=0$이면 $a=0,\ b=0$

$a=0,\ b=0$이면 $a+bi=0$

D008 복소수 계산하기

정답 ①

$(4+3i)+(1-2i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점] [정답률 95%]

❶ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

① $5+i$ ② $5-i$ ③ $3+i$ ④ $3-i$ ⑤ $2+3i$

Step ❶ 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

$$(4+3i)+(1-2i)=(4+1)+(3-2)i$$
$$=5+i$$

D009 복소수 계산하기

정답 ③

$3-i+\dfrac{2}{1-i}$를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점] [정답률 88%]

❶ 먼저 분모의 켤레복소수를 분모와 분자에 곱하여 분모를 실수화한다.

① $4-2i$ ② $4-i$ ③ 4 ④ $4+i$ ⑤ $4+2i$

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$3-i+\frac{2}{1-i}=3-i+\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=3-i+\frac{2(1+i)}{2}$$
$$=3-i+1+i$$
$$=4$$

D010 복소수 계산하기

정답 ③

$(1+2i)(1-2i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점] [정답률 89%]

❶ 곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ $2+2i$ ⑤ $3+4i$

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$(1+2i)(1-2i)=1^2-(2i)^2$$
$$=1-(-4)=5$$

D011 복소수 계산하기

정답 53

$(7+2i)(7-2i)$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점] [정답률 74%]

❶ 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

53

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$(7+2i)(7-2i)=7^2-(2i)^2$$
$$=49-(-4)=53$$

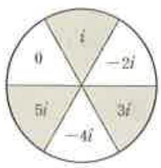
D012 복소수 계산하기

정답 ③

복소수 $0,\ i,\ -2i,\ 3i,\ -4i,\ 5i$가 적힌 다트판에 3개의 다트를 던져 맞히는 게임이 있다. 3개의 다트를 모두 다트판에 맞혔을 때, 얻을 수 있는 세 복소수를 $a,\ b,\ c$라 하자. a^2-bc의 최솟값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고 경계에 맞는 경우는 없다.) [3점] [정답률 48%]

❶ 제곱했을 때 가장 작은 수를 찾는다.

❷ a^2은 최솟값이고 bc는 최댓값이어야 한다.



① -49 ② -47 ③ -45 ④ -43 ⑤ -41

Step ❶ a^2-bc가 최소이려면 a^2은 최소이고 bc는 최대이어야 함을 이용한다.

a^2이 최솟값이고 bc가 최댓값일 때 a^2-bc는 최솟값을 갖는다.

(i) a^2의 최솟값은

$a=5i$일 때

-25

(ii) bc의 최댓값은

$b=-4i,\ c=5i$ 또는 $b=5i,\ c=-4i$일 때

20

(i), (ii)에 의하여 a^2-bc의 최솟값은

$-25-20=-45$

D013 복소수 계산하기

정답 ①

$(2+i)(1+i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점] [정답률 89%]

❶ i를 문자로 취급하여 실수처럼 계산하고 i^2에 -1을 대입한다.

① $1+3i$ ② $1+4i$ ③ $2+3i$ ④ $3+3i$ ⑤ $3+4i$

Step ❶ 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$$(2+i)(1+i)=2+2i+i+i^2$$
$$=2+2i+i-1$$
$$=1+3i$$

D014 두 복소수가 서로 같을 조건 이해하기 　정답 9

등식 $(a+1)+3i=7+bi$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점] [정답률 86%]

❶ $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$임을 이용한다.

9

Step ❶ 두 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$(a+1)+3i=7+bi$

$a+1=7$, $3=b$

따라서 $a=6$, $b=3$이므로

$a+b=9$

D015 복소수가 서로 같을 조건 이해하기 　정답 ⑤

등식 $(3+2i)x^2-5(2y+i)x=8+12i$를 만족시키는 두 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점] [정답률 77%]

❶ 좌변을 $a+bi$의 꼴로 변형하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$(3+2i)x^2-5(2y+i)x=8+12i$에서

$3x^2-10xy+(2x^2-5x)i=8+12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases} 3x^2-10xy=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5x=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서

$2x^2-5x-12=0$

$(2x+3)(x-4)=0$

이때 x는 정수이므로 $x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면

$48-40y=8$, $y=1$

따라서 $x+y=4+1=5$

D016 복소수가 서로 같을 조건 이해하기 　정답 7

등식 $a+2i=4+(b-1)i$를 만족하는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점] [정답률 88%]

❶ $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$임을 이용한다.

7

Step ❶ 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$a+2i=4+(b-1)i$에서

$a=4$, $b-1=2$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$a+b=7$

D017 복소수의 거듭제곱 구하기 　정답 16

$(1+i)^8$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점] 16 [정답률 81%]

❶ $(1+i)^2$의 값을 먼저 구한다.

Step ❶ 거듭제곱을 해 본다.

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=2^4\times i^4=16$

다른 풀이

$(1+i)^2=2i$이므로 $(1+i)^4=(2i)^2=4i^2=-4$

$(1+i)^8=\{(1+i)^4\}^2=(-4)^2=16$

해검단 TALK 복소수의 거듭제곱

i, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=1$, …과 같이 i^n (n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타난다.

D018 복소수의 성질을 이용하여 식의 값 구하기 　정답 ④

$xy<0$인 두 실수 x, y가 등식 $|x-y|+(x-1)i=3-2i$를 만족시킬 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점] [정답률 85%]

❷ $xy<0$이면 $x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$임을 이용한다.

❶ $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$임을 이용한다.

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Step ❶ 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=3$, $x-1=-2$

따라서 $x=-1$

$|-1-y|=3$에서

$-1-y=3$ 또는 $-1-y=-3$

따라서 $y=-4$ 또는 $y=2$

Step ❷ $xy<0$임을 이용한다.

$xy<0$이므로 $x=-1$, $y=2$

따라서 $x+y=1$

해검단 TALK 실수의 성질

두 실수 x, y에 대하여 $xy<0$이면 x, y가 서로 다른 부호임을 알 수 있어.

D019 복소수의 거듭제곱 구하기 　정답 ②

두 복소수 $\alpha=\frac{1+i}{2i}$, $\beta=\frac{1-i}{2i}$에 대하여 $(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점] [정답률 80%]

❶ α^2, β^2의 값을 구한다.

❷ ❶에서 구한 값을 대입한다.

① 6 ② 10 ③ 14 ④ 18 ⑤ 22

Step ① α^2, β^2의 값을 구한다.

$\alpha=\dfrac{1+i}{2i}$에서

$$\alpha^2=\left(\frac{1+i}{2i}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{-4}=\frac{2i}{-4}=-\frac{i}{2}$$

$\beta=\dfrac{1-i}{2i}$에서

$$\beta^2=\left(\frac{1-i}{2i}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{-4}=\frac{-2i}{-4}=\frac{i}{2}$$

Step ② $(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)$의 값을 구한다.

따라서 $2\alpha^2=-i$, $2\beta^2=i$이므로

$$\begin{aligned}(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)&=(-i+3)(i+3)\\&=(3-i)(3+i)\\&=3^2-i^2\\&=9-(-1)=10\end{aligned}$$

다른 풀이

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$, $\alpha\beta=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}$이고

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$이므로

$$\begin{aligned}(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)&=4(\alpha\beta)^2+6(\alpha^2+\beta^2)+9\\&=4\times\frac{1}{4}+6\times0+9=10\end{aligned}$$

D020 복소수의 성질을 이용하여 규칙성 찾기 정답 ④

복소수 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}$에 대하여 $z^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 [정답률 61%]

① z를 계속 곱하여 1이 나올 때까지 곱해진 개수를 구한다.

최솟값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ① z의 거듭제곱을 구하여 n의 최솟값을 구한다.

$z^2=z\times z=\dfrac{2i}{-2}=-i$

$z^3=z^2\times z=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=-1$

$z^5=z^4\times z=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}$

$z^6=z^4\times z^2=i$

$z^7=z^6\times z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=1$

따라서 $z^n=1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

D021 복소수의 성질 이해하기 정답 38

등식 $(a-bi)^2=8i$를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 $20a+b$ [정답률 64%]

① 등식의 좌변을 정리한 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

의 값을 구하시오. (단, $a>0$이고 $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점] 38

Step ① 주어진 등식의 좌변을 정리한다.

$(a-bi)^2=8i$에서 좌변은 $(a-bi)^2=a^2-b^2-2abi$이므로

$(a^2-b^2)-2abi=8i$

Step ② 두 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{cases}a^2-b^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ -2ab=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $(a-b)(a+b)=0$이므로

$a=b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=b$일 때

㉡에서 $a^2=-4$이므로 주어진 등식을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=-b$일 때

㉡에서 $a^2=4$이고 $a>0$이므로 $a=2$, $b=-2$

따라서 $20a+b=40-2=38$

D022 복소수의 성질을 이용하여 규칙성 찾기 정답 16

등식 $(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})=a+bi$를 [정답률 61%]

① $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$임을 이용하여 등식의 좌변을 적당히 묶어 정리한다.

만족시키는 실수 a, b에 대하여 $4(a+b)^2$의 값을 구하시오.

(단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점] 16

Step ① i의 거듭제곱의 규칙성을 이용하여 좌변을 정리한다.

음이 아닌 정수 k에 대하여

$i^{4k}=(i^4)^k=1$

$i^{4k+1}=i^{4k}\times i=i$

$i^{4k+2}=i^{4k}\times i^2=-1$

$i^{4k+3}=i^{4k}\times i^3=-i$

이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=(i+i^2+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+\cdots+i^{19})\\&=\{(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1)\}\\&\qquad+\{(-1-i+1+i)+(-1-i+1+i)+\cdots+(-1-i)\}\\&=(i-1)+(-1-i)=-2\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$4(a+b)^2=16$

다른 풀이 1

$i+i^{19}=0$이므로

$$\begin{aligned}&i+\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\}+i^{19}\\&=(i+i)+(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+\cdots+(i^{19}+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19}+i^{20}-i^{20})\\&=2(-i^{20})\\&=-2\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$4(a+b)^2=16$

다른 풀이 2

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=(i+i^2)(1+i+i^2+\cdots+i^{17})$

$=(i-1)(1+i)$

$=i^2-1$

$=-2$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$4(a+b)^2=16$

해검단 TALK

음이 아닌 정수 k에 대하여

$i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$이므로

$i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0$

D023 복소수와 켤레복소수 계산하기 정답 ⑤

복소수 $z=1+2i$에 대하여 $z\times\overline{z}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, [정답률 86%]

❶ $\overline{z}=1-2i$이다. ❷ 곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용한다.

$\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

Step ❶ 켤레복소수의 뜻과 복소수의 사칙연산의 성질을 이용한다.

$z=1+2i$에서 $\overline{z}=1-2i$

$z\times\overline{z}=(1+2i)\times(1-2i)=1-4i^2=1+4=5$

D024 복소수와 켤레복소수 계산하기 정답 ①

복소수 $z=2-3i$에 대하여 $(1+2i)\overline{z}$의 값은? [정답률 93%]

❶ $\overline{z}=2+3i$를 대입하여 계산한다.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [3점]

① $-4+7i$ ② $-4+4i$ ③ $3-4i$ ④ $3+7i$ ⑤ $7-4i$

Step ❶ 켤레복소수의 정의와 복소수의 사칙연산에 대한 성질을 이용한다.

$z=2-3i$에 대하여 $\overline{z}=2+3i$이므로

$(1+2i)\overline{z}=(1+2i)(2+3i)$

$=2+3i+4i-6$

$=-4+7i$

D025 복소수와 켤레복소수 계산하기 정답 ②

두 복소수 $\alpha=3+i$, $\beta=1-2i$에 대하여 $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$의 [정답률 90%]

❶ 복소수 $z=a+bi$에 대하여 $\overline{z}=a-bi$임을 이용하여 계산한다.

값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.) [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

Step ❶ 켤레복소수의 뜻과 복소수의 사칙연산의 성질을 이용한다.

$\alpha-\beta=(3+i)-(1-2i)$

$=2+3i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=(3-i)-(1+2i)$

$=2-3i$

이므로

$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(2+3i)(2-3i)$

$=4+9=13$

다른 풀이

$\alpha-\beta=(3+i)-(1-2i)=2+3i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=\overline{\alpha-\beta}=2-3i$

이므로

$(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(2+3i)(2-3i)$

$=4+9=13$

D026 켤레복소수의 성질을 이해하여 추론하기 정답 ⑤

복소수 $z=a+bi$(a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 [정답률 50%]

❶ $\overline{z}=a-bi$이다.

$iz=\overline{z}$

❷ $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 대입하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $z+\overline{z}=-2b$

ㄴ. $i\overline{z}=-z$

ㄷ. $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ $iz=\overline{z}$를 이용하여 a와 b의 관계식을 구한다.

$z=a+bi$이므로 $\overline{z}=a-bi$

$iz=i(a+bi)=-b+ai$

이고 $iz=\overline{z}$이므로

$-b+ai=a-bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-b$

따라서

$z=a+bi=a-ai$,

$\overline{z}=a+ai$

ㄱ. $z+\overline{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a=-2b$ (참)

ㄴ. $iz=\overline{z}$의 양변에 i를 곱하면

$i\times(iz)=i\times\overline{z}$

$-z=i\overline{z}$ (참)

ㄷ. $iz=\overline{z}$이므로 $\dfrac{\overline{z}}{z}=i$이고 ㄴ에서 $i\overline{z}=-z$이므로 $\dfrac{z}{\overline{z}}=-i$이다.

따라서 $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=i+(-i)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 1

ㄴ. $i\bar{z}=i(a+ai)=ai-a=-(a-ai)=-z$

ㄷ. $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+ai}{a-ai}+\dfrac{a-ai}{a+ai}=\dfrac{(a+ai)^2+(a-ai)^2}{(a-ai)(a+ai)}=0$

다른 풀이 2

ㄷ. $iz=\bar{z}$의 양변을 제곱하면 $z^2+(\bar{z})^2=0$이고 $z\bar{z}=2a^2\neq0$이므로

$\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z^2+(\bar{z})^2}{z\bar{z}}=0$이다.

D027 복소수의 성질 추론하기

정답 ⑤

복소수 $z=a+bi$(a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 z^2-z가 실수일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [정답률 51%]

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\overline{z^2-z}$는 실수이다.
❶ z^2-z가 실수임을 이용한다.

ㄴ. $z+\bar{z}=1$ ❷ $z=a+bi$를 z^2-z에 대입하여 a의 값을 구하고 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

ㄷ. $z\bar{z}>\dfrac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 켤레복소수의 성질을 이용한다.

ㄱ. z^2-z는 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다. (참)

Step ❷ $z=a+bi$를 z^2-z에 대입한다.

ㄴ. $z^2-z=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때 z^2-z가 실수이고 $b\neq0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $z=\dfrac{1}{2}+bi$이고 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-bi$이므로

$z+\bar{z}=1$ (참)

ㄷ. $z\bar{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$

이고 $b\neq0$이므로 $z\bar{z}>\dfrac{1}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

해검단 TALK

ㄴ은 다음과 같은 두 방법으로도 풀 수 있어.

(1) z^2-z가 실수이고, $\overline{z^2-z}=(\bar{z})^2-\bar{z}$이므로
$z^2-z=(\bar{z})^2-\bar{z}$가 성립해.
$z^2-z-\{(\bar{z})^2-\bar{z}\}=0$
$(z-\bar{z})(z+\bar{z}-1)=0$
이때 z는 실수가 아니므로 $z\neq\bar{z}$이야.
따라서 $z+\bar{z}=1$

(2) $z^2-z=k$(단, k는 실수)라 하면 $(\bar{z})^2-\bar{z}=k$이므로
z, $\bar{z}$는 이차방정식 $x^2-x-k=0$의 두 근이야.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\bar{z}=1$

D028 복소수의 성질을 이용하여 문제해결하기

정답 ⑤

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 복소수 z를 $z=a+bi$라 할 때, $\dfrac{\bar{z}}{z}$의 실수부분이 0이 되게 하는 모든 복소수 z의 개수는? [정답률 61%]
❶ $\bar{z}=a-bi$
❶ $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$를 대입하여 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱한다.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 복소수의 나눗셈을 하여 $\dfrac{\bar{z}}{z}$를 구한다.

$\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+bi}{a-bi}$

$=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

이므로 $\dfrac{z}{\bar{z}}$의 실수부분이 0이 되려면

$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0$, 즉 $a^2-b^2=0$

이어야 한다. 이때 a, b가 자연수이므로 $a=b$이다.

a, b가 5 이하의 자연수이므로

$z=1+i$ 또는 $z=2+2i$ 또는 $z=3+3i$ 또는 $z=4+4i$ 또는 $z=5+5i$

이다. 따라서 조건을 만족하는 모든 복소수 z의 개수는 5이다.

D029 복소수 계산하기

정답 ⑤

$\sqrt{-2}\sqrt{-18}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점] [정답률 81%]
❶ $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 이용한다.

① $6+2i$ ② $6-2i$ ③ $-8i$ ④ $-6+2i$ ⑤ $-6-2i$

Step ❶ 음수의 제곱근을 계산한다.

$\sqrt{-2}\sqrt{-18}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{2}i\times\sqrt{18}i+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$

$=\sqrt{36}i^2+\dfrac{2i}{i^2}$

$=-6-2i$

D030 복소수의 성질을 이용하여 규칙성 찾기

정답 24

두 복소수 $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$, $z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 $z_1^n=z_2^n$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점] [정답률 35%]
❶ z_1의 거듭제곱과 z_2의 거듭제곱을 하여 규칙을 찾는다.

24

Step ❶ z_1의 거듭제곱과 z_2의 거듭제곱을 하여 규칙을 찾는다.

$z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z_1^2=-i$

$z_1^3=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$z_1^4=-1,\ \cdots,\ z_1^8=1,\ \cdots$

이므로 z_1^n(n은 자연수)의 값은 $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ -i,\ \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}},\ -1,\ \cdots,\ 1$의 값이 반복된다.

$z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^3=1,\ \cdots$이므로 z_2^n(n은 자연수)의 값은 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},$ 1의 값이 반복된다.

Step ❷ n의 최솟값을 구한다.

$z_1^n=z_2^n$을 만족시키는 자연수 n은 8과 3의 공배수이다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 24이다.

D031 복소수의 곱셈을 이용하여 문제해결하기 정답 ②

그림과 같이 숫자가 표시되는 화면과 A, B 두 개의 버튼으로 구성된 장치가 있다. [정답률 76%]

A 버튼을 누르면 화면에 표시된 수와 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$를 곱한 결과가, B 버튼을 누르면 화면에 표시된 수와 $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$를 곱한 결과가 화면에 나타난다. 화면에 표시된 수가 1일 때, A 또는 B 버튼을 여러 번 눌렀더니 다시 1이 나타났다. 버튼을 누른 횟수의 최솟값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

❶ 두 버튼을 각각 반복하여 누르거나 번갈아 눌렀을 때의 결과의 규칙을 찾는다.

① 3 ❷ 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Step ❶ A버튼을 반복하여 눌렀을 때의 결과의 규칙을 찾는다.

A버튼을 한 번 누르면 화면에 나타나는 수는 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$

두 번 누르면 $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=i$

세 번 누르면

$$\begin{aligned}\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^3&=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2\times\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\\&=i\times\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\\&=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\end{aligned}$$

두 번 누르면 i이므로 네 번 누르면 $i^2=-1$

그러므로 A버튼을 여덟 번 누르면 화면에 1이 나타난다.

Step ❷ B버튼을 반복하여 눌렀을 때의 결과의 규칙을 찾는다.

B버튼을 한 번 누르면 화면에 나타나는 수는 $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$

두 번 누르면 $\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=-i$

세 번 누르면

$$\begin{aligned}\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^3&=\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)\\&=-i\times\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)\\&=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\end{aligned}$$

두 번 누르면 $-i$이므로 네 번 누르면 $(-i)^2=-1$

그러므로 B버튼을 여덟 번 누르면 화면에 1이 나타난다.

Step ❸ A버튼과 B버튼을 연달아 눌렀을 때의 결과의 규칙을 찾는다.

그런데 A버튼과 B버튼을 한 번씩 누른 결과는

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\times\left(\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)=-1$

그러므로 A버튼과 B버튼을 두 번씩 누르면 화면에 1이 나타난다.

따라서 화면에 1이 다시 나타날 때까지 버튼을 누른 횟수의 최솟값은 4이다.

해검단 TALK

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$에서 $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right\}^2=i$이고

$\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$에서 $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right\}^2=-i$이므로

$i\times(-i)=1$임을 이용하여 같은 결과를 얻을 수도 있어.

D032 켤레복소수의 성질 이해하기 정답 ①

등식 $z^2=3+4i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은? [정답률 75%]

❶ $z=a+bi$로 놓고 $z^2=3+4i$에 대입한다.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

❶ 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ $z=a+bi$로 놓고 z^2을 구한 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$z^2=(a+bi)^2=3+4i$에서

$a^2-b^2+2abi=3+4i$이므로

$a^2-b^2=3,\ ab=2$

Step ❷ $z\bar{z}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}z\bar{z}&=(a+bi)(a-bi)\\&=a^2+b^2=\sqrt{(a^2+b^2)^2}\\&=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}\\&=\sqrt{3^2+4\times2^2}=5\end{aligned}$$

다른 풀이

$(z\bar{z})^2=z^2(\bar{z})^2=z^2\overline{z^2}=(3+4i)(3-4i)=25$

$z\bar{z}\geq0$이므로 $z\bar{z}=5$

D033 복소수의 거듭제곱의 성질 추론하기 정답 ⑤

자연수 n에 대하여 복소수 $z_n=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^n$이라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점] [정답률 64%]

〈보기〉

ㄱ. $z_2=i$
❶ z_n의 식에 $n=2$를 대입한다.

ㄴ. $z_6=-z_2$
❷ ㄱ을 이용하여 z_6을 구한다.

ㄷ. $z_{n+8}=z_n$
❸ ㄱ, ㄴ을 이용한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ❺ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ $n=2$를 대입하여 z_2를 구한다.

ㄱ. $z_2=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2$

$=\frac{-2}{2i}=i$ (참)

Step ❷ ㄱ을 이용한다.

ㄴ. $z_2=i$이므로 $z_6={z_2}^3=i^3=-i=-z_2$ (참)

Step ❸ ㄱ, ㄴ을 이용한다.

ㄷ. $z_8=z_2z_6=i\times(-i)=1$이므로 $z_{n+8}=z_n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

D034 음수의 제곱근과 절댓값의 성질을 이용하여 추론하기 정답 ①

0이 아닌 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 75%]

(가) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$ ❶ a, b의 부호를 조사한다.

(나) $|a+b|+|a+c-1|=0$
❷ 실수 x, y에 대하여 $|x|+|y|=0$이면 $x=0$, $y=0$임을 이용한다.

세 수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

❶ $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$ ④ $b<c<a$ ⑤ $c<a<b$

Step ❶ 조건 (가)에서 제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 부호를 조사한다.

0이 아닌 실수 a, b에 대하여 (가)에서 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립하려면 $a<0$이고 $b>0$이어야 한다.

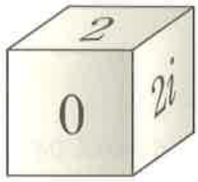
Step ❷ 조건 (나)와 절댓값의 성질을 이용하여 대소를 비교한다.

(나)에서 $|a+b|+|a+c-1|=0$이 성립하려면
$|a+b|\geq0$, $|a+c-1|\geq0$이므로
$a+b=0$, $a+c-1=0$이어야 한다.
즉 $b=-a$, $c=-a+1=b+1$이므로
$a<b<c$

해검단 TALK
절댓값은 항상 0보다 크거나 같아.

D035 복소수의 거듭제곱을 이용하여 문제해결하기 정답 18

그림과 같이 6개의 면에 각각 0, 2, 3, 5, $2i$, $1+i$가 적힌 정육면체 모양의 주사위가 있다. [정답률 33%]
이 주사위를 n번 던져서 나온 수들을 모두 곱하였더니 -32가 되었다.
❶ 각 면에 적힌 수들을 곱해 규칙을 찾는다.
가능한 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점] 18



Step ❶ 각 면에 적힌 수들을 곱해 -32가 되는 경우를 생각해 본다.

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$
$(2i)^2=4i^2=-4$
$(1+i)^2\times2i=2i\times2i=-4$
주사위를 던져 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 -32가 나올 수 없다.
그리고 $32=2^5$이므로 주사위는 최소한 5번 이상 던져야 한다.

Step ❷ 주사위를 5번 이상 던져서 -32가 되는 경우를 모두 찾는다.

(i) 주사위를 5번 던지는 경우
2가 3회, $2i$가 2회 나오면
$2^3\times(2i)^2=8\times(-4)$
$=-32$

(ii) 주사위를 6번 던지는 경우
2가 3회, $1+i$가 2회, $2i$가 1회 나오면
$2^3\times(1+i)^2\times2i=8\times2i\times2i$
$=-32$

(iii) 주사위를 7번 던지는 경우
2가 3회, $1+i$가 4회 나오면
$2^3\times(1+i)^4=8\times(2i)^2$
$=-32$

(i), (ii), (iii)에 의하여 가능한 n의 값은 5, 6, 7이다.
따라서 구하는 값은 $5+6+7=18$

D036 복소수 계산 이해하기 정답 7

복소수 $\alpha=(2-n-5i)^2$에 대하여 α^2이 음의 실수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점] [정답률 43%] 7
❶ α가 순허수이다.

Step ❶ $\alpha=(2-n-5i)^2$을 실수부분과 허수부분으로 구분한다.

$\alpha=(2-n-5i)^2$
$=2^2+(-n)^2+(-5i)^2+2(-2n+5ni-10i)$
$=(4+n^2-25-4n)+(10n-20)i$
$=(n^2-4n-21)+10(n-2)i$
복소수 α^2이 음의 실수가 되려면 α는 순허수가 되어야 한다.

그러므로 $n^2-4n-21=0$이고 $n-2\neq0$이다.

즉 $(n-7)(n+3)=0$, $n\neq2$에서

$n=7$ 또는 $n=-3$

이때 n은 자연수이므로 $n=7$

해결단 TALK

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 z^2이 음의 실수이려면 z가 순허수이어야 해.

D037 복소수의 연산을 이해하여 추론하기 정답 ①

복소수 α, β가 $\alpha^2=2i$, $\beta^2=-2i$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점] [정답률 33%]

〈보기〉

ㄱ. $\alpha\beta=2$

❶ $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2$임을 이용한다.

ㄴ. $(\alpha+\beta)^4=16$

❷ $\alpha^2+\beta^2=0$임을 이용한다.

ㄷ. $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 실수이다.

❸ 실수의 제곱은 0보다 작지 않음을 이용한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Step ❶ $(\alpha\beta)^2$의 값을 구하여 $\alpha\beta$의 값을 추론한다.

ㄱ. $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=(2i)(-2i)=4$이므로 $\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=-2$이다. (거짓)

Step ❷ 곱셈 공식 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$을 이용한다.

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2=2i+(-2i)=0$이므로

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=2\alpha\beta$

따라서

$(\alpha+\beta)^4=(2\alpha\beta)^2=4\alpha^2\beta^2=4\times4=16$ (참)

Step ❸ $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$가 실수이려면 $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\geq0$이어야 함을 이용한다.

$\alpha^2+\beta^2=0$이므로

ㄷ. $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}=\dfrac{-2\alpha\beta}{2\alpha\beta}=-1$

제곱한 수가 음수이므로 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 실수가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

실전 솔루션

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

❶ z^2이 실수이면 z가 실수 또는 순허수이다.

❷ z^2이 음의 실수이면 z가 순허수이다.

다른 풀이

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 $\alpha^2=2i$에 대입하여 정리하면

$\alpha^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=2i$

실수부분을 비교하면

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$이 되어

$a+b=0$ 또는 $a-b=0$

즉 $a=-b$ 또는 $a=b$

또 허수부분을 비교하면 $ab=1$이다.

$a=-b$이면 $ab=-b^2=1$

그런데 b는 실수이므로 $b^2=-1$이 될 수 없다.

$a=b$이면 $ab=b^2=1$이므로

$b=1$ 또는 $b=-1$

그러므로 $a=1$, $b=1$일 때 $\alpha=1+i$이고 $a=-1$, $b=-1$일 때 $\alpha=-1-i$이다.

마찬가지로 $\beta=c+di$ (c, d는 실수)라 하고 $\beta^2=-2i$에 대입하여 정리하면

$\beta^2=(c+di)^2=(c^2-d^2)+2cdi=-2i$

실수부분을 비교하면 $c^2-d^2=0$에서

$(c+d)(c-d)=0$이 되어 $c+d=0$ 또는 $c-d=0$

즉 $c=-d$ 또는 $c=d$

또 허수부분을 비교하면 $cd=-1$이다.

$c=-d$이면 $cd=-d^2=-1$

즉 $d=1$ 또는 $d=-1$

$c=d$이면 $cd=d^2=-1$

그런데 d는 실수이므로 $d^2=-1$이 될 수 없다.

그러므로 $c=-1$, $d=1$일 때 $\beta=-1+i$이고

$c=1$, $d=-1$일 때 $\beta=1-i$이다.

ㄱ. $\alpha=1+i$, $\beta=-1+i$이면 $\alpha\beta=-2$이다. (거짓)

ㄴ. $\alpha+\beta$의 값은 2, -2, $2i$, $-2i$가 될 수 있으므로

$(\alpha+\beta)^4=16$ (참)

ㄷ. $\alpha=-1-i$, $\beta=-1+i$인 경우

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{(-1-i)-(-1+i)}{(-1-i)+(-1+i)}=\frac{-2i}{-2}=i$$

따라서 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 실수가 아니다. (거짓)

D038 복소수의 연산을 이해하여 추론하기 정답 ③

복소수 $z=a+bi$(a, b는 모두 0이 아닌 실수)에 대하여 $\langle z\rangle=\dfrac{b}{a}$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점] [정답률 55%]

❶ $z=a+bi$를 직접 대입한다.

〈보기〉

ㄱ. $\langle\overline{1+2i}\rangle=-2$

ㄴ. $\left\langle\dfrac{1}{z}\right\rangle=-\langle z\rangle$

ㄷ. $\left\langle\overline{z}+\dfrac{1}{z}\right\rangle=\langle z\rangle$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ $z=a+bi$를 직접 대입하여 계산하고 〈보기〉의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\langle\overline{1+2i}\rangle=\langle1-2i\rangle=\dfrac{-2}{1}=-2$ (참)

ㄴ. $z=a+bi(a\neq0,\ b\neq0)$에서

$$\left\langle\frac{1}{z}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{a+bi}\right\rangle=\left\langle\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right\rangle=\frac{\dfrac{-b}{a^2+b^2}}{\dfrac{a}{a^2+b^2}}=-\frac{b}{a}=-\langle z\rangle \text{ (참)}$$

ㄷ. $\langle \bar{z}+\frac{1}{z}\rangle=\langle a-bi+\frac{1}{a+bi}\rangle$

$=\langle a-bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\rangle$

$=\langle \frac{a(a^2+b^2)-b(a^2+b^2)i}{a^2+b^2}+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\rangle$

$=\langle \frac{(a^2+b^2+1)a-(a^2+b^2+1)bi}{a^2+b^2}\rangle$

$=\dfrac{\frac{-(a^2+b^2+1)b}{a^2+b^2}}{\frac{(a^2+b^2+1)a}{a^2+b^2}}$

$=-\frac{b}{a}$

$\langle z\rangle=\frac{b}{a}$이므로 $\langle \bar{z}+\frac{1}{z}\rangle\neq\langle z\rangle$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

D039 복소수의 성질을 이용하여 문제해결하기 정답 27

두 복소수 α, β를 $\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$라 할 때 [정답률 24%]

❶ α^2, α^3의 값을 차례로 구하여 규칙성을 찾는다.

$\alpha^m\times\beta^n=i$

를 만족시키는 10 이하의 자연수 m, n에 대하여 $m+2n$의 최댓값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

27

Step ❶ α^2, α^3의 값을 구한다.

$\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$에서

$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$ …… ㉠

$\alpha^3=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i$ …… ㉡

$\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1$ …… ㉢

Step ❷ $\alpha^m\beta^n$을 α에 대한 식으로 변형한다.

㉠에서 $\alpha^m\times\beta^n=\alpha^m(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

㉡에서 $\alpha^m\times\beta^n=\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값 중 최소인 자연수는 3이고 ㉢에 의하여 $m+2n$이 가질 수 있는 값은 3, 15, 27, 39, …이다.

3부터 시작하여 12씩 더한다.

그런데 m, n은 각각 10 이하의 자연수이므로 $m+2n\le 30$

따라서 $m+2n$이 가질 수 있는 값은 3, 15, 27이므로 구하는 최댓값은 27이다.

E 이차방정식

문제편 pp.57~67

필수 기출

001 ④	002 10	003 240	004 ⑤	005 ④	006 7
007 5	008 27	009 4	010 ②	011 24	012 16
013 27	014 7	015 6	016 ④	017 ⑤	018 ②
019 ③	020 ③	021 ①	022 ③	023 ②	

플러스 기출

024 14	025 ④	026 ②	027 ②	028 13	029 ③
030 ⑤	031 ②	032 ②			

E001 이차방정식의 판별식 이해하기 정답 ④

x에 대한 이차방정식 [정답률 70%]

$(a^2-9)x^2=a+3$

❶ $a^2-9=(a+3)(a-3)$이므로 양변을 $(a+3)$으로 나눈다.

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 10보다 작은 자연수 a의 개수는? [3점]

❷ 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$임을 이용한다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Step ❶ 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 이용한다.

$(a^2-9)x^2=a+3$

$(a+3)(a-3)x^2=a+3$

a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1$

이차방정식 $(a-3)x^2-1=0$의 판별식을 D라 할 때 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=0^2-4(a-3)(-1)=4(a-3)>0$

$a-3>0$, $a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는

4, 5, 6, 7, 8, 9

이므로 a의 개수는 6

다른 풀이

$(a^2-9)x^2=a+3$

$(a+3)(a-3)x^2=a+3$

a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1$

$x^2=\frac{1}{a-3}$

이차방정식이 두 실근을 가지므로 $\frac{1}{a-3}>0$

$a-3>0$이므로 $a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는

4, 5, 6, 7, 8, 9

이므로 a의 개수는 6이다.

E002 근과 계수의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 10

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 이차함수 [정답률 22%]
$f(x)=x^2+px+q$가 $f(\alpha^2)=-4\alpha$와 $f(\beta^2)=-4\beta$를 만족시킬 때,
❶ 두 근 α, β의 합이 1임을 이용하여 $f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$를 변형하여 $f(x)$를 구한다.
두 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. [4점] 10

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $f(\alpha^2)$, $f(\beta^2)$의 식을 변형한다.

α, β가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$

또 α가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha+1=-\beta$이므로 $\alpha^2=\beta$

같은 방법으로 $\beta^2=\alpha$

$f(\alpha^2)=f(\beta)=4\beta+4$, $f(\beta^2)=f(\alpha)=4\alpha+4$이므로

$f(\beta)-4\beta-4=0$, $f(\alpha)-4\alpha-4=0$

Step ❷ $f(x)$를 구한다.

이때 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

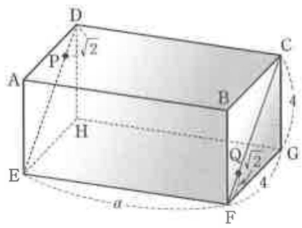
$f(x)-4x-4=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$

따라서 $f(x)=x^2+5x+5$이므로

$p+q=5+5=10$

E003 이차방정식을 이용하여 최단거리 문제해결하기 정답 240

그림과 같이 밑면의 두 변의 길이가 각각 a $(a>5)$와 4이고 [정답률 19%]
높이가 4인 직육면체 ABCD$-$EFGH에서 선분 DE와 CF 위에 각각 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{2}$인 점 P와 Q를 잡는다. 점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리가 $2\sqrt{34}$일 때, $30a$의 값을 구하시오. [4점] 240
❶ 전개도를 이용하여 점 P에서 점 Q까지 가는 최단거리를 구한다.

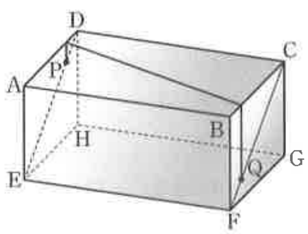


Step ❶ 점 P에서 점 Q까지 가는 최단거리를 생각해 본다.

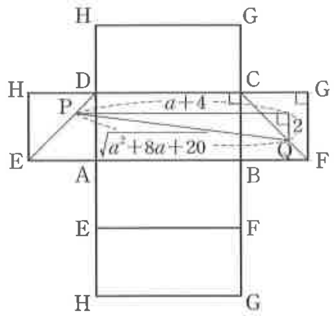
점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리를 구하기 위해 고려해야 할 경로는 아래와 같이 두 가지가 있다.

Step ❷ 전개도를 그려 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 식으로 나타낸다.

(i) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림 1]과 같다.



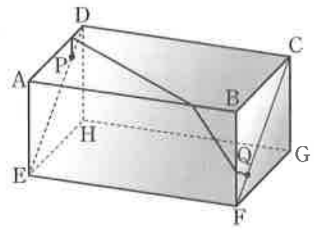
[그림 1]

[그림 1]에서

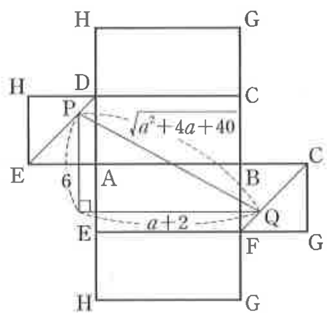
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+4)^2+2^2}$

$=\sqrt{a^2+8a+20}$

(ii) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 다음 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+2)^2+6^2}$

$=\sqrt{a^2+4a+40}$

Step ❸ 점 P에서 점 Q까지 가는 최단거리를 찾고 식의 값을 구한다.

$a>5$이므로 (i), (ii)에서

$(a^2+4a+40)-(a^2+8a+20)=-4a+20<0$

따라서 $\sqrt{a^2+4a+40}$이 최단거리이다.

즉 $\sqrt{a^2+4a+40}=2\sqrt{34}$이므로

$a^2+4a+40=136$

$a^2+4a-96=0$

$(a-8)(a+12)=0$

$a>5$이므로

$a=8$

따라서 $30a=240$

E004 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 ⑤

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근의 곱은? [2점] 　　[정답률 81%]

❶ 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$이다.

① -2 　② -1 　③ 0 　④ 1 　⑤ 2

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{2}{1}=2$

해검단 TALK

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근을 직접 구하지 않아도 두 근의 합과 곱을 바로 구할 수 있어.

다른 풀이

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근은

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

따라서 두 근의 곱은

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{7}i}{2}=\frac{(1+\sqrt{7}i)(1-\sqrt{7}i)}{4}=\frac{1-\sqrt{7}i^2}{4}=\frac{1+7}{4}=2$$

E005 이차방정식의 근 구하기 　　정답 ④

이차방정식 $x^2+4=0$의 두 근의 곱은? [2점] 　　[정답률 84%]

❶ 이차방정식 $x^2+a=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=a$이다.

① -4 　② -2 　③ 2 　④ 4 　⑤ 6

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+4=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$\alpha\beta=4$

다른 풀이

$x^2+4=0$에서 $x^2=-4$

$x=2i$ 또는 $-2i$

따라서 두 근의 곱은

$2i\times(-2i)=-4i^2=4$

E006 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 7

이차방정식 $x^2-7x+10=0$의 두 근의 합을 구하시오. [3점] 　　[정답률 89%]

❶ 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=10$이다.

7

Step ❶ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-7x+10=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 7

다른 풀이

$x^2-7x+10=0$에서

$(x-2)(x-5)=0$

$x=2$ 또는 $x=5$

따라서 두 근의 합은 $2+5=7$

E007 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 5

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 3, 4일 때, 　　[정답률 81%]

❶ $3+4=-a$, $3\times4=b$

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

5

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3+4=-a$, $3\times4=b$

따라서 $a=-7$, $b=12$이므로 $a+b=5$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 3, 4이므로

$3^2+3a+b=0$, $4^2+4a+b=0$

연립방정식 $\begin{cases}3a+b=-9\\4a+b=-16\end{cases}$에서 $a=-7$, $b=12$

따라서 $a+b=5$

E008 이차방정식의 근의 성질 이해하기 　　정답 27

이차방정식 $2x^2+6x-9=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 　　[정답률 53%]

❶ $\alpha+\beta=-\frac{6}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{-9}{2}$

$2(2\alpha^2+\beta^2)+6(2\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. [3점]

27

Step ❶ 이차방정식의 두 근이 α, β임을 이용하여 두 식 $2\alpha^2+6\alpha-9$, $2\beta^2+6\beta-9$의 값을 구한다.

이차방정식 $2x^2+6x-9=0$의 두 근이 α, β이므로

$2\alpha^2+6\alpha-9=0$, $2\beta^2+6\beta-9=0$

즉 $2\alpha^2+6\alpha=9$, $2\beta^2+6\beta=9$

$$\begin{aligned}2(2\alpha^2+\beta^2)+6(2\alpha+\beta)&=4\alpha^2+2\beta^2+12\alpha+6\beta\\&=2(2\alpha^2+6\alpha)+(2\beta^2+6\beta)\\&=2\times9+9=27\end{aligned}$$

E009 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 4

이차방정식 $x^2+8x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, [정답률 90%]
❶ $\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta=-2$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$의 값을 구하시오. [3점] 　　4

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta=-2$

따라서 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-8}{-2}=4$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+8x-2=0$의 근은

$x=-4\pm3\sqrt{2}$

이므로

$\alpha+\beta=(-4+3\sqrt{2})+(-4-3\sqrt{2})=-8$

$\alpha\beta=(-4+3\sqrt{2})(-4-3\sqrt{2})=-2$

따라서 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-8}{-2}=4$

E010 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 ②

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, [정답률 84%]
❶ $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$이다.

$\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}$의 값은? [3점]

① -7　　❷ -4　　③ -1　　④ 2　　⑤ 5

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

Step ❷ 유리식을 통분하고 곱셈 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned}\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}&=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\\&=\frac{2^3-3\times4\times2}{4}=-4\end{aligned}$$

E011 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 24

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, [정답률 67%]
❶ $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-3$이다.

$\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4}$의 값을 구하시오. [3점] 　　24

Step ❶ 이차방정식의 두 근이 α, β임을 이용하여 두 식 $\alpha^2+4\alpha-4$, $\beta^2+4\beta-4$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+4\alpha-3=0$, $\beta^2+4\beta-3=0$

이 성립한다. 따라서

$\alpha^2+4\alpha-4=-1$, $\beta^2+4\beta-4=-1$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4}&=\frac{6\beta}{-1}+\frac{6\alpha}{-1}\\&=-6(\beta+\alpha)\\&=-6\times(-4)=24\end{aligned}$$

E012 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 16

이차방정식 $3x^2-16x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, [정답률 77%]
❶ $\alpha+\beta=\frac{16}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$이다.

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하시오. [3점] 　　16

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$3x^2-16x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{16}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$

Step ❷ 유리식을 통분한다.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}}=16$$

E013 이차방정식의 근의 성질 이해하기 　　정답 27

이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, [정답률 56%]
❶ $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-2$이다.

$\alpha^2-5\beta$의 값을 구하시오. [3점] 　　27

Step ❶ 이차방정식의 근의 성질을 이용하여 α^2을 α로 나타낸다.

α는 이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+5\alpha-2=0$

$\alpha^2=-5\alpha+2$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-5$이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2-5\beta&=(-5\alpha+2)-5\beta\\&=-5(\alpha+\beta)+2\\&=27\end{aligned}$$

E014 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 7

이차방정식 $x^2-ax+a-3=0$의 두 근의 합이 10일 때, [정답률 76%]
❶ 두 근의 합이 10임을 이용하여 a의 값을 구하고 두 근의 곱을 구한다.
두 근의 곱을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]
7

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한다.

이차방정식 $x^2-ax+a-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a-3$

Step ❷ 상수 a의 값을 대입하여 두 근의 곱을 구한다.

두 근의 합이 10이므로

$a=10$

따라서 두 근의 곱은 $a-3=7$이다.

E015 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 6

방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근의 합을 구하시오. [3점] [정답률 92%]
❶ $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이다.
6

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근의 합은 6이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=3\pm\sqrt{3^2-3}=3\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 방정식의 두 근의 합은

$(3+\sqrt{6})+(3-\sqrt{6})=6$

E016 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 ④

이차방정식 [정답률 84%]

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

❶ 좌변을 전개하여 $px^2+qx+r=0$의 꼴로 정리하여 근과 계수의 관계를 이용한다.

의 두 근의 합과 곱이 각각 4, -3일 때, 이차방정식

$(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=0$

❷ 좌변을 전개한 다음 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 곱을 구한다.

의 두 근의 곱은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① 15　② 16　③ 17　❹ 18　⑤ 19

Step ❶ 식을 전개하여 근과 계수의 관계를 이용한다.

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

$=x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca$

$=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{2(a+b+c)}{3}=4$에서 $a+b+c=6$

$\dfrac{ab+bc+ca}{3}=-3$에서 $ab+bc+ca=-9$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 곱을 구한다.

$(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=0$에서

$(x^2-2ax+a^2)+(x^2-2bx+b^2)+(x^2-2cx+c^2)=0$

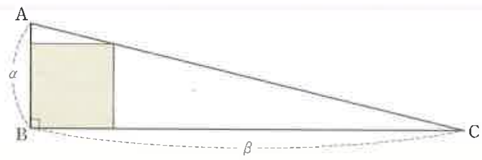
$3x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{3}&=\frac{1}{3}\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}\\&=\frac{1}{3}(36+18)\\&=18\end{aligned}$$

E017 근과 계수의 관계를 이용하여 문제해결하기 　　정답 ⑤

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자. [정답률 46%]
❶ $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$이다.
그림과 같이 $\overline{AB}=\alpha$, $\overline{BC}=\beta$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 넓
❷ 정사각형의 한 변의 길이를 k라 놓고 식을 세운다.
이와 둘레의 길이를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식이 $4x^2+mx+n=0$일 때, 두 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (단, 정사각형의 두 변은 선분 AB와 선분 BC 위에 있다.) [4점]



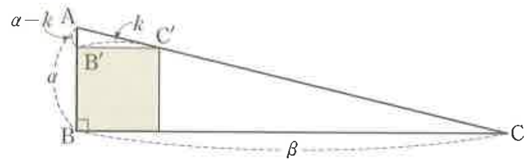
① -11　② -10　③ -9　④ -8　❺ -7

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

Step ❷ 정사각형의 한 변의 길이를 k라 놓고 두 삼각형의 닮음비를 이용하여 k의 값을 구한다.



직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면 두 삼각형 ABC와 AB′C′은 닮음이므로

$\alpha:\beta=\alpha-k:k$

$\beta(\alpha-k)=\alpha k$

$\alpha\beta-\beta k=\alpha k$

$\alpha\beta=(\alpha+\beta)k$

따라서 $k=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Step ❸ 정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 구하고 그 두 값을 근으로 하는 최고차항의 계수가 4인 이차방정식을 구한다.

정사각형의 넓이는 $k^2=\frac{1}{4}$

정사각형의 둘레의 길이는 $4k=2$

이 두 수를 두 근으로 갖는 최고차항의 계수가 4인 이차방정식은

$4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)=4x^2-9x+2=0$

따라서 $m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-9+2=-7$

다른 풀이

정사각형의 넓이 $k^2=\frac{1}{4}$과 둘레의 길이 $4k=2$를 두 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 $\frac{9}{4}$이고 곱이 $\frac{1}{2}$이므로

$x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}=0$

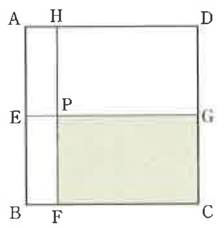
$4x^2-9x+2=0$

따라서 $m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-9+2=-7$

E018 근과 계수의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 ②

한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P를 지나고 정사각형의 각 변에 평행한 두 직선이 정사각형의 네 변과 만나는 점을 각각 E, F, G, H라 하자. [정답률 69%]



직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이고 넓이가 46일 때, 두 선분 AE와 AH의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, 이차방정식의 이차항의 계수는 1이다.) [4점]

❶ $\overline{\mathrm{AE}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{AH}}=\beta$로 놓고 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

① $x^2-6x+4=0$　② $x^2-6x+6=0$　③ $x^2-6x+8=0$
④ $x^2-8x+6=0$　⑤ $x^2-8x+8=0$

Step ❶ $\overline{\mathrm{AE}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{AH}}=\beta$로 놓고 직사각형 PFCG의 변의 길이를 나타낸다.

$\overline{\mathrm{AE}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{AH}}=\beta$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=10-\alpha$, $\overline{\mathrm{PG}}=10-\beta$

Step ❷ 직사각형 PFCG의 둘레의 길이와 넓이를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

직사각형 PFCG의 둘레의 길이는 28이므로

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$

$\alpha+\beta=6$

또 직사각형 PFCG의 넓이는 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$\alpha\beta=6$

따라서 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

E019 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 정답 ③

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β일 때, [정답률 61%]

❶ $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$임을 이용한다.

$\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta$의 값은? [4점]

❷ $\alpha^2-3\alpha-2=0$임을 이용하여 식을 변형한다.

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

Step ❷ α가 주어진 이차방정식의 근임을 이용하여 식을 변형한다.

또 α는 이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha-2=0$에서 $\alpha^2-3\alpha=2$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta&=\alpha(\alpha^2-3\alpha)+\alpha\beta+2\beta\\&=2\alpha+\alpha\beta+2\beta\\&=2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\\&=6-2=4\end{aligned}$$

E020 이차방정식의 근의 성질 이해하기 정답 ③

삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 두 허근을 각각 z_1, z_2라 할 때, $z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$의 값은? (단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.) [3점] [정답률 70%]

❶ 인수정리를 이용하여 실근을 찾는다. ❷ 두 허근은 서로 켤레복소수이다.

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

Step ❶ 인수정리를 이용하여 주어진 삼차식을 인수분해한다.

주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1^3+1^2+1-3=0$

이므로 주어진 삼차방정식은 $x=1$을 근으로 갖는다.

따라서 삼차식 x^3+x^2+x-3은 $x-1$을 인수로 갖고

$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$

이다.

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

따라서 z_1, z_2는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 허근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z_1z_2=3$

Step ❸ 이차방정식의 켤레근을 이용한다.

이때 이차방정식의 두 허근은 서로 켤레복소수이므로

$z_1=\overline{z_2}$, $z_2=\overline{z_1}$
이다. 따라서
$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=z_1z_2+z_2z_1=2z_1z_2=2\times3=6$

E021 이차방정식의 근의 성질을 이용하여 문제해결하기 정답 ①

다항식 $f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 실수)가 다음 두 조건을 만족시킨다. [정답률 70%]

(가) 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 1이다.
❶ $f(1)=1$임을 이용한다.
(나) 실수 a에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 $a+i$이다.
❷ 다른 한 근은 $a-i$임을 이용한다.

$p+2q$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

❶ 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ❶ 조건 (가)에서 나머지정리를 이용한다.

조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=1+p+q=1$이므로
$p+q=0$ …… ㉠

Step ❷ 이차방정식의 켤레근을 이용한다.

조건 (나)에서 한 근이 $a+i$이므로 $a-i$도 이차방정식 $f(x)=0$의 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-p=(a+i)+(a-i)$, $q=(a+i)(a-i)$
$p=-2a$, $q=a^2+1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $p+q=-2a+a^2+1=0$
$(a-1)^2=0$이므로
$a=1$, $p=-2$, $q=2$
따라서 $p+2q=2$

해검단 TALK
다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 나머지정리에 의하여 $R=f(\alpha)$야.

E022 실수의 성질을 이용하여 이차방정식 문제해결하기 정답 ③

세 유리수 a, b, c에 대하여 x에 대한 이차방정식 [정답률 41%]
$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $\alpha=2+\sqrt{3}$이다.
❶ $x=2+\sqrt{3}$을 대입하여 a, b, c의 관계식을 구한다.
다른 한 근을 β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$의 값은? [4점]

① -4 ② $-2\sqrt{3}$ ❸ 0 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

Step ❶ 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 a, b, c의 관계식을 구한다.

$2+\sqrt{3}$은 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이므로
$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$
→ 문제에서 이차방정식이라 하였으므로 $a\neq0$
$(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$
이때 a, b, c가 유리수이므로
$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$
에서 $b=-2a$, $c=-a$
따라서 주어진 방정식은
$a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$
이므로 $\alpha+\beta=2\sqrt{3}$
따라서 $\beta=2\sqrt{3}-\alpha=2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=-2+\sqrt{3}$이므로

$$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$$
$$=2+\sqrt{3}+\frac{-2-\sqrt{3}}{(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})}$$
$$=2+\sqrt{3}+(-2-\sqrt{3})=0$$

다른 풀이 1

$t=\sqrt{3}x$로 놓으면 주어진 방정식은
$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0$, 즉 $at^2+3bt+3c=0$
이 방정식은 한 근이 $t=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $t=3-2\sqrt{3}$이다.
따라서 주어진 방정식의 다른 한 근은
$$\beta=\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$$
이므로
$$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$$

다른 풀이 2

$\alpha=2+\sqrt{3}$에서 $\alpha-\sqrt{3}=2$이고 양변을 제곱하여 정리하면
$\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha+1=0$
따라서 α는 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x+1)=0$의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+\sqrt{3}+\beta=2\sqrt{3}$이므로 $\beta=-2+\sqrt{3}$
따라서 $\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$

E023 근과 계수의 관계와 복소수의 뜻을 이용하여 문제해결하기 정답 ②

x에 대한 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근 α를 가질 때, [정답률 38%]
❶ $\alpha=a+bi$로 놓고 켤레근의 성질, 근과 계수의 관계를 이용한다.
α^3이 실수가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 곱은? [4점]
❷ α^3의 허수부분이 0임을 이용한다.

① -2 ❷ -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

Step ❶ 이차방정식의 켤레근을 찾는다.

복소수 α가 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이면 $\overline{\alpha}$도 근이고 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이다.

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b를 p에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2-px+p+3=0$의 두 근이 $\alpha=a+bi$, $\overline{\alpha}=a-bi$이므로
$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p$, $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$
$a=\frac{p}{2}$, $b^2=-a^2+p+3=-\frac{p^2}{4}+p+3$ …… ㉠

Step ❸ 복소수의 뜻을 생각하여 p의 값의 곱을 구한다.

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$\quad=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

α^3이 실수이므로 허수부분인 $3a^2b-b^3=0$이다.

$b\neq0$이므로 $b^2=3a^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 p에 대한 식으로 나타내면

$-\frac{p^2}{4}+p+3=3\left(\frac{p}{2}\right)^2$, $p^2-p-3=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

다른 풀이 1

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $D=p^2-4(p+3)<0$에서 $-2<p<6$

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$에서 $\alpha^2=p\alpha-p-3$

$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=p\alpha^2-(p+3)\alpha$

$\quad=p(p\alpha-p-3)-(p+3)\alpha$

$\quad=(p^2-p-3)\alpha-p(p+3)$

α^3은 실수, $p(p+3)$은 실수, α는 허수이므로 $p^2-p-3=0$

이때 $p^2-p-3=0$의 두 실근은 -2와 6 사이에 존재한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

다른 풀이 2

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $D=p^2-4(p+3)<0$에서 $-2<p<6$

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$이고, $\alpha^2-p\alpha+p^2=p^2-p-3$이다.

식의 양변에 $\alpha+p$를 각각 곱하면

$\alpha^3+p^3=(\alpha+p)(p^2-p-3)$이므로 $\alpha^3=(p^2-p-3)\alpha-p(p+3)$

α^3이 실수이므로 $p^2-p-3=0$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

E024 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 14

x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근을 α와 β, 　　[정답률 44%]
❶ $\alpha+\beta=-a+4$, $\alpha\beta=-1$임을 이용한다.
$x^2+ax+b=0$의 두 근을 α와 γ라 하자. 상수 a, b에 대하여 $2\alpha=\beta-\gamma$가 성
❷ $\alpha+\gamma=-a$, $\alpha\gamma=b$임을 이용한다.
❸ $\alpha+\beta$와 $\alpha+\gamma$를 이용하여 $\beta-\gamma$의 값을 구한다.
립할 때, $2a-b$의 값을 구하시오. [4점] 　　14

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$\alpha\gamma=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

Step ❷ 식을 연립하여 식의 값을 구한다.

㉠$-$㉢을 하면 $\beta-\gamma=4$이므로 $2\alpha=\beta-\gamma=4$

따라서 $\alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 대입하여 풀면

$\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=-\frac{9}{2}$, $a=\frac{5}{2}$, $b=-9$

따라서 $2a-b=2\times\frac{5}{2}-(-9)=14$

E025 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 　　정답 ④

이차방정식 $x^2-ax-3a=0$ $(a>0)$의 서로 다른 두 실근 　　[정답률 79%]
❶ $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-3a$임을 이용한다.
α, β에 대하여 $|\alpha|+|\beta|=8$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? [4점]
❷ $a>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$에서 $\alpha<0<\beta$로 놓는다.

① 34 　② 36 　③ 38 　④ 40 　⑤ 42

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-ax-3a=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-3a$

Step ❷ $a>0$과 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구한다.

이때 $a>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$에서 두 근 α, β의 부호는 다르고 양수인 근의 절댓값이 더 크므로

$\alpha<0<\beta$, $|\alpha|>|\beta|$

로 놓을 수 있다.

$(|\alpha|+|\beta|)^2=(-\alpha+\beta)^2$

$\qquad=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\qquad=a^2+12a$

이때 $|\alpha|+|\beta|=8$이므로

$8^2=a^2+12a$

$a^2+12a-64=0$, $(a-4)(a+16)=0$

$a>0$이므로 $a=4$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+6a=16+24=40$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-ax-3a=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-3a$, $|\alpha|+|\beta|=8$

$a>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$에서 $\alpha<0<\beta$라 하면

$-\alpha+\beta=8$, $\beta=\alpha+8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-3a$에서

$\alpha\beta=-3(\alpha+\beta)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha(\alpha+8)=-3(2\alpha+8)$, $\alpha^2+14\alpha+24=0$, $(\alpha+2)(\alpha+12)=0$

$\alpha=-12$이면 $\beta=-12+8=-4$이므로 $\alpha<0<\beta$을 만족하지 않고,

$\alpha=-2$이면 $\beta=-2+8=6$이므로 주어진 조건을 만족한다.
따라서 $\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+6^2=40$

E026 복소수의 성질을 이용하여 문제해결하기 정답 ②

0이 아닌 세 복소수 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 12%]

(가) $\alpha+\beta+\gamma=0$
(나) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$

이때, $\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$의 값은?

❶ $\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$의 값을 구할 수 있도록 (가), (나)의 식을 변형한다.

(단, $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$는 $\frac{\alpha}{\beta}$의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

Step ❶ 두 조건을 이용하여 식을 변형한다.

조건 (나)에서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1}{\gamma}$
조건 (가)에서 $\alpha+\beta=-\gamma$이므로
$\frac{-\gamma}{\alpha\beta}=-\frac{1}{\gamma}$
$\alpha\beta=\gamma^2$ …… ㉠
같은 방법으로 조건 (나)에서 $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{1}{\alpha}$이므로 $\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}=-\frac{1}{\alpha}$
조건 (가)에서 $\beta+\gamma=-\alpha$이므로
$\frac{-\alpha}{\beta\gamma}=-\frac{1}{\alpha}$
$\beta\gamma=\alpha^2$ …… ㉡
다시 같은 방법으로 조건 (나)에서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{1}{\beta}$이므로
$\frac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma}=-\frac{1}{\beta}$
조건 (가)에서 $\alpha+\gamma=-\beta$이므로
$\frac{-\beta}{\alpha\gamma}=-\frac{1}{\beta}$
$\gamma\alpha=\beta^2$ …… ㉢
조건 (나)에서 $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=0$이므로
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$
㉠, ㉡, ㉢에서 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$

Step ❷ 이차방정식을 이용하여 값을 구한다.

$\beta^2=\gamma\alpha$이므로
$\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=0$ …… ㉣
㉣의 양변을 α^2으로 나누면
$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}+1=0$ → 근의 공식을 이용한다.
따라서 $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
㉡에서 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$이므로
$\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}=-1$

E027 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 정답 ②

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이고 [정답률 75%]
❶ $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$임을 이용한다.
$x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.
❷ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-b$, $\frac{1}{\alpha\beta}=a$임을 이용한다
$a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]
❸ α, β의 관계식을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠
$x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-b$, $\frac{1}{\alpha\beta}=a$ …… ㉡

Step ❷ 식을 연립하여 식의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-b$이므로
$\frac{-a}{b}=-b$에서 $a=b^2$ …… ㉢
$\frac{1}{\alpha\beta}=a$이므로 $\frac{1}{b}=a$에서 $ab=1$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $a=1$, $b=1$이므로 $a+b=2$

E028 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기 정답 13

x에 대한 이차방정식 $x^2+(1-3m)x+2m^2-4m-7=0$의 [정답률 53%]
❶ 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=3m-1$, $\alpha\beta=2m^2-4m-7$이다.
두 근의 차가 4가 되도록 하는 실수 m의 모든 값의 곱을 구하시오. [4점] 13
❷ 두 근을 α, β라 할 때 $|\alpha-\beta|=4$이다.

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

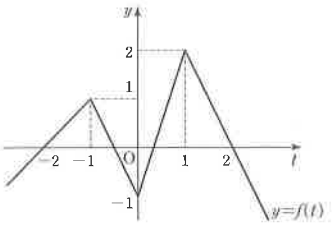
이차방정식 $x^2+(1-3m)x+2m^2-4m-7=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3m-1$, $\alpha\beta=2m^2-4m-7$

Step ❷ $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$임을 이용하여 m에 관한 이차방정식을 얻고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

두 근의 차가 4이므로 $|\alpha-\beta|=4$에서
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(3m-1)^2-4(2m^2-4m-7)=16$ …… ㉠
㉠을 정리하면 $m^2+10m+13=0$ → $\frac{D}{4}=25-13>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 실수 m의 모든 값의 곱은 13이다.

E029 함수의 그래프를 이용하여 이차방정식의 근 추론하기 정답 ③

함수 $y=f(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-2xf(t)+f(t)=0$의 근에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점] [정답률 47%]



〈보기〉

ㄱ. $f(t)$의 값이 최대일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.
❶ $t=1$일 때, 최댓값 2를 갖는다. ❷ $D>0$

ㄴ. 중근을 갖게 하는 서로 다른 실수 t는 7개이다.
❸ $D=0$

ㄷ. $|t|>2$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.
❹ $D<0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 이차방정식의 판별식을 $f(t)$에 관한 식으로 나타내고 〈보기〉의 참, 거짓을 판별한다.

이차방정식 $x^2-2xf(t)+f(t)=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=f(t)\{f(t)-1\}$

ㄱ. $f(t)$의 값은 $t=1$일 때 최댓값 2를 갖는다. 즉 $f(t)$의 값이 최대일 때 $\frac{D}{4}=2(2-1)>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 중근을 갖게 하려면 $\frac{D}{4}=0$에서 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=1$이어야 하고 $f(t)=0$인 t의 개수는 4, $f(t)=1$인 t의 개수는 3이다.
따라서 서로 다른 실수 t는 7개이다. (참)

ㄷ. $|t|>2$일 때, $f(t)<0$이므로 $\frac{D}{4}>0$이다.
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

E030 이차방정식의 근의 성질을 이용하여 추론하기 정답 ⑤

계수가 실수인 x에 대한 두 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+2bx+c=0$의 근에 대한 설명이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] [정답률 65%]

〈보기〉

ㄱ. 두 이차방정식에서 각각의 두 근의 곱은 서로 같다.
❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

ㄴ. $ac>0$이면 두 이차방정식은 실수인 공통근을 갖지 않는다.

ㄷ. $ax^2+2bx+c=0$이 허근을 가지면 $ax^2+bx+c=0$도 허근을 가진다.
❷ 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D<0$임을 이용한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β,
이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 두 근을 α', β'이라 하면
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\alpha'\beta'=\frac{c}{a}$이므로 $\alpha\beta=\alpha'\beta'$이다. (참)

Step ❷ 귀류법을 이용한다.

ㄴ. 실수인 공통근 α가 존재한다고 하자.

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …… ㉠

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $b\alpha=0$이고 $ac>0$, $\alpha\neq0$이므로 $b=0$이다.

$\alpha^2=-\frac{c}{a}$이고 $ac>0$이므로 α가 실수라는 조건에 모순이 된다.
따라서 $ac>0$이면 두 이차방정식은 실수인 공통근을 갖지 않는다. (참)

Step ❸ 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D<0$임을 이용한다.

ㄷ. $ax^2+2bx+c=0$이 허근을 가지면 판별식 $4b^2-4ac<0$이므로
$ax^2+bx+c=0$의 판별식 $b^2-4ac\leq4b^2-4ac<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

E031 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기 정답 ②

방정식 $(x-3)(x-1)(x+2)+1=x$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값은? [4점] [정답률 54%]
❶ (우변)$=0$이 되도록 식을 변형하고 인수정리를 이용하여 인수분해한다.

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

Step ❶ (우변)$=0$이 되도록 식을 변형하여 인수분해한다.

$(x-3)(x-1)(x+2)+1=x$에서
$(x-3)(x-1)(x+2)-(x-1)=0$이고
$(x-1)(x^2-x-7)=0$이므로 삼차방정식의 한 근은 1이고 나머지 두 근은 $x^2-x-7=0$의 근이다.

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이때 $\gamma=1$이라 하고 이차방정식 $x^2-x-7=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-7$이다.

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=22$이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=23$

E032 이차방장정식의 근과 계수의 관계 및 양의 약수 추론하기 정답 ②

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c와 d일 때, 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는? (단, a와 b는 상수이다.) [4점] [정답률 41%]
❶ $c+d=a$, $cd=b$이다.

(가) a, b, c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이다.
(나) c와 d는 각각 3개의 양의 약수를 가진다.
❷ c와 d는 1, p, p^2 (단, p는 소수) 꼴의 약수를 가져야 한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 c, d가 될 수 있는 수를 구한다.

양의 약수가 홀수 개인 자연수는 제곱수이며 양의 약수가 3개인 것은 소수의 제곱수이다.

조건 (나)에서 c, d는 2^2, 3^2, 5^2, 7^2의 네 가지 중 하나이다.

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a=c+d$, $b=cd$이고 조건 (가)에서 a, b는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는 $(2^2+3^2, 2^2\times3^2)$과 $(2^2+5^2, 2^2\times5^2)$으로 그 개수는 2이다.

F 이차방정식과 이차함수

문제편 pp.68~91

필수 기출

001 ②	002 2	003 8	004 ③	005 27	006 ⑤
007 ②	008 ⑤	009 ④	010 ⑤	011 ③	012 ②
013 ⑤	014 ③	015 ④	016 24	017 ②	018 ②
019 4	020 20	021 ②	022 ②	023 ③	024 ④
025 ③	026 48	027 ④	028 ④	029 39	030 7
031 ①	032 ②	033 ⑤	034 25	035 ②	036 110
037 ③	038 ⑤	039 11	040 33	041 ④	042 ②
043 50	044 243	045 20	046 ⑤	047 54	048 12
049 ①	050 ①	051 ⑤	052 360	053 ⑤	054 ④

플러스 기출

055 ⑤	056 4	057 750	058 ④	059 ①	060 9
061 15	062 ③	063 ②			

F001 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 이해하기 정답 ②

이차함수 $y=x^2-5x+k$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점 [정답률 82%]
❶ 이차방정식의 판별식을 이용한다.
에서 만나도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

Step ❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 자연수 k의 최댓값을 구한다.

이차함수 $y=x^2-5x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-5x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 그러므로 이차방정식 $x^2-5x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k=25-4k>0$

$k<\frac{25}{4}=6.25$

따라서 자연수 k의 최댓값은 6

F002 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 이해하기 정답 2

이차함수 $y=x^2+2(a-4)x+a^2+a-1$의 그래프가 x축과 [정답률 67%]
❶ 이차방정식의 판별식을 이용한다.
만나지 않도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하시오. [3점] 2

Step ❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 미지수의 최솟값을 구한다.

이차방정식 $x^2+2(a-4)x+a^2+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-4)^2-(a^2+a-1)<0$

$-9a+17<0$, $a>\frac{17}{9}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

F003 근과 계수의 관계와 이차함수의 그래프 이해하기 정답 8

최고차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 [정답률 66%]
α, β라 하자. $\alpha+\beta=6$이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있을 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [3점] 8

❶ $f(x)=x^2-6x+k$로 놓고 꼭짓점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있음을 이용한다.

Step ❶ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 α, β를 이용하여 나타낸다.

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-\alpha)(x-\beta)\\ &=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\\ &=x^2-6x+\alpha\beta\\ &=(x-3)^2-9+\alpha\beta \end{aligned}$$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(3, -9+\alpha\beta)$이다.

Step ❷ 꼭짓점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있음을 이용하여 $\alpha\beta$의 값을 구한다.

$y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있으므로
$-9+\alpha\beta=2\times3-7$, $\alpha\beta=8$
따라서 $f(x)=x^2-6x+8$이므로
$f(0)=8$

다른 풀이

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이고 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=3$이므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 3이다.
이차함수의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있으므로
꼭짓점의 좌표는 $(3, -1)$
이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x-3)^2-1$
따라서 $f(0)=8$

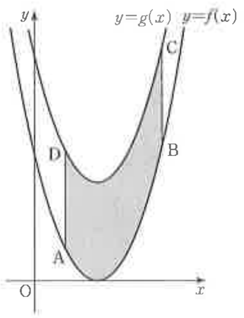
F004 이차함수의 그래프의 평행이동 문제해결하기 정답 ③

그림과 같이 두 이차함수 [정답률 79%]
$f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x-2)^2+3$의 그래프 위에 네 점 $A(1, f(1))$,

❶ 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 선분 AD와 선분 BC는 평행하고 길이가 같음을 이용한다.

$B(4, f(4))$, $C(4, g(4))$, $D(1, g(1))$이 있다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 선분 AD, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

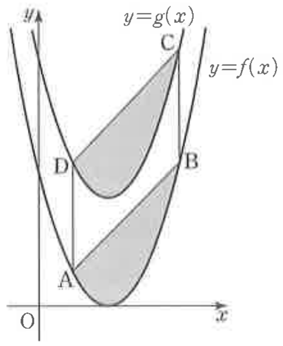
❷ 선분 CD와 선분 AB를 그으면 그래프에서 색칠된 부분의 넓이가 사각형 ABCD의 넓이와 같음을 이용한다.



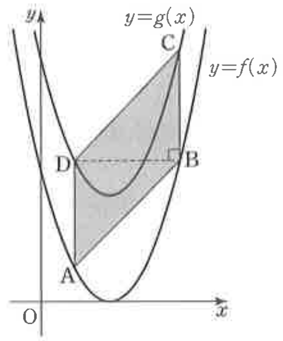
① 7 ② 8 ❸ 9 ④ 10 ⑤ 11

Step ❶ 두 함수의 그래프와 선분으로 둘러싸인 부분의 성질을 파악한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 선분 CD와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분과 선분 AB와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.



따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 선분 AD, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 ABCD의 넓이와 같다.
또 선분 AD와 선분 BC는 평행하고 길이가 같으므로 사각형 ABCD는 평행사변형이 된다.



Step ❷ 평행사변형의 넓이를 구한다.

$\overline{AD}=g(1)-f(1)=3$이고, 점 A의 x좌표가 1, 점 B의 x좌표가 4이므로 평행사변형 ABCD의 높이는 3이다.
따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는 $3\times3=9$

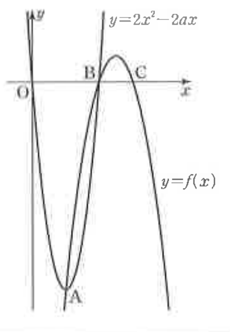
F005 이차함수의 그래프와 x축의 교점 구하기 정답 27

양수 a에 대하여 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프의 꼭짓점 [정답률 38%]

❶ 주어진 이차함수의 식을 완전제곱식으로 변형한다.

을 A, x축과 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자. 점 A를 지나고 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는 3이다. 삼각형 ACB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 27

❷ ❶을 이용하여 두 점 B, C의 좌표를 구한다.



Step 1 **주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표를 구한다.**

$y=2x(x-a)=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$이므로 두 점 A, B의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2}\right)$, $(a, 0)$

이때 선분 BC의 길이는 3이므로 점 C의 좌표는

$C(a+3, 0)$

즉 함수 $y=f(x)$의 x절편이 a, $a+3$

이때 함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수는 -1이므로

$f(x)=-(x-a)\{x-(a+3)\}$

$\quad=-(x-a)(x-a-3)$

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 A를 지나므로

$-\frac{a^2}{2}=-\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-3\right)$

$a^2-6a=0$, $a=6(a>0)$

Step 2 **삼각형 ACB의 넓이를 구한다.**

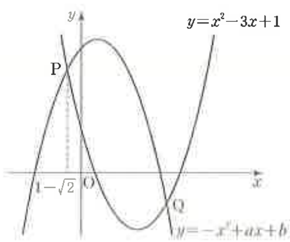
따라서 $A(3, -18)$이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times18=27$

F006 두 이차함수의 그래프의 교점의 좌표 이해하기 정답 ⑤

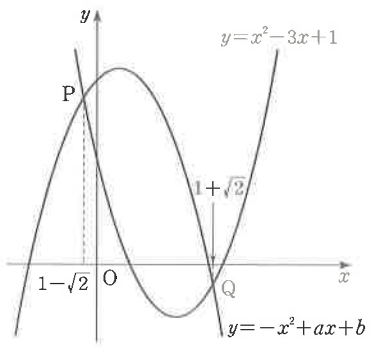
그림과 같이 유리수 a, b에 대하여 두 이차함수 [정답률 65%]
$y=x^2-3x+1$과 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P의 x좌표가 $1-\sqrt{2}$일 때, $a+3b$의 값은? [4점]

❶ 이차방정식의 계수가 유리수일 때 한 근이 $1-\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step 1 **두 이차함수의 그래프의 교점의 x좌표의 의미를 이해한다.**



이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-x^2+ax+b=x^2-3x+1$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 실근이다.

이때 a, b는 유리수이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$이면 나머지 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

Step 2 **이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $a+3b$의 값을 구한다.**

따라서 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=\frac{3+a}{2}$, $(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})=\frac{1-b}{2}$

즉 $a=1$, $b=3$이므로 $a+3b=10$

F007 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 ②

어떤 퇴적물 입자를 정지된 유체 속으로 떨어뜨리게 되면 [정답률 65%]
처음 얼마 동안은 중력의 영향으로 그 입자는 가속을 받게 되나 유체의 저항력으로 인하여 곧 입자에 작용하는 중력과 유체의 저항력이 같게 되어 이 퇴적물 입자는 일정한 속도로 가라앉게 된다.

점성도가 μ이고 밀도가 λ인 유체 내에서 퇴적물의 일정한 하강 속도를 V, 퇴적물 입자의 밀도를 ρ, 퇴적물 입자의 직경을 D라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$V=\frac{(\rho-\lambda)g}{18\mu}D^2 \text{ (단, } g\text{는 중력가속도이다.)}$$

점성도가 $k(k>0)$이고 밀도가 $c(c>0)$인 유체 속으로 두 퇴적물 입자 A, B를 각각 떨어뜨렸을 때 두 퇴적물 입자 A, B의 일정한 하강 속도를 각각 V_A, V_B라 하자. 두 퇴적물 입자 A, B의 밀도가 각각 $4c$, $7c$이고, 퇴적물 입자 A의 직경과 퇴적물 입자 B의 직경의 비가 $2:5$일 때, $\frac{V_A}{V_B}$의 값은? [4점]

❶ 양수 t에 대하여 퇴적물 입자 A, B의 직경을 $2t$, $5t$로 놓고 V_A, V_B를 구한다.

① $\frac{3}{50}$ ② $\frac{2}{25}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{3}{25}$ ⑤ $\frac{7}{50}$

Step 1 **퇴적물 입자 A, B의 직경의 비를 이용하여 식을 세운다.**

퇴적물 입자 A, B의 직경을 각각 D_A, D_B라 할 때

$D_A:D_B=2:5$이므로 양수 t에 대하여

$D_A=2t$, $D_B=5t$로 나타낼 수 있다.

Step 2 **V_A, V_B를 각각 구하여 $\frac{V_A}{V_B}$의 값을 구한다.**

$V_A=\left(\frac{4c-c}{18k}\right)\times g\times(2t)^2=\frac{2cgt^2}{3k}$

$V_B=\left(\frac{7c-c}{18k}\right)\times g\times(5t)^2=\frac{25cgt^2}{3k}$

따라서 $\frac{V_A}{V_B}=\frac{2}{25}$

F008 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

행성의 인력에 의하여 주위를 공전하는 천체를 위성이라고 한 [정답률 75%] 다. 행성과 위성 사이의 거리를 r(km), 위성의 공전 속력을 v(km/sec), 행성의 질량을 M(kg)이라고 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$M=\frac{rv^2}{G} \text{ (단, } G\text{는 만유인력상수이다.)}$$

행성 A와 A의 위성 사이의 거리가 행성 B와 B의 위성 사이의 거리의 45배일 때, 행성 A의 위성의 공전 속력이 행성 B의 위성의 공전 속력의 $\frac{2}{3}$배이다.

❶ 행성과 위성 사이의 거리와 위성의 공전 속력을 식으로 나타낸다.

행성 A와 행성 B의 질량을 각각 M_A, M_B라 할 때, $\frac{M_A}{M_B}$의 값은? [4점]

❷ M_A에 ❶에서 구한 식을 대입한다.

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

Step ❶ 행성과 위성 사이의 거리와 위성의 공전 속력을 식으로 나타낸다.

행성 A와 A의 위성 사이의 거리와 행성 B와 B의 위성 사이의 거리를 각각 r_A, r_B라 하면

$r_A=45r_B$ …… ㉠

행성 A의 위성의 공전 속력과 행성 B의 위성의 공전 속력을 각각 v_A, v_B라 하면

$v_A=\frac{2}{3}v_B$ …… ㉡

Step ❷ M_A에 ㉠, ㉡을 대입하여 M_A와 M_B 사이의 비를 구한다.

㉠과 ㉡에 의하여

$$\begin{aligned} M_A&=\frac{r_Av_A^2}{G} \\ &=\frac{45r_B\left(\frac{2}{3}v_B\right)^2}{G} \\ &=20\times\frac{r_Bv_B^2}{G} \\ &=20M_B \end{aligned}$$

따라서 $\frac{M_A}{M_B}=20$

F009 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 ④

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점 [정답률 41%] 이 직선 $y=kx$ 위에 있다.

❶ 꼭짓점의 좌표를 (a, ka)로 놓는다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=kx+5$와 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 α, β라 하자.

❷ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 a, k로 나타낸다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}$일 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

❸ k의 값을 구하고 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{23}{6}$ ③ $\frac{25}{6}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

Step ❶ $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a, ka)로 놓는다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a, ka)로 놓으면

$f(x)=(x-a)^2+ka$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합, 곱을 식으로 나타낸다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+5$가 만나는 두 점의 x좌표 α, β는 방정식 $(x-a)^2+ka=kx+5$의 두 근이므로

$x^2-(2a+k)x+a^2+ka-5=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a+k$ …… ㉠

$\alpha\beta=a^2+ka-5$ …… ㉡

Step ❸ $y=f(x)$의 그래프의 축을 이용하여 $|\alpha-\beta|$의 값을 구한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}=a$

따라서 $\alpha+\beta=2a+\frac{1}{2}$

㉠에서 $2a+\frac{1}{2}=2a+k$이므로 $k=\frac{1}{2}$

㉡에서 $\alpha\beta=a^2+ka-5=a^2+\frac{1}{2}a-5$

따라서

$$\begin{aligned} |\alpha-\beta|&=\sqrt{(\alpha-\beta)^2} \\ &=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \\ &=\sqrt{\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(a^2+\frac{1}{2}a-5\right)} \\ &=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

F010 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

후드로 흡입된 오염된 공기는 덕트를 통해 이동된다. [정답률 67%]

덕트 안의 공기의 밀도를 r, 공기의 속력을 v, 압력을 P라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다고 한다.

$$P=\frac{rv^2}{2g} \text{ (단, } g\text{는 중력가속도이다.)}$$

집 A에 있는 덕트 안의 공기의 밀도는 c이고 압력은 P_A, 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 밀도는 $2c$이고 압력은 P_B이다. 집 A와 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 속력의 비가 3 : 5일 때, $P_B=kP_A$이다. 상수 k의 값은? [4점]

❶ 실수 t에 대하여 두 집 A와 B의 공기의 속력을 각각 $3t$, $5t$로 놓고 식을 세워 $P_B=kP_A$임을 이용한다.

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{35}{9}$ ③ $\frac{40}{9}$ ④ 5 ⑤ $\frac{50}{9}$

Step ❶ 두 집 A와 B의 공기의 속력의 비를 이용하여 P_A와 P_B의 식을 세운다.

집 A와 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 속력의 비가 3 : 5이므로 실수 t에 대하여 집 A에 있는 덕트 안의 공기의 속력을 $3t$, 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 속력을 $5t$로 놓을 수 있다.

$$P_A=\frac{c\times(3t)^2}{2g}$$
$$=\frac{9ct^2}{2g}$$
$$P_B=\frac{2c\times(5t)^2}{2g}$$
$$=\frac{25ct^2}{g}$$

Step ❷ $P_B=kP_A$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

이때 $P_B=kP_A$이므로

$$\frac{25ct^2}{g}=k\times\frac{9ct^2}{2g}$$

따라서 $k=\frac{50}{9}$

F011 근과 계수의 관계를 이용하여 이차함수 구하기 정답 ③

이차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 [정답률 51%]

$$f(x)+x-1=0$$

의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$이고 $f(1)=-6$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

❶ 두 근의 합과 곱을 알 때, 이차방정식을 세울 수 있다.

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

Step ❶ 두 근의 합과 곱을 이용하여 $f(x)+x-1$을 나타낸다.

이차방정식 $f(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$이므로

$f(x)+x-1=k(x^2-x-3)$ (단, k는 상수) …… ㉠

또 $f(1)=-6$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+1-1=k(1^2-1-3)$

$-6+1-1=k(1^2-1-3)$

$-6=-3k$

따라서 $k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$f(x)+x-1=2(x^2-x-3)$

$f(x)=2x^2-2x-6-x+1=2x^2-3x-5$

따라서 $f(3)=2\times3^2-3\times3-5=4$

해결단 TALK

두 근의 합이 m, 곱이 n인 이차방정식은 $k(x^2-mx+n)=0$ (k는 상수)으로 놓을 수 있어.

다른 풀이

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)+x-1=ax^2+(b+1)x+(c-1)=0$의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b+1}{a}=1$에서 $b=-a-1$ …… ㉠

$\alpha\beta=\frac{c-1}{a}=-3$에서 $c=-3a+1$ …… ㉡

$f(1)=-6$이므로

$a+b+c=-6$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$, $c=-5$

따라서 $f(x)=2x^2-3x-5$이므로

$f(3)=4$

F012 이차함수를 활용하여 이차방정식의 근 이해하기 정답 ②

두 다항식 $P(x)=3x^3+x+11$, $Q(x)=x^2-x+1$에 대하여 [정답률 48%]

x에 대한 이차방정식 $P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2=0$이 2보다 작은 한 근과 2보다 큰 한 근을 갖도록 하는 정수 m의 개수는? [4점]

❶ 이차방정식의 근과 이차함수의 그래프의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 이차함수의 그래프를 그린다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 이차방정식의 근을 이차함수의 그래프를 이용하여 나타내고 m의 값을 구한다.

$P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2$

$=3x^3+x+11-3(x+1)(x^2-x+1)+mx^2$

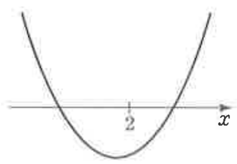
$=3x^3+x+11-3(x^3+1)+mx^2$

$=mx^2+x+8$

이차방정식 $mx^2+x+8=0$의 근은 이차함수 $f(x)=mx^2+x+8$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이다.

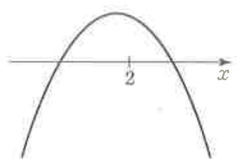
한 근이 2보다 크고 다른 한 근이 2보다 작은 경우는 다음과 같다.

(i) $m>0$일 때



$f(2)=4m+10<0$이므로 만족하는 정수 m은 존재하지 않는다.

(ii) $m<0$일 때



$f(2)=4m+10>0$이므로

$-\frac{5}{2}<m<0$

(i), (ii)에 의하여 $-\frac{5}{2}<m<0$

따라서 정수 m은 -2, -1이므로 개수는 2이다.

F013 근과 계수의 관계를 이용하여 이차함수의 함숫값 구하기 정답 ⑤

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 69%]

(가) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은 7이다.
❶ 이차방정식 $f(x)=0$의 상수항이 7임을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

(나) 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $f(\alpha)+f(\beta)=3$이다.
❷ 두 근 α, β의 합이 3, 곱이 1임을 이용한다.

$f(7)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ❺ 14

Step ❶ 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

$f(x)$의 이차항의 계수가 1이고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱이 7이므로 $f(x)=x^2+ax+7$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

Step ❷ 조건 (나)를 이용하여 $f(7)$의 값을 구한다.

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=3^2-2\times1\\&=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha^2+a\alpha+7)+(\beta^2+a\beta+7)\\&=(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+14\\&=7+3a+14\\&=3\end{aligned}$$

이므로 $a=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+7$이므로

$$\begin{aligned}f(7)&=7^2-6\times7+7\\&=14\end{aligned}$$

F014 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 문제해결하기 정답 ③

이차함수 $y=-2x^2+5x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점] [정답률 80%]
❶ 이차함수의 식과 직선을 이용하여 이차방정식을 세운다.

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ❸ $\frac{9}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

Step ❶ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

이차함수 $y=-2x^2+5x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 적어도 한 점에서 만나려면 방정식 $-2x^2+5x=2x+k$, 즉 $2x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\geq0$이어야 한다.

$D=(-3)^2-4\times2\times k\geq0$

$k\leq\frac{9}{8}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

F015 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 ④

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+5a$의 그래프와 직선 $y=x$가 오직 한 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점] [정답률 69%]
❶ 한 점에서 만나므로 $x^2-2ax+5a=x$의 판별식 $D=0$임을 이용한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ❹ 4 ⑤ 5

Step ❶ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 이차방정식의 판별식 $D=0$임을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-2ax+5a$의 그래프와 직선 $y=x$가 오직 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2ax+5a=x$가 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+5a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a+1)^2-20a=0$, $4a^2-16a+1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 4이다.

F016 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 24

이차함수 $y=3x^2-4x+k$의 그래프와 직선 $y=8x+12$가 한 점에서 만날 때, 실수 k의 값을 구하시오. [3점] [정답률 69%]
❶ 한 점에서 만나므로 $3x^2-4x+k=8x+12$의 판별식 $D=0$임을 이용한다.

24

Step ❶ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D를 이용한다.

이차함수 $y=3x^2-4x+k$의 그래프와 직선 $y=8x+12$가 한 점에서 만나려면 이차방정식 $3x^2-4x+k=8x+12$가 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+k-12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=6^2-3(k-12)=0$, $72-3k=0$

따라서 $k=24$

F017 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 ②

이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점] [정답률 88%]
❶ 적어도 한 점에서 만나므로 $-x^2+4x=2x+k$의 판별식 $D\geq0$임을 이용한다.

① $\frac{1}{2}$ ❷ 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Step ❶ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D를 이용한다.

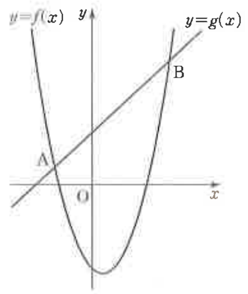
이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-x^2+4x=2x+k$가 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k\geq0$, $k\leq1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

F018 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 미지수 구하기 정답 ②

그림과 같이 함수 $f(x)=x^2-x-5$와 $g(x)=x+3$의 [정답률 77%]
그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.



방정식 $f(2x-k)=g(2x-k)$의 두 실근의 합이 3일 때,
❶ $2x-k$가 반복되므로 $2x-k=t$로 놓고 $f(t)-g(t)=0$임을 이용한다.
상수 k의 값은? [3점]

① 1 ❷ 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ $f(2x-k)=g(2x-k)$의 실근을 α, β로 놓는다.

$f(2x-k)=g(2x-k)$의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=3$

Step ❷ $2x-k=t$로 치환하고 t에 대한 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 k의 값을 구한다.

$2x-k=t$라 하면 $f(t)=t^2-t-5$, $g(t)=t+3$이므로

$f(t)-g(t)=t^2-2t-8=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 두 실근을 t_1, t_2라 하면

$2\alpha-k=t_1$, $2\beta-k=t_2$

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=2$이므로

$2(\alpha+\beta)-2k=2$, $2\times3-2k=2$

따라서 $k=2$

해결단 TALK 이차방정식의 근의 성질

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같아~

다른 풀이

$f(2x-k)-g(2x-k)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2x-k)-g(2x-k)=4x^2-4(k+1)x+k^2+2k-8=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 실근의 합은

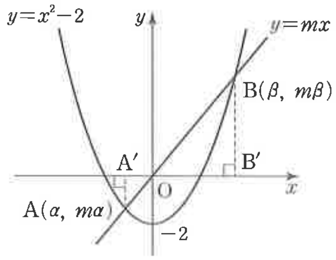
$\dfrac{4(k+1)}{4}=3$

따라서 $k=2$

F019 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 4

원점을 지나고 기울기가 양수 m인 직선이 이차함수 [정답률 31%]
❶ 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타낸다.
$y=x^2-2$의 그래프와 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자. 선분 AA′과 선분 BB′의 길이
❷ $|\overline{\mathrm{AA'}}-\overline{\mathrm{BB'}}|=16$임을 이용한다.
의 차가 16일 때, m의 값을 구하시오. [3점] 4

Step ❶ 이차함수의 그래프와 직선을 좌표평면 위에 나타내어 본다.



Step ❷ 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 m의 값을 구한다.

A′, B′의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하면 α, β가 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=m$

$\overline{\mathrm{AA'}}=-m\alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}}=m\beta$이므로

$|\overline{\mathrm{AA'}}-\overline{\mathrm{BB'}}|=|-m\alpha-m\beta|$

$=|m(\alpha+\beta)|=m^2=16$

$m>0$이므로 $m=4$

F020 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 20

이차함수 $y=x^2+5$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접할 때, [정답률 75%]
❶ 이차방정식 $x^2+5=mx$의 판별식 $D=0$임을 이용한다.
m^2의 값을 구하시오. (단, m은 상수이다.) [3점] 20

Step ❶ 이차함수의 그래프와 직선이 접할 조건을 구한다.

이차함수 $y=x^2+5$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접하므로 이차방정식 $x^2+5=mx$는 중근을 갖는다.

Step ❷ 이차방정식의 판별식을 이용하여 m^2의 값을 구한다.

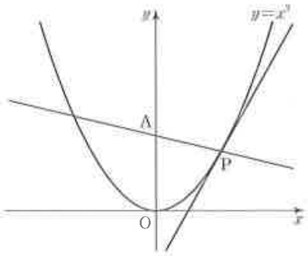
이차방정식 $x^2-mx+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-20=0$

따라서 $m^2=20$

F021 이차함수의 접선의 방정식 추론하기 정답 ②

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a, a^2)$에서의 접선의 기울기를 m_1이라 하고, 점 P와 점 $A(0, 1)$을 지나는 직선의 기울기를 m_2라 하자. 다음은 m_1-m_2의 최솟값을 구하는 과정이다. (단, $a>0$) [정답률 57%]



곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a, a^2)$에서의 접선의 방정식은 $y=m_1(x-a)+a^2$이므로 이차방정식 $x^2=m_1(x-a)+a^2$이 중근을 갖는다.
이차방정식 $x^2-m_1x+am_1-a^2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$m_1=\boxed{\text{(가)}}$

직선 $y=m_2(x-a)+a^2$이 점 $A(0, 1)$을 지나므로

$m_2=\boxed{\text{(나)}}$

따라서 m_1-m_2의 최솟값은 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

❶ 주어진 과정에 따라 빈칸을 채운다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고 (다)에 알맞은 값을 k라 할 때, $f(k)\times g(k)$의 값은? [4점]

① 5 ❷ 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ **주어진 과정에 따라 빈칸을 채워본다.**

양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a, a^2)$에서의 접선의 기울기가 m_1이므로 접선의 방정식은 $y=m_1(x-a)+a^2$이다.
곡선 $y=x^2$과 직선 $y=m_1(x-a)+a^2$이 접하므로 이차방정식 $x^2=m_1(x-a)+a^2$이 중근을 갖는다.
이차방정식 $x^2-m_1x+am_1-a^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D={m_1}^2-4(am_1-a^2)=0$

$(m_1-2a)^2=0$

$m_1=\boxed{2a}$

두 점 A, P를 지나는 직선의 기울기가 m_2이므로 직선의 방정식은 $y=m_2(x-a)+a^2$이다.
직선 $y=m_2(x-a)+a^2$이 점 $A(0, 1)$을 지나므로

$1=m_2(0-a)+a^2$

$1=-am_2+a^2$

$m_2=\boxed{a-\frac{1}{a}}$

$m_1-m_2=2a-\left(a-\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}\ge 2$

(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)
따라서 m_1-m_2의 최솟값은 $\boxed{2}$이다.

Step ❷ **$f(k)\times g(k)$의 값을 구한다.**

$f(a)=2a,\ g(a)=a-\frac{1}{a},\ k=2$

따라서 $f(k)\times g(k)=4\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=6$

F022 이차함수와 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기 정답 ②

양수 k에 대하여 이차함수 $y=-\frac{x^2}{2}+k$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 다음은 실수 m의 값에 관계없이 $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}$이 일정한 값을 갖기 위한 k의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.) [정답률 40%]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<0<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $-\frac{x^2}{2}+k=mx$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=-2k$

두 점 A, B는 직선 $y=mx$ 위의 점이므로

$A(\alpha, m\alpha),\ B(\beta, m\beta)$

$\overline{OA}=-\alpha\times\boxed{\text{(가)}},\ \overline{OB}=-\beta\times\boxed{\text{(가)}}$

$$\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{1}{-\alpha\times\boxed{\text{(가)}}}+\frac{1}{\beta\times\boxed{\text{(가)}}}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\times\boxed{\text{(가)}}}$$
$$=\frac{-\sqrt{4m^2+\boxed{\text{(나)}}}}{-2k\times\boxed{\text{(가)}}}$$

실수 m의 값에 관계없이 $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}$이 갖는 일정한 값을 t라 하자.

$t^2=\frac{4m^2+\boxed{\text{(나)}}}{(2k\times\boxed{\text{(가)}})^2}$이므로

이를 정리하면 $4(1-k^2t^2)m^2+4(2k-k^2t^2)=0$ …… ㉠

따라서 ㉠이 m에 대한 항등식이므로 $k=\boxed{\text{(다)}}$이다.

이때 $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{1}{k}$이다.

❶ 주어진 과정에 따라 빈칸을 채운다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(k)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① 2 ❷ $2\sqrt{5}$ ③ 10 ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ 50

Step ❶ **주어진 과정에 따라 빈칸을 채워본다.**

두 점 A, B의 좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<0<\beta)$라 하면
α, β는 이차방정식 $-\frac{x^2}{2}+k=mx$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=-2k$

두 점 A, B는 직선 $y=mx$ 위의 점이므로 $A(\alpha, m\alpha)$, $B(\beta, m\beta)$

$$\overline{OA}=\sqrt{\alpha^2+(m\alpha)^2}$$
$$=\sqrt{\alpha^2(1+m^2)}$$
$$=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{1+m^2}$$
$$=|\alpha|\sqrt{1+m^2}$$
$$=-\alpha\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\overline{OB}=\sqrt{\beta^2+(m\beta)^2}$$
$$=\sqrt{\beta^2(1+m^2)}$$
$$=\sqrt{\beta^2}\sqrt{1+m^2}$$
$$=|\beta|\sqrt{1+m^2}$$
$$=\beta\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{1}{-\alpha\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}+\frac{1}{\beta\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}$$

이때

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\quad\quad=(-2m)^2-4(-2k)=4m^2+8k$

따라서

$|\alpha-\beta|=\sqrt{4m^2+8k}$

$-\alpha+\beta=\sqrt{4m^2+8k}$($\alpha<0<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$)

$\alpha-\beta=-\sqrt{4m^2+8k}$

이므로

$$\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{-\sqrt{4m^2+\boxed{8k}}}{-2k\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}$$

실수 m의 값에 관계없이 $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}$이 갖는 일정한 값을 t라 하자.

$t^2=\dfrac{4m^2+\boxed{8k}}{(2k\times\boxed{\sqrt{1+m^2}})^2}$이므로

이를 정리하면

$4(1-k^2t^2)m^2+4(2k-k^2t^2)=0$ ······ ㉠

따라서 ㉠이 m에 대한 항등식이므로

$4(1-k^2t^2)=0,\ 4(2k-k^2t^2)=0$

$1-k^2t^2=0,\ 2k-k^2t^2=0$

$k^2t^2=1,\ k^2t^2=2k$

따라서 $1=2k$, $k=\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

이때 $\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{1}{k}$이다.

Step ❷ $f(p)\times g(p)$의 값을 구한다.

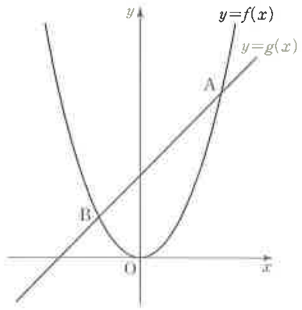
따라서 $f(m)=\sqrt{1+m^2}$, $g(k)=8k$, $p=\frac{1}{2}$이므로

$$f(p)\times g(p)=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times 8\times\frac{1}{2}=2\sqrt{5}$$

F023 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 문제해결하기 정답 ③

양수 a에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=ax+2a^2$의 [정답률 66%]
그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고,
직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 C, y축과 만나는 점을 D,
❶ 점 C의 좌표를 a로 나타낸다.
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.
❷ 점 E의 좌표를 a로 나타낸다.
삼각형 COD의 넓이를 S_1, 사각형 OEAD의 넓이를 S_2라 할 때, $S_2=kS_1$을
❸ 닮음인 삼각형의 넓이의 비를 이용하여 k의 값을 구한다.
만족시키는 실수 k의 값은? (단, O는 원점이고, 두 점 A, B는 각각 제1사분면과 제2사분면 위에 있다.) [4점]

① $\frac{11}{4}$ ② $\frac{23}{8}$ ③ 3 ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{13}{4}$



Step ❶ $g(x)=0$을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

$g(x)=0$에서

$ax+2a^2=a(x+2a)=0$

$a>0$이므로 $x=-2a$

따라서 점 C의 좌표는 $(-2a,\ 0)$

Step ❷ $f(x)=g(x)$를 이용하여 점 E의 좌표를 구한다.

$f(x)=g(x)$에서

$x^2=ax+2a^2$

$(x-2a)(x+a)=0$

$x=-a$ 또는 $x=2a$

점 A는 제1사분면 위에 있으므로

점 E의 좌표는 $(2a,\ 0)$

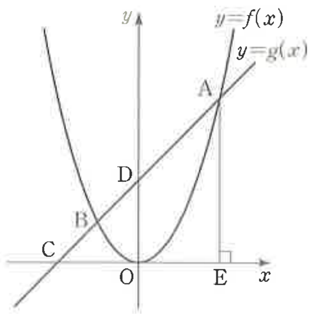
Step ❸ 삼각형의 닮음비를 이용하여 k의 값을 구한다.

삼각형 COD와 삼각형 CEA의 닮음비는 1 : 2이므로 넓이의 비는 1 : 4

즉 $S_1:(S_1+S_2)=1:4$이므로

$S_2=3S_1$

따라서 $k=3$



F024 이차함수의 그래프와 직선을 이용하여 문제해결하기 정답 ④

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 일차함수 $y=h(x)$에 [정답률 38%]
대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 α, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 β라 할 때, 다음
❶ $f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$, $g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$임을 이해한다.
조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 최고차항의 계수는 각각 1과 4이다.
(나) 두 양수 α, β에 대하여 $\alpha : \beta=1:2$
❷ $\beta=2\alpha$임을 이용하여 $\alpha<t<2\alpha$인 t의 값을 구한다.

두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 α와 β 사이에 있는 점의 x좌표를 t라 할 때, $\frac{t}{\alpha}$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ❹ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

Step ❶ $f(x)$를 α와 $h(x)$를 이용하여 나타낸다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x=\alpha$에서 접하므로 이차방정식 $f(x)-h(x)=0$은 중근 $x=\alpha$를 갖는다.
조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 x^2의 계수는 1이므로
$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$
따라서 $f(x)=(x-\alpha)^2+h(x)$

Step ❷ $g(x)$를 β와 $h(x)$를 이용하여 나타낸다.

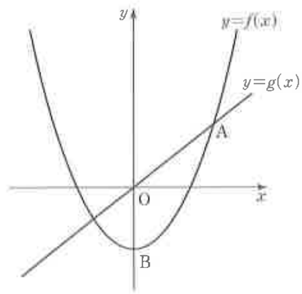
이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x=\beta$에서 접하므로 이차방정식 $g(x)-h(x)=0$은 중근 $x=\beta$를 갖는다.
조건 (가)에서 이차함수 $y=g(x)$의 x^2의 계수는 4이므로
$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$
따라서 $g(x)=4(x-\beta)^2+h(x)$

Step ❸ $\beta=2\alpha$임을 이용하여 $f(x)=g(x)$의 근 중에서 $\alpha<t<2\alpha$인 근 $x=t$를 구한다.

조건 (나)에서 $\alpha:\beta=1:2$이므로 $\beta=2\alpha$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 t라 하면
$f(t)=g(t)$이므로
$(t-\alpha)^2+h(t)=4(t-2\alpha)^2+h(t)$
$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0$
$(3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$
이때 $\alpha<t<2\alpha$이므로 $t=\frac{5}{3}\alpha$
따라서 $\frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$

F025 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 ③

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(a, b)$를 지나고 꼭짓점이 점 $\mathrm{B}(0, -b)$인 [정답률 53%]
이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 A에서 만
❶ $\mathrm{A}(a, 2)$와 $\mathrm{B}(0, -2)$임을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$를 식으로 나타낸다.
난다. $b=2$이고 x에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6일 때, 방정
❷ $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.
식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은? (단, a, b는 양수이고, O는 원점이다.) [4점]



① -12 ② -10 ❸ -8 ④ -6 ⑤ -4

Step ❶ 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 식으로 나타낸다.

$b=2$이고 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 $(0, -2)$이므로
$f(x)=kx^2-2$ $(k>0)$라 하자.
$f(a)=2$이므로 $k=\frac{4}{a^2}$에서
$f(x)=\frac{4}{a^2}x^2-2$
또 $g(a)=2$이므로
$g(x)=\frac{2}{a}x$

Step ❷ 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6임을 이용하여 $f(x)=0$의 두 근의 곱을 구한다.

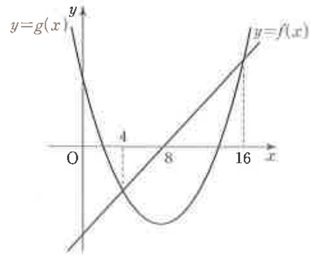
$f(x)=g(x)$에서
$\frac{4}{a^2}x^2-2=\frac{2}{a}x$
양변에 $\frac{a^2}{2}$을 곱하여 정리하면
$2x^2-ax-a^2=0$
$(2x+a)(x-a)=0$
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근은
$x=a$ 또는 $x=-\frac{a}{2}$
$a>0$이므로 두 근의 차는 $\frac{3}{2}a=6$, $a=4$
따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2$이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -8이다.

F026 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 문제해결하기 정답 48

그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(8, 0)$을 지나고, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=8$을 축으로 한다. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표가 각각 4, 16일 때, 방정식 $|f(x)|+g(x)=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오. [정답률 21%]

❶ $|f(x)|=-g(x)$의 실근은 두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=-g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표임을 이용한다.

(단, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.) [4점] 48

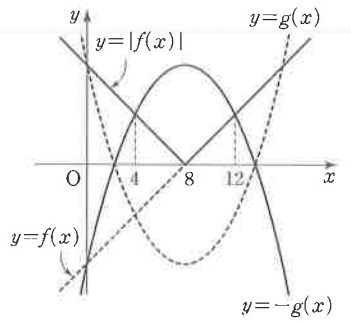


Step ❶ $y=|f(x)|$, $y=-g(x)$의 그래프를 그려 본다.

방정식 $|f(x)|+g(x)=0$, 즉 $|f(x)|=-g(x)$의 실근은 함수 $y=|f(x)|$와 $y=-g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

$|f(x)|=\begin{cases} -f(x) & (x<8) \\ f(x) & (x\geq 8) \end{cases}$이고 $y=-g(x)$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

따라서 $y=|f(x)|$와 $y=-g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



Step ❷ $y=|f(x)|$와 $y=-g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구한다.

$y=|f(x)|$의 그래프와 $y=-g(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로 두 그래프가 만나는 점의 x좌표는 4, 12이다.

즉 방정식 $|f(x)|+g(x)=0$의 근은 $x=4$ 또는 $x=12$

따라서 모든 실근의 곱은 $4\times 12=48$이다.

해검단 TALK

방정식 $|f(x)|=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표야!

실전솔루션

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 그리기

(1) $y=|f(x)|$의 그래프 ⇨ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

(2) $y=f(|x|)$의 그래프 ⇨ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것을 더 그린다.

(3) $|y|=f(x)$의 그래프 ⇨ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남기고, $y\geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것을 더 그린다.

(4) $|y|=f(|x|)$의 그래프 ⇨ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남기고, 이 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것을 더 그린다.

F027 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 활용하기 정답 ④

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=l$이라 하자. $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 [정답률 33%]

❶ $\overline{AB}=l$이므로 두 점 A, B의 좌표를 l을 사용하여 나타낸 후 이차함수의 식을 세운다.

서로 다른 두 점 C, D에 대하여 $\overline{CD}=l+1$, $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$

❷ $\overline{CD}=l+1$이므로 점 C, D의 좌표를 l을 사용하여 나타낸 후 ❶의 식에 대입한다.

와 만나는 서로 다른 두 점 E, F에 대하여 $\overline{EF}=l+3$이다. l의 값은? [4점]

❸ $\overline{EF}=l+3$이므로 점 E, F의 좌표를 l을 사용하여 나타낸 후 ❶의 식에 대입한다.

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ❹ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

Step ❶ $\overline{AB}=l$임을 이용하여 이차함수 $y=f(x)$의 식을 세운다.

$\overline{AB}=l$이므로 $A\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{l}{2}, 0\right)$이라 하면

$y=a\left(x+\frac{l}{2}\right)\left(x-\frac{l}{2}\right)$ (단, $a\neq 0$) …… ㉠

Step ❷ $\overline{CD}=l+1$이고 두 점 C, D가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점임을 이용한다.

㉠의 그래프는 점 $\left(\frac{l+1}{2}, 1\right)$을 지나므로

$1=a\left(\frac{l+1}{2}+\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l+1}{2}-\frac{l}{2}\right)$

$1=a\left(l+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}$ …… ㉡

Step ❸ $\overline{EF}=l+3$이고 두 점 E, F가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점임을 이용하여 l의 값을 구한다.

㉠의 그래프는 점 $\left(\frac{l+3}{2}, 4\right)$를 지나므로

$4=a\left(\frac{l+3}{2}+\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l+3}{2}-\frac{l}{2}\right)$

$4=a\left(l+\frac{3}{2}\right)\times\frac{3}{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $4l+2=3l+\frac{9}{2}$

따라서 $l=\frac{5}{2}$

해검단 TALK

이차함수의 그래프를 평행이동하여도 그 그래프의 모양은 변하지 않아. 그래서 그래프 위의 두 점을 이은 선분의 길이도 그대로야.

실전솔루션

이차함수의 식은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

(1) x축과의 두 교점이 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$를 이용한다.

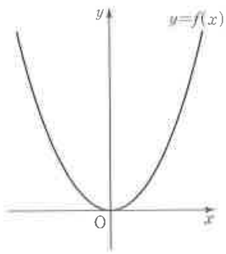
(2) 꼭짓점 (m, n)이 주어지면 $f(x)=a(x-m)^2+n$을 이용한다.

(3) 세 점이 주어지면 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대입한다.

(4) $x=m$에서 x축과 접할 때에는 $f(x)=a(x-m)^2$을 이용한다.

F028 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 ④

이차함수 $f(x)=x^2$의 그래프가 그림과 같다. [정답률 47%]



이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동하였더니 함

❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 식을 세운다.

수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하였다.

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점

❷ 네 교점의 x좌표를 x_1, x_2, x_3, x_4로 놓고 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용한다.

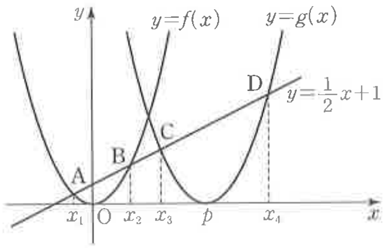
에서 만날 때,

네 교점의 x좌표의 합이 9가 되도록 하는 p의 값은? (단, $p>0$이다.) [4점]

❸ $x_1+x_2+x_3+x_4=9$임을 이용한다.

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ❹ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

Step ❶ 함수 $y=g(x)$의 그래프의 식을 구한다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이므로 $g(x)=(x-p)^2$이다.

Step ❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선의 교점의 x좌표의 합을 구한다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 교점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는 방정식 $x^2=\frac{1}{2}x+1$의 근이다.

이차방정식 $2x^2-x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=\frac{1}{2}$

Step ❸ 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선의 교점의 x좌표의 합을 구한다.

같은 방법으로 이차함수 $y=(x-p)^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 두 교점 C, D의 x좌표를 x_3, x_4라 하면 x_3, x_4는 이차방정식 $(x-p)^2=\frac{1}{2}x+1$의 근이다.

이차방정식 $2x^2-(4p+1)x+2p^2-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$x_3+x_4=2p+\frac{1}{2}$

Step ❹ p의 값을 구한다.

따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{2}+\left(2p+\frac{1}{2}\right)=1+2p$이므로

$1+2p=9$에서 $p=4$

F029 이차함수의 그래프와 직선을 이용한 문제해결하기 정답 39

그림과 같이 $-2<k<2$인 실수 k에 대하여 이차함수 [정답률 9%]

$y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1이라 하고, 직선

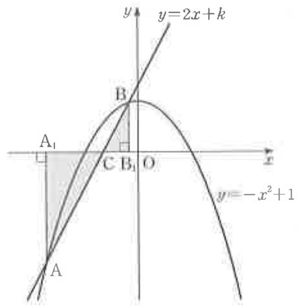
❶ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β로 놓고, 점 A, B, A_1, B_1, C의 좌표를 각각 구한다.

$y=2x+k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자. 두 삼각형 ACA_1과 BCB_1의 넓

❷ $\triangle ACA_1$과 $\triangle BCB_1$의 넓이를 구한 후 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계를 이용한다.

이의 합이 $\frac{3}{2}$일 때, 상수 k의 값이 $p+q\sqrt{7}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점] 39



Step ❶ 점 A, B, A_1, B_1, C의 좌표를 구한다.

점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha,\ 2\alpha+k)$, $B(\beta,\ 2\beta+k)$, $A_1(\alpha,\ 0)$, $B_1(\beta,\ 0)$, $C\left(-\frac{k}{2},\ 0\right)$

Step ❷ 두 삼각형의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$임을 이용한다.

삼각형 ACA_1의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}(-2\alpha-k)\left(-\frac{k}{2}-\alpha\right)=\left(\frac{k}{2}+\alpha\right)^2$

또 삼각형 BCB_1의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}(2\beta+k)\left(\beta+\frac{k}{2}\right)=\left(\frac{k}{2}+\beta\right)^2$

두 삼각형 ACA_1과 BCB_1의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로

$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

$(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$

$2(\alpha^2+\beta^2)+2k(\alpha+\beta)+k^2-3=0$ …… ㉠

Step ❸ 이차방정식과 이차함수의 그래프의 관계를 이용하여 k의 값을 구한다.

한편 α, β는 이차방정식 $-x^2+1=2x+k$,

즉 $x^2+2x+k-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$ …… ㉡

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4-2(k-1)$

$=-2k+6$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$2(-2k+6)+2k\times(-2)+k^2-3=0$

$k^2-8k+9=0$

그러므로 $k=4\pm\sqrt{7}$이고 $-2<k<2$이므로

$k=4-\sqrt{7}$이다.

따라서 $p=4$, $q=-1$이므로 $10p+q=39$

F030 제한된 범위에서의 이차함수의 최댓값 구하기 정답 7

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=2x^2-4x+1$의 최댓값을 구하시오. [3점] [정답률 77%]

❶ 주어진 함수식을 완전제곱의 꼴로 바꾼다.

7

Step ❶ 주어진 함수를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾼다.

$f(x)=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1이고 아래로 볼록하므로 $x=1$에서 최솟값, $x=3$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 최댓값은

$f(3)=2(3-1)^2-1=7$

F031 제한된 범위에서의 이차함수의 식 구하기 정답 ①

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 8일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점] [정답률 76%]

❶ 주어진 함수식을 완전제곱의 꼴로 바꾼다.

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

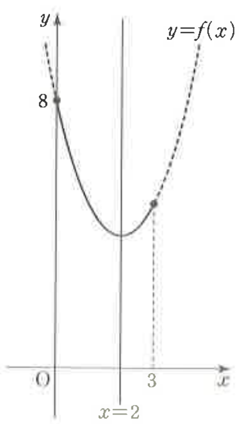
Step ❶ 주어진 함수를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸고 대칭축을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=x^2+ax+b$

$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$-\frac{a}{2}=2$에서 $a=-4$이다.



Step ❷ 제한된 범위에서 함수의 최댓값을 이용하여 b의 값을 구한다.

이때 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이므로 $f(0)=8$, 즉 $b=8$이다.

따라서 $a+b=(-4)+8=4$

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^2+k=x^2-4x+4+k$ (k는 상수)라 할 수 있다.

따라서 $a=-4$

이때 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이므로

$f(0)=4+k=8$, 즉 $b=8$

따라서 $a+b=(-4)+8=4$

F032 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소 구하기 정답 ②

$-2\le x\le 3$에서 이차함수 $y=(x+1)^2-2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점] [정답률 88%]

❶ $f(-2)$, $f(-1)$, $f(3)$ 중 가장 큰 값이 M, 가장 작은 값이 m임을 이용한다.

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

Step ❶ 이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 알아본다.

이차함수 $y=(x+1)^2-2$의 꼭짓점의 x좌표 -1이 $-2\le x\le 3$에 속하므로 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(3)$의 값 중에서 가장 큰 값이 M이고 가장 작은 값이 m이다.

Step ❷ $f(-2)$, $f(-1)$, $f(3)$의 값을 비교하여 M과 m을 구한다.

$f(-2)=(-2+1)^2-2=-1$

$f(-1)=(-1+1)^2-2=-2$

$f(3)=(3+1)^2-2=14$

따라서 $M=14$, $m=-2$이므로

$M+m=12$

실전 솔루션

제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최대, 최소

❶ $\alpha\le p\le\beta$일 때, $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

❷ $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.

F033 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소 구하기 정답 ⑤

$0\le x\le 4$에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-6x+k$의 최댓값이 17일 때, 이차함수 $f(x)$의 최솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점] [정답률 76%]

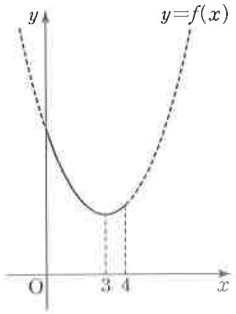
❶ 주어진 함수식을 완전제곱의 꼴로 바꾼다.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Step ❶ 주어진 함수를 $y=(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾼다.

$f(x)=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$

이므로 $0\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



Step ❷ 제한된 범위에서 함수의 최댓값을 이용하여 k의 값을 구한다.

따라서 $0\le x\le 4$에서

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)=(3-3)^2+k-9=k-9$이고,

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=(0-3)^2+k-9=k$이다.

문제의 조건에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 17이므로

$k=17$

따라서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은

$k-9=17-9=8$

F034 이차함수의 최댓값과 최솟값 구하기 정답 25

$1\le x\le 4$에서 이차함수 $y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$의 [정답률 47%]

❶ $2x-1=t$로 놓고 식을 $y=a(t-p)^2+q$의 꼴로 변형한다.

최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. [3점] 25

❷ $1\le x\le 4$에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

Step ❶ $2x-1=t$로 치환하여 이차함수를 정리한다.

$2x-1=t$라 하면

$1\le x\le 4$이므로 $1\le t\le 7$

$y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$

$=t^2-4t+3$

$=(t-2)^2-1$

Step ❷ 주어진 범위에서 최댓값 M과 최솟값 m의 값을 구해 $M-m$의 값을 구한다.

$t=2$일 때, 최솟값 $m=-1$

$t=7$일 때, 최댓값 $M=24$

따라서 $M-m=24-(-1)=25$

다른 풀이

$y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$

$=4x^2-12x+8$

$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1$

$1\le x\le 4$이므로

$x=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $m=-1$

$x=4$일 때, 최댓값 $M=24$

따라서 $M-m=24-(-1)=25$

F035 실생활에 활용된 이차함수의 최댓값 문제해결하기 정답 ②

처음 속도 v_0으로 지면과 수직하게 위로 던져진 물체의 운동 [정답률 78%] 은 위쪽을 $(+)$ 방향으로 하면 처음 속도의 방향과 가속도의 방향이 반대가 되어 가속도가 $-g$인 등가속도 직선운동을 한다. 이때, 시간 t초에 대한 물체의 높이 $h(\text{m})$는

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \ (g : \text{천체의 중력가속도})$$

이다. 지구에서의 중력가속도가 $10(\text{m/s}^2)$일 때 처음 속도 $10(\text{m/s})$로 던져

❶ 높이 h에 관한 식에 $g=10$, $v_0=10$을 대입하여 M_1의 값을 구한다.

진 물체의 높이 $h(\text{m})$의 최댓값은 M_1,

목성의 한 위성에서의 중력가속도가 $6(\text{m/s}^2)$일 때 처음 속도 $10(\text{m/s})$로

❷ 높이 h에 관한 식에 $g=6$, $v_0=10$을 대입하여 M_2의 값을 구한다.

던져진 물체의 높이 $h(\text{m})$의 최댓값은 M_2이다. M_2-M_1의 값은? [3점]

① 3 ❷ $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

Step ❶ 이차함수의 식을 세워 M_1의 값을 구한다.

처음 속도가 10이고 중력가속도가 10인 지구에서의 물체의 높이 h는

$h=10t-5t^2=-5(t-1)^2+5$에서

$M_1=5$

Step ❷ 이차함수의 식을 세워 M_2의 값을 구하고 M_2-M_1의 값을 구한다.

처음 속도가 10이고 중력가속도가 6인 목성의 한 위성에서의 물체의 높이 h는

$h=10t-3t^2=-3\left(t-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{25}{3}$에서

$M_2=\frac{25}{3}$

따라서 $M_2-M_1=\frac{10}{3}$

F036 실생활에 활용된 이차함수의 최댓값 문제해결하기 정답 110

다음은 어느 회사에서 신제품 A의 가격을 정하기 위하여 시 [정답률 48%] 장 조사를 한 결과이다.

> (가) A의 가격을 100만 원으로 정하면 판매량은 2400대이다.
> (나) A의 가격을 만 원 인상할 때마다 판매량은 20대씩 줄어든다.
> ❶ 두 조건을 이용하여 하나의 식을 세운다.

신제품 A를 판매하여 얻은 전체 판매 금액이 최대가 되도록 하는 A의 가격

❷ ❶에서 세운 식을 이용하여 최댓값 a를 구한다.

은 a만 원이다. a의 값을 구하시오. (단, A의 가격은 100만 원 이상이다.) [3점] 110

Step ❶ 주어진 조건을 활용하여 이차함수의 식을 세운다.

조건 (가), (나)에서 A의 가격이 100만 원 이상이고 만 원 인상될 때마다 판매량이 20대씩 줄어든다.

따라서 인상되는 가격을 x(만 원), 전체 판매 금액을 y(만 원)이라 하면

$y=(100+x)(2400-20x)$

$=-20x^2+400x+240000$

$=-20(x-10)^2+242000$

Step ❷ 이차함수의 최댓값을 이용하여 a의 값을 구한다.

따라서 가격을 10만 원 올렸을 때 전체 판매 금액이 최대이므로 그때의 A의 가격은 110만 원이다.

따라서 $a=110$

F037 이차함수의 최대, 최소 이해하기 정답 ③

두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z=a+2bi$가 $z^2+(\bar{z})^2=0$을 [정답률 64%]

❶ $\bar{z}=a-2bi$ ❷ $z=a+2bi$, $\bar{z}=a-2bi$를 대입하여 정리한다.

만족시킬 때, $6a+12b^2+11$의 최솟값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ❸ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step ❶ $z^2+(\bar{z})^2=0$을 정리하여 a, b의 관계식을 얻는다.

$z^2=(a+2bi)^2=(a^2-4b^2)+4abi$

$(\bar{z})^2=(a-2bi)^2=(a^2-4b^2)-4abi$

이므로

$z^2+(\bar{z})^2=2(a^2-4b^2)=0$

$a^2=4b^2$

따라서 $b^2=\frac{1}{4}a^2$ ······ ㉠

Step ❷ 주어진 함수를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾼다.

㉠을 $6a+12b^2+11$에 대입하면

$$\begin{aligned}6a+12b^2+11&=6a+12\times\frac{1}{4}a^2+11\\&=3a^2+6a+11\\&=3(a+1)^2+8\end{aligned}$$

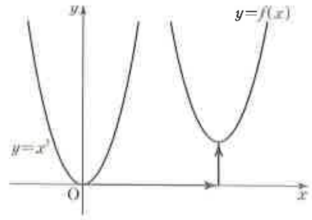
이므로 $a=-1$일 때, $6a+12b^2+11$의 최솟값은 8이다.

F038 이차함수의 최솟값을 활용하여 이차함수의 성질 추론하기 정답 ⑤

자연수 n에 대하여 그림과 같이 함수 $y=x^2$의 그래프를 x축 [정답률 54%]

❶ $y=(x-n)^2+3$

의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이다.
❷ $f(x)=(x-n)^2+3$

ㄴ. $n=3$일 때, 방정식 $f(x)=10$의 서로 다른 두 실근의 합은 6이다.
❸ $(x-3)^2+3=10$에서 (우변)$=0$으로 만들고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x-\frac{3n-4}{2}$와 만나지 않는다.
❹ 두 식을 연립하여 판별식 D의 부호를 구한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ❺ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 함수의 평행이동을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 식을 구한다.

함수 $y=x^2$를 x축의 방향으로 n(n은 자연수)만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=(x-n)^2+3$

따라서 $f(x)=(x-n)^2+3$

Step ❷ $a>0$일 때 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는 $x=p$에서 최솟값 q를 가짐을 이용한다.

ㄱ. $f(x)=(x-n)^2+3$이므로 함수 $f(x)$는 $x=n$일 때 최솟값 3을 갖는다. (참)

Step ❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

ㄴ. $n=3$일 때, $f(x)=(x-3)^2+3$이므로 $f(x)=10$에서

$(x-3)^2+3=10$

$x^2-6x+2=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $f(x)=10$의 서로 다른 두 실근의 합은 6 (참)

Step ❹ 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면 이차함수와 직선의 방정식을 연립한 식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 함을 이용한다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\frac{3n-4}{2}$을 연립하면

$f(x)=x-\frac{3n-4}{2}$에서 $(x-n)^2+3=x-\frac{3n-4}{2}$

$x^2-(2n+1)x+n^2+\frac{3}{2}n+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2n+1)^2-4\left(n^2+\frac{3}{2}n+1\right)=-2n-3$

이때 n은 자연수이므로 $D<0$이다. 따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-\frac{3n-4}{2}$는 만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. $n=3$일 때, $f(x)=(x-3)^2+3$이므로 $y=f(x)$의 대칭축은 $x=3$이다. 따라서 방정식 $f(x)=10$의 서로 다른 두 실근의 합은 6이다.

F039 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 이차함수 추론하기 정답 11

이차함수 $f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$이 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 35%]

(가) $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 -1이다.

(나) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서만 만난다.
❷ 두 식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이다.

세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점] 11

Step ❶ 조건 (가)를 이용하여 a의 값을 구한다.

$$f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-(b-7)^2$$

조건 (가)에서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{2}=-1$, $a=2$

Step ❷ 조건 (나)를 이용하여 b, c의 값을 구한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서 만나므로 두 식을 연립한 이차방정식 $f(x)-cx=0$은 중근을 가져야 한다.

$x^2+ax-(b-7)^2-cx=0$

$x^2+(a-c)x-(b-7)^2=0$ …… ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(a-c)^2+4(b-7)^2=0$

이때 $(a-c)^2\geq0$, $4(b-7)^2\geq0$이므로

$(a-c)^2=0$, $4(b-7)^2=0$

따라서 $a=c=2$, $b=7$이므로 $a+b+c=11$

F040 제한된 범위에서의 이차함수의 문제해결하기 정답 33

$2\leq x\leq4$에서 이차함수 $y=x^2-4ax+4a^2+b$의 최솟값이 4가 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $2a+b$의 최댓값을 M이라 하자. $4M$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 9%] 33

❶ 이차함수의 그래프의 대칭축을 찾고 축의 위치에 따라 미지수의 값을 정한다.

Step ❶ 주어진 함수를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸고 대칭축의 위치에 따라 b의 값을 구한다.

$2\leq x\leq4$에서 이차함수 $y=x^2-4ax+4a^2+b=(x-2a)^2+b$는 그래프의 축 $x=2a$의 위치에 따라 최솟값을 갖는 x의 좌표가 달라진다.

→ (i) $2a<2$일 때
(ii) $2\leq2a<4$일 때
(iii) $4\leq2a$일 때
의 세 가지로 나누어 생각한다.

(i) $a<1$일 때

함수의 최솟값은 $x=2$일 때이므로 $(2-2a)^2+b=4$

$b=-4(a-1)^2+4$

(ii) $1\leq a<2$일 때

함수의 최솟값은 $x=2a$일 때이므로 $b=4$

(iii) $a\geq2$일 때

함수의 최솟값은 $x=4$일 때이므로 $(4-2a)^2+b=4$

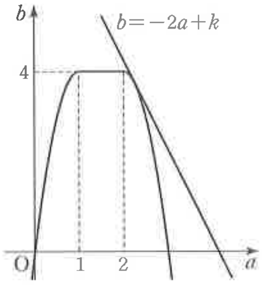
$b=-4(a-2)^2+4$

(i)~(iii)에 의하여

$$b=\begin{cases}-4(a-1)^2+4 & (a<1)\\ 4 & (1\leq a<2)\\ -4(a-2)^2+4 & (a\geq2)\end{cases}$$

Step ❷ $2a+b=k$라 하고 k의 최댓값을 구한다.

이때 $2a+b=k$라 하면



위의 그림과 같이 $b=-4(a-2)^2+4$와 $b=-2a+k$가 접할 때 k는 최댓값을 갖는다.

$-4(a-2)^2+4=-2a+k$

$4a^2-18a+12+k=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-9)^2-4(12+k)=0$

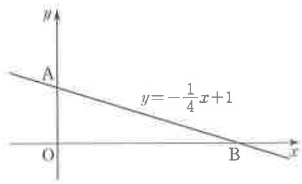
$4k=33$, $k=\frac{33}{4}$

따라서 $M=\frac{33}{4}$이고 $4M=33$

F041 제한된 범위에서의 이차함수의 최솟값 구하기 정답 ④

직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$이 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 P(a, b)가 점 A에서 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$을 따라 점 B까지 움직일 때, a^2+8b의 최솟값은? [4점] [정답률 59%]

❶ 점 P가 직선 위의 점이므로 좌표를 식에 대입한다.



① 5 ② $\frac{17}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$ ❹ 7 ⑤ $\frac{23}{3}$

Step ❶ 점 P는 주어진 직선 위의 점이므로 좌표를 식에 대입한다.

점 P$(a,\ b)$는 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로

$b=-\frac{1}{4}a+1$

Step ❷ a^2+8b를 한 문자에 대하여 식을 정리하고 주어진 범위에 따라 최솟값을 구한다.

$b=-\frac{1}{4}a+1$을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}a^2+8b&=a^2+8\left(-\frac{1}{4}a+1\right)\\&=a^2-2a+8\\&=(a-1)^2+7\end{aligned}$$

이때 점 P$(a,\ b)$는 두 점 A, B 사이를 움직이고 A$(0,\ 1)$, B$(4,\ 0)$이므로 $0\le a\le 4$이다.

따라서 $a=1$일 때, a^2+8b의 최솟값은 7이다.

다른 풀이

$a=-4b+4$를 주어진 식에 대입하면

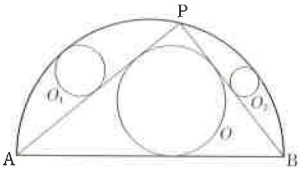
$$\begin{aligned}a^2+8b&=(-4b+4)^2+8b\\&=16b^2-32b+16+8b\\&=16b^2-24b+16\\&=16\left(b^2-\frac{3}{2}b+\frac{9}{16}\right)+7\\&=16\left(b-\frac{3}{4}\right)^2+7\end{aligned}$$

그런데 A$(0,\ 1)$, B$(4,\ 0)$이므로 $0\le b\le 1$이다.

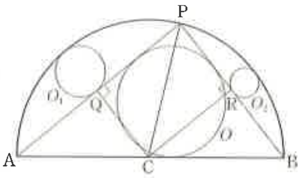
따라서 $b=\frac{3}{4}$일 때, a^2+8b의 최솟값은 7이다.

F042 이차함수의 최솟값을 이용하여 도형 추론하기 정답 ②

길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 호 AB 위의 점 P에 대하여 현 AP의 중점과 호 AP의 중점을 지름의 양끝으로 하는 원을 O_1, 현 BP의 중점과 호 BP의 중점을 지름의 양끝으로 하는 원을 O_2, 삼각형 PAB에 내접하는 원을 O라 하자. 다음은 세 원 O_1, O_2, O의 넓이의 합의 최솟값을 구하는 과정을 나타낸 것이다. [정답률 38%]



그림과 같이 두 현 AP, BP의 중점을 각각 Q, R라 하고 선분 AB의 중점을 C라 하면 사각형 PQCR는 직사각형이다.



$\overline{\text{PQ}}=a$, $\overline{\text{PR}}=b$라 하면 $a^2+b^2=\boxed{(가)}$이다.

원 O_1의 반지름의 길이를 r_1, 원 O_2의 반지름의 길이를 r_2, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{\text{CQ}}=5-2r_1$, $\overline{\text{CR}}=5-2r_2$이다.

이때 $\overline{\text{CQ}}=\overline{\text{PR}}$, $\overline{\text{CR}}=\overline{\text{PQ}}$이므로

$r_1=\frac{5-b}{2}$, $r_2=\frac{5-a}{2}$

이다. 한편, 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $(2a-r)+(2b-r)=2\times\boxed{(나)}$이다.

따라서

$r=a+b-\boxed{(나)}$

이다. 그러므로 세 원 O_1, O_2, O의 넓이의 합은

$$\pi(r_1^2+r_2^2+r^2)$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{5-b}{2}\right)^2+\left(\frac{5-a}{2}\right)^2+\left(a+b-\boxed{(나)}\right)^2\right\}\quad\cdots\cdots ①$$

이다. $a+b-t$ $(5<t\le 5\sqrt{2})$라 하면 식 ①은

$$\pi\left(t-\boxed{(다)}\right)^2+\frac{75}{16}\pi$$

이므로 세 원 O_1, O_2, O의 넓이의 합의 최솟값은 $\frac{75}{16}\pi$이다.

❶ 주어진 과정에 따라 빈칸을 채운다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 α, β, γ라 할 때, $(\alpha-\beta)\times\gamma$의 값은? [4점]

① 100 ② 125 ③ 150 ④ 175 ⑤ 200

Step ❶ 주어진 과정에 따라 빈칸을 채워본다.

$\overline{\text{PQ}}=a$, $\overline{\text{PR}}=b$라 하면 삼각형 PAC는 이등변삼각형이므로

$\overline{\text{AQ}}=\overline{\text{PQ}}=a$

이때

$\overline{\text{QC}}=\overline{\text{PR}}=b$, $\overline{\text{AC}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\frac{1}{2}\times 10=5$

이므로 삼각형 ACQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{AQ}}^2+\overline{\text{CQ}}^2=\overline{\text{AC}}^2$

이므로 $a^2+b^2=\boxed{25}$이다.

원 O_1의 반지름의 길이를 r_1, 원 O_2의 반지름의 길이를 r_2, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\text{CQ}}=5-2r_1$, $\overline{\text{CR}}=5-2r_2$이다.

이때 $\overline{CQ}=\overline{PR}$, $\overline{CR}=\overline{PQ}$이므로

$5-2r_1=b$, $5-2r_2=a$이고,

$r_1=\frac{5-b}{2}$, $r_2=\frac{5-a}{2}$ ······ ㉠

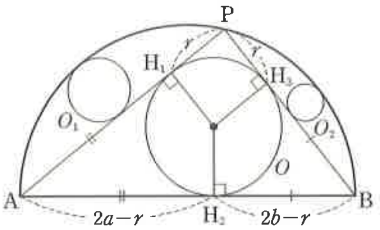
이다. 한편, 원 O의 중심에서 세 선분 PA, AB, BP에 내린 수선의 발을 차례대로 H_1, H_2, H_3이라 하면 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{AH_2}=\overline{AH_1}=\overline{AP}-\overline{PH_1}=2\times\overline{PQ}-\overline{PH_1}=2a-r$

$\overline{BH_2}=\overline{BH_3}=\overline{BP}-\overline{PH_3}=2\times\overline{PR}-\overline{PH_3}=2b-r$

이때 $\overline{AH_2}+\overline{BH_2}=\overline{AB}=2\times\overline{AC}$

이므로 $(2a-r)+(2b-r)=10=2\times\boxed{5}$이다.



따라서 $r=a+b-\boxed{5}$ ······ ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 세 원 O_1, O_2, O의 넓이의 합은

$\pi(r_1^2+r_2^2+r^2)$

$=\pi\left\{\left(\frac{5-b}{2}\right)^2+\left(\frac{5-a}{2}\right)^2+(a+b-\boxed{5})^2\right\}$ ······ ①

이다. $a+b=t$ $(5<t\le5\sqrt{2})$라 하면 식 ①은

$\pi\left\{\frac{25-10b+b^2}{4}+\frac{25-10a+a^2}{4}+(a+b)^2-10(a+b)+25\right\}$

$=\pi\left\{\frac{50}{4}-\frac{5}{2}(a+b)+\frac{1}{4}(a^2+b^2)+(a+b)^2-10(a+b)+25\right\}$

└→ △ACQ에서 $a^2+b^2=5^2$

$=\pi\left(\frac{50}{4}-\frac{5}{2}t+\frac{1}{4}\times25+t^2-10t+25\right)$

$=\pi\left(t^2-\frac{25}{2}t+\frac{175}{4}\right)$

$=\pi\left(t-\boxed{\frac{25}{4}}\right)^2+\frac{75}{16}\pi$

이므로 세 원 O_1, O_2, O의 넓이의 합의 최솟값은 $\frac{75}{16}\pi$이다.

따라서 $\alpha=25$, $\beta=5$, $\gamma=\frac{25}{4}$이므로

$(\alpha-\beta)\times\gamma=(25-5)\times\frac{25}{4}=125$

F043 제한된 범위에서의 이차함수의 문제해결하기 정답 50

최고차항의 계수가 $a(a>0)$인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 37%]

(가) 직선 $y=4ax-10$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 5이다.
(나) $1\le x\le5$에서 $f(x)$의 최솟값은 -8이다.

❶ 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 구한다.

$100a$의 값을 구하시오. [4점] 50

Step ❶ 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 이용하여 이차방정식을 만든다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4ax-10$의 두 교점의 x좌표가 1, 5이므로 이차방정식 $f(x)=4ax-10$, 즉

$f(x)-4ax+10=0$의 두 실근은 1, 5이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 a이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$f(x)-4ax+10=a\{x^2-(1+5)x+1\times5\}=a(x^2-6x+5)$

로 놓을 수 있다. └→ $-4ax+10$은 일차식이므로 최고차항의 계수에 영향을 주지 않는다.

Step ❷ 제한된 범위에서의 이차함수 $f(x)$의 최솟값을 이용하여 a의 값을 구한다.

따라서

$f(x)=ax^2-6ax+5a+4ax-10$

$=ax^2-2ax+5a-10$

$=a(x-1)^2+4a-10$

한편 $a>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 함수 $y=f(x)$는 $1\le x\le5$에서 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다. $f(x)$의 최솟값이 -8이므로

$f(1)=-8$

$f(1)=4a-10=-8$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $100a=50$

F044 제한된 범위에서의 이차함수의 문제해결하기 정답 243

일차함수 $f(x)$와 이차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 [정답률 11%]

$h_1(x)=f(x)+g(x)$, $h_2(x)=f(x)-g(x)$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=h_1(x)$의 그래프는 x축에 접한다.
(나) 함수 $y=h_1(x)$의 그래프와 함수 $y=h_2(x)$의 그래프는 오직 한 점 $(1, 9)$에서 만난다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 두 부등식
$h_1(x)\ge h_1(\alpha)$, $h_2(x)\le h_2(\beta)$
가 성립할 때, $\alpha>\beta$이다. (단, α, β는 상수이다.)

❶ 조건을 만족하는 함수 $h_1(x)$와 $h_2(x)$를 구한다.

$f(\beta)\times g(\alpha)$의 값을 구하시오. [4점] 243

Step ❶ 조건 (나)를 이용하여 함수 $g(x)$의 식을 구한다.

조건 (나)에서 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프가 오직 한 점 $(1,\ 9)$에서 만나므로 방정식 $h_1(x)=h_2(x)$의 실근은 $x=1$ 하나뿐이다.

따라서 방정식 $f(x)-g(x)=f(x)+g(x)$, 즉 $g(x)=0$이 중근 $x=1$을 갖는다.

이차함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-1)^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

Step ❷ 조건 (가), (다)를 이용하여 α의 값을 구한다.

함수 $h_1(x)$의 이차항의 계수는 1이고 조건 (가)에 의하여 함수 $y=h_1(x)$의 그래프가 x축에 접한다.

또 조건 (다)에 의하여 함수 $y=h_1(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 가지므로

$h_1(x)=(x-\alpha)^2$

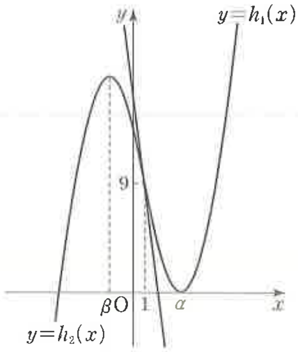
이때 $h_1(1)=9$이므로 $9=(1-\alpha)^2$

$1-\alpha=3$ 또는 $1-\alpha=-3$

따라서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=4$

Step ❸ 조건 (다)를 이용하여 함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$의 식을 구하고 β의 값을 구한다.

조건 (다)에 의하여 함수 $y=h_2(x)$는 $x=\beta$에서 최댓값을 갖고 $\alpha>\beta$이므로 이 조건을 만족하는 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉 $\alpha>1$이어야 하므로 $\alpha=4$

$h_1(x)=(x-4)^2$이므로 ㉠에 의하여

$f(x)=h_1(x)-g(x)$

$\quad=(x-4)^2-(x-1)^2$

$\quad=-6x+15$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$h_2(x)=f(x)-g(x)$

$\quad=(-6x+15)-(x-1)^2$

$\quad=-x^2-4x+14$

$\quad=-(x+2)^2+18$

이때 함수 $y=h_2(x)$는 $x=\beta$에서 최댓값을 가지므로 $\beta=-2$

$f(\beta)=f(-2)=-6\times(-2)+15=27$

$g(\alpha)=g(4)=(4-1)^2=9$

이므로

$f(\beta)\times g(\alpha)=27\times 9=243$

F045 이차함수의 최댓값을 이용하여 문제해결하기 정답 20

고대 이집트의 태양신을 상징하는 어느 오벨리스크는 사각뿔 모양의 돌이다. [그림 1]과 같이 높이가 10 m인 삼각기둥 ABC$-$DEF 모양의 돌을 이용하여 [그림 2]와 같이 밑면이 직사각형인 사각뿔 모양의 오벨리스크를 만들려고 한다. [정답률 26%]

삼각기둥 ABC$-$DEF 모양의 돌은 모서리 EF의 길이가 6 m, 꼭짓점 D에서 모서리 EF에 내린 수선의 발과 꼭짓점 D 사이의 거리가 4 m이다.

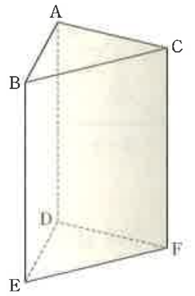
모서리 EF 위의 두 점 G, H와 두 모서리 FD, DE 위의 각각의 점 I, J가 직사각형 GHIJ의 네 꼭짓점이 될 때,

❶ $\overline{JG}=x$, $\overline{JI}=y$로 놓고 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

높이가 10 m이고 직사각형 GHIJ를 밑면으로 하는 부피가 최대인 사각뿔 모양의 오벨리스크의 부피는 V m^{3}이다.

❷ 이차함수의 최댓값을 이용하여 V의 값을 구한다.

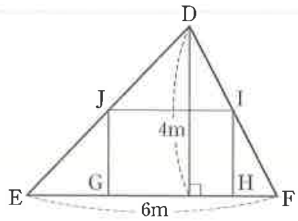
V의 값을 구하시오. (단, 각 면에 있는 무늬는 무시한다.) [4점] 20



[그림 1]

[그림 2]

Step ❶ 삼각형의 닮음을 이용하여 x, y의 관계를 식으로 나타낸다.



직사각형 GHIJ의 두 변 JG, JI의 길이를 각각 x m, y m라 하자.

삼각형 DJI와 삼각형 DEF는 닮음이므로

$(4-x):4=y:6$

$4y=6(4-x)$

$y=6-\dfrac{3}{2}x$

Step ❷ 오벨리스크의 부피가 최대일 때의 V의 값을 구한다.

오벨리스크의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times 10\times x\times y$

$=20x-5x^2$

$=-5(x-2)^2+20\ (0<x<4)$

이므로 최대 부피는 $x=2$일 때 20 m^{3}이다.

따라서 $V=20$

F046 이차함수의 그래프를 이용하여 최대, 최소 문제해결하기 정답 ⑤

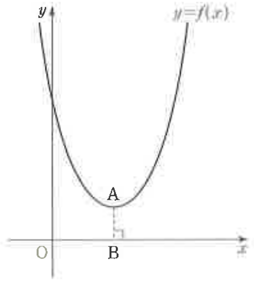
이차함수 $f(x)=x^2-2ax+5a$의 그래프의 꼭짓점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. [정답률 55%]

❶ 두 점 A, B의 좌표를 a로 나타낸다.

$0<a<5$일 때, $\overline{OB}+\overline{AB}$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

❷ $\overline{OB}+\overline{AB}=g(a)$로 놓고 $g(a)$의 최댓값을 구한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9



Step ❶ 이차함수 $f(x)$의 식을 변형하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

$y=x^2-2ax+5a$

$\quad=(x-a)^2-a^2+5a$

이므로 $A(a, -a^2+5a)$, $B(a, 0)$이다.

Step ❷ $\overline{OB}+\overline{AB}=g(a)$로 놓고 $0<a<5$에서 $g(a)$의 최댓값을 구한다.

이때 $0<a<5$이므로 $\overline{OB}=a$, $\overline{AB}=-a^2+5a$이다.

$\overline{OB}+\overline{AB}=g(a)$라 하면

$g(a)=-a^2+6a$

$\quad=-(a-3)^2+9$

이므로 $0<a<5$에서 $\overline{OB}+\overline{AB}$의 최댓값은 9이다.

F047 이차함수의 성질 추론하기 정답 54

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 53%]

(가) x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 -2와 4이다.
❶ 이차항의 계수를 a라 하고 $f(x)$의 식을 나타낸다.

(나) $5\le x\le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 80이다.
❷ $a>0$, $a<0$의 두 가지 경우로 나누어 최댓값이 80인 a의 값을 구한다.

$f(-5)$의 값을 구하시오. [4점] 54

Step ❶ $f(x)$의 이차항의 계수를 a로 놓고 조건 (가)를 만족시키는 $f(x)$를 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $f(x)=0$의 두 근이 -2와 4이므로

$f(x)=a(x+2)(x-4)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다. 즉

$f(x)=a(x^2-2x-8)$

$\quad=a(x-1)^2-9a$

Step ❷ $a>0$, $a<0$의 두 가지 경우로 나누어 조건 (나)를 만족시키는 a의 값을 구한다.

조건 (나)에서

(i) $a>0$일 때

$f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 80을 가지므로

$40a=80$, 즉 $a=2$

(ii) $a<0$일 때

$f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 80을 가지므로

$7a=80$, 즉 $a=\frac{80}{7}$

이때 $a<0$이므로 부적합하다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+2)(x-4)$이므로

$f(-5)=2\times(-3)\times(-9)=54$

F048 이차함수의 성질을 이용하여 도형 문제해결하기 정답 12

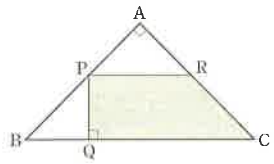
그림과 같이 $\angle A=90°$이고 $\overline{AB}=6$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 변 BC와 평행한 직선이 변 AC와 만나는 점을 R라 하자. [정답률 30%]

❶ $\overline{BQ}=a$라 하고 △PBQ, △APR의 넓이를 구한다.

사각형 PQCR의 넓이의 최댓값을 구하시오.

❷ □PQCR=△ABC−△PBQ−△APR임을 이용한다.

(단, 점 P는 꼭짓점 A와 꼭짓점 B가 아니다.) [4점] 12



Step ❶ $\overline{BQ}=a$라 하고 △PBQ, △APR의 넓이를 a로 나타낸다.

$\overline{BQ}=a$라 하면 △PBQ는 직각이등변삼각형이므로

$\triangle PBQ=\frac{1}{2}a^2$

또 △PBQ에서 $\overline{BP}=\sqrt{2}a$이므로

$\overline{PA}=6-\overline{BP}=6-\sqrt{2}a$

따라서 △APR는 $\overline{PA}=6-\sqrt{2}a$인 직각이등변삼각형이므로

$\triangle APR=\frac{1}{2}(6-\sqrt{2}a)^2$

Step ❷ 사각형 PQCR의 넓이를 a로 나타내고 최댓값을 구한다.

사각형 PQCR의 넓이는

$\triangle ABC-\triangle PBQ-\triangle APR$

$=\frac{1}{2}\times6^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(6-\sqrt{2}a)^2$

$=\frac{1}{2}(36-a^2-36+12\sqrt{2}a-2a^2)$

$=-\frac{3}{2}(a^2-4\sqrt{2}a)$

$=-\frac{3}{2}(a-2\sqrt{2})^2+12$

따라서 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값은 $\overline{BQ}=2\sqrt{2}$일 때 12이다.

다른 풀이

$\overline{\mathrm{PA}}=2x$라 하면 삼각형 APR의 넓이는 $2x^2$이다.

$\overline{\mathrm{PB}}=6-2x$에서

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}x$

이므로 삼각형 PBQ의 넓이는 $(3-x)^2$이다.

사각형 PQCR의 넓이가 최대가 되기 위해서는 두 삼각형 APR와 PBQ의 넓이의 합이 최소가 되어야 한다.

두 삼각형 APR와 PBQ의 넓이의 합은

$3x^2-6x+9=3(x-1)^2+6$

이므로 $x=1$일 때, 넓이의 최솟값은 6이다.

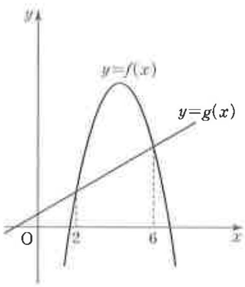
한편 삼각형 ABC의 넓이가 18이므로 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값은 $18-6=12$이다.

F049 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기 정답 ①

이차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표는 2와 6이다. $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다. $p+q$의 값은? [4점] [정답률 50%]

❶ $h(x)$는 이차항의 계수가 -1이고, $h(x)=0$의 두 근은 2와 6임을 이용한다.

❶ 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



Step ❶ $h(x)=0$의 두 근을 이용하여 $h(x)$의 식을 세운다.

$g(x)$는 일차함수이고 $f(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차함수이므로 $h(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 -1이다.

이때 이차방정식 $h(x)=0$의 두 근이 2와 6이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=-(x-2)(x-6)\\&=-x^2+8x-12\\&=-(x-4)^2+4\end{aligned}$$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 최댓값 4를 갖는다.

즉 $p=4$, $q=4$이므로

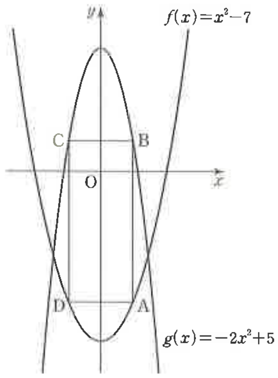
$p+q=8$

F050 이차함수의 그래프에서 도형 문제해결하기 정답 ①

두 이차함수 $f(x)=x^2-7$과 $g(x)=-2x^2+5$가 있다. [정답률 51%]

그림과 같이 네 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(a, g(a))$, $\mathrm{C}(-a, g(-a))$, $\mathrm{D}(-a, f(-a))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대가 되도록 하는 a의 값은? (단, $0<a<2$이다.) [4점]

❶ $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$



❶ $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{CD}}$임을 이용하여 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구한다.

Step ❶ 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{BA}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구한다.

$f(x)=x^2-7$, $g(x)=-2x^2+5$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=a-(-a)=2a$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{CD}}&=g(a)-f(a)\\&=(-2a^2+5)-(a^2-7)\\&=-3a^2+12\end{aligned}$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $h(a)$라 하면

$$\begin{aligned}h(a)&=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{CD}}\\&=2(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BA}})\\&=2(2a-3a^2+12)\\&=-6a^2+4a+24\end{aligned}$$

Step ❷ 이차함수의 식을 변형하여 둘레의 길이의 최댓값을 구한다.

$h(a)=-6\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{74}{3}$이므로 $a=\frac{1}{3}$일 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최대가 된다.

F051 이차함수의 그래프 추론하기 정답 ⑤

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 46%]

(가) $f(1)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(3)$이다.

❶ $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 가지며 대칭축은 $x=3$이고 아래로 볼록하다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $f(5)=0$ ❷ $x=3$이 대칭축임을 이용한다.

ㄴ. $f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$ ❸ 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(x)$를 그래프로 나타낸다.

ㄷ. $f(0)=k$라 할 때, x에 대한 방정식 $f(x)=kx$의 두 실근의 합은 11이다. ❹ $f(x)=0$의 두 근이 1, 5임을 이용한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ❺ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$의 최솟값과 대칭축을 구한다.

조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$는 '모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(3)$'이므로 $x=3$에서 최솟값을 가지고, $x=3$이 대칭축이며 아래로 볼록하다.

Step ❷ 조건 (가), (나)를 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

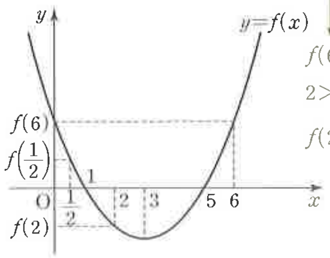
ㄱ. $x=3$이 대칭축이고 $f(1)=0$이므로 $f(5)=0$이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 이차함수 $f(x)$가 $x=3$에 대하여 대칭이고 아래로 볼록하므로 $f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$이다. (참)

$f(6)=f(0)$이고

$2>\frac{1}{2}>0$이므로

$f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(0)=f(6)$



ㄷ. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 1, 5이므로

$$f(x)=a(x-1)(x-5)$$
$$=a(x^2-6x+5)$$
$$=ax^2-6ax+5a$$

로 놓을 수 있다. (단, a는 상수)

$f(0)=k$이므로

$k=5a$

$f(x)=kx$에서

$ax^2-6ax+5a=5ax$이고 $a>0$이므로 → 이차함수 $y=f(x)$가 아래로 볼록하므로

$x^2-11x+5=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 11이다. (참)

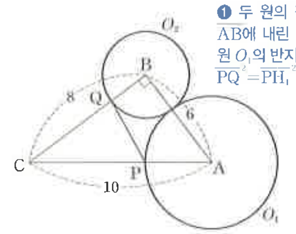
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

F052 이차함수의 최솟값을 이용한 도형 문제해결하기 정답 360

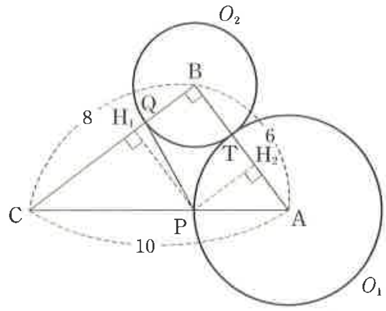
그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=10$인 직각삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, B를 각각 중심으로 하는 두 원 O_1, O_2가 서로 외접하고 있다. 변 AC와 원 O_1과의 교점을 P, 변 BC와 원 O_2와의 교점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}^2$의 최솟값은 $\frac{b}{a}$이다. ab의 값을 구하시오. (단, a와 b는 서로소인 자연수이다.) [4점] [정답률 7%]

360

❶ 두 원의 접점을 T, 점 P에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, 원 O_1의 반지름을 r라 하고 $\overline{PQ}^2=\overline{PH_1}^2+\overline{QH_1}^2$임을 이용한다.



Step ❶ 원 O_1의 반지름의 길이를 r로 놓고, 삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 $\overline{PH_2}$의 길이를 구한다.



두 원의 접점을 T, 점 P에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고 원 O_1의 반지름의 길이를 r $(0<r<6)$라 하자.

$\triangle AH_2P \backsim \triangle ABC$이므로 $\overline{PH_2}=\frac{4}{5}r$ → $\overline{AC}:\overline{AP}=\overline{CB}:\overline{PH_2}$이므로 $10:r=8:\overline{PH_2}$에서 $\overline{PH_2}=\frac{4}{5}r$

Step ❷ 삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 $\overline{PH_1}$의 길이를 구한다.

$\overline{BH_1}=\overline{PH_2}=\frac{4}{5}r$, $\overline{BQ}=\overline{BT}=6-r$이므로

$\overline{QH_1}=|\overline{BH_1}-\overline{BQ}|$ → r의 값에 따라 $\overline{BQ}>\overline{BH_1}$인 경우가 있으므로 절댓값 기호를 쓴다.

$$=\left|\frac{4}{5}r-(6-r)\right|$$

$$=\left|\frac{9}{5}r-6\right| \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle PH_1C \backsim \triangle ABC$, $\overline{CP}=10-r$이므로

$$\overline{PH_1}=\frac{3}{5}(10-r) \quad \cdots\cdots ㉡$$

→ $\overline{AC}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{PH_1}$이므로 $10:(10-r)=6:\overline{PH_1}$에서 $\overline{PH_1}=\frac{3}{5}(10-r)$

Step ❸ $\overline{PQ}^2$의 최솟값을 구한다.

㉠, ㉡에 의하여

$$\overline{PQ}^2=\overline{PH_1}^2+\overline{QH_1}^2$$
$$=\left\{\frac{3}{5}(10-r)\right\}^2+\left(\frac{9}{5}r-6\right)^2$$
$$=\frac{18}{5}(r^2-8r+20)$$
$$=\frac{18}{5}(r-4)^2+\frac{72}{5}$$

$\overline{PQ}^2$은 $r=4$일 때 최솟값 $\frac{b}{a}=\frac{72}{5}$이므로

$ab=5\times72=360$

F053 이차함수의 성질 추론하기 정답 ⑤

이차함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.) [4점] [정답률 55%]

〈보기〉

ㄱ. $a=b$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.

❶ $f(x)=(x-a)(x-b)$에 $a=b$를 대입한다.

ㄴ. 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$이다.

❷ $f(x)$를 $(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

ㄷ. $0<a<b$이면 $f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a-b}{2}\right)$이다.

❸ ㄴ과 수의 대소 관계의 성질, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 함숫값의 대소를 비교한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 함수 $f(x)$에 $a=b$를 대입해 본다.

ㄱ. $a=b$이면 $f(x)=(x-a)^2$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다. (참)

Step ❷ $f(x)$를 변형하여 최솟값을 구한다.

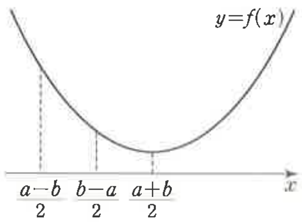
ㄴ. $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{4ab}{4}-\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) \\ &=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a^2-2ab+b^2}{2^2} \\ &=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{a+b}{2}$일 때 최솟값 $-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$을 갖는다. (참)

Step ❸ 이차함수의 그래프를 그리고 함숫값을 비교한다.

ㄷ. 이차함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$를 최솟값으로 갖는다. 이때 $0<a<b$이면 $\frac{a-b}{2}<\frac{b-a}{2}<\frac{a+b}{2}$이므로 $f\left(\frac{a-b}{2}\right)>f\left(\frac{b-a}{2}\right)>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$이다.



즉 $0<a<b$이면 $f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a-b}{2}\right)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ.
$$\begin{aligned} f\left(\frac{b-a}{2}\right)&=\left(\frac{b-a}{2}-a\right)\left(\frac{b-a}{2}-b\right) \\ &=\left(\frac{b-3a}{2}\right)\left(\frac{-a-b}{2}\right) \\ &=\frac{(3a-b)(a+b)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a-b}{2}\right)&=\left(\frac{a-b}{2}-a\right)\left(\frac{a-b}{2}-b\right) \\ &=\left(\frac{-a-b}{2}\right)\left(\frac{a-3b}{2}\right) \\ &=\frac{(3b-a)(a+b)}{4} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b-a}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)&=\frac{a+b}{4}(4a-4b) \\ &=(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

$0<a<b$이면 $a+b>0$, $a-b<0$이므로

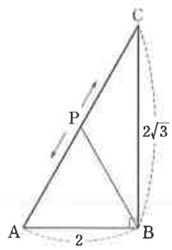
$(a+b)(a-b)<0$

따라서 $f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (참)

F054 이차함수의 최솟값을 이용한 도형 문제해결하기 정답 ④

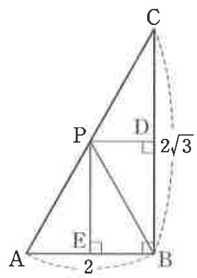
그림과 같이 $\angle B=90°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 직각삼각형 ABC에서 점 P가 변 AC 위를 움직일 때, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은? [4점] [정답률 50%]

❶ 도형의 성질을 이용하여 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$을 한 문자에 대한 식으로 나타낸 후 최솟값을 구한다.



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

Step ❶ 도형의 닮음의 성질을 이용하여 $\overline{PB}^2$, $\overline{PC}^2$을 다항식으로 나타낸다.



점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$\overline{PD}=a$라 하면 $\triangle CPD \backsim \triangle CAB$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{3}a$ ↳ $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{PD}:\overline{DC}$

$\overline{BD}=(2-a)\sqrt{3}$

$\overline{PB}^2=a^2+3(2-a)^2=4a^2-12a+12$

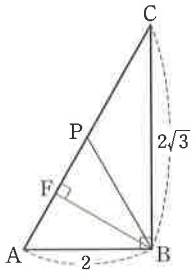
$\overline{PC}^2=a^2+3a^2=4a^2$

Step ❷ $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned} \overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=8a^2-12a+12 \\ &=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

다른 풀이



변 AC 위의 임의의 한 점 P에 대해 $\overline{PC}=x$라 하자.
점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라 하면 삼각형 BFP는 직각삼각형이다.
피타고라스 정리에 의하여 $\overline{PB}^2=\overline{PF}^2+\overline{BF}^2$이고, 삼각형 AFB는 $\angle A=60°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$

$\overline{AB}=2$, $\overline{AF}=1$, $\overline{FB}=\sqrt{3}$

$\overline{PF}=4-\overline{AF}-\overline{CP}=4-1-x=3-x$이므로

$\overline{AC}=2\overline{AB}=4$

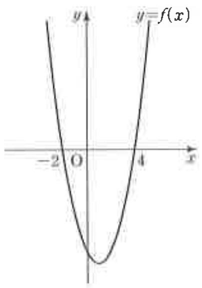
$\overline{PB}^2=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2+x^2\\&=x^2-6x+9+3+x^2\\&=2x^2-6x+12\\&=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}+12\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

F055 이차함수의 그래프를 이용한 도형 문제해결하기 정답 ⑤

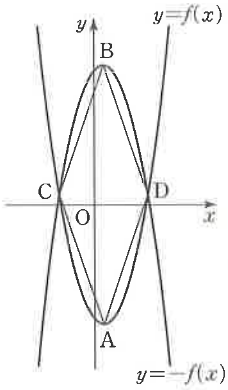
그림은 최고차항의 계수가 1이고 $f(-2)=f(4)=0$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. [정답률 56%]



함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x)+2$의 그래프의 꼭짓점을 각각
❶ $f(x)=(x+2)(x-4)$임을 이용한다.
A, B라 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x)+2$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ADBC의 넓이는? [4점]
❷ $f(x)=-f(x)+2$일 때 x의 값을 이용한다.
❸ 사각형 ADBC는 마름모임을 이용한다.

① $5\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $10\sqrt{10}$ ④ $20\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{10}$

Step ❶ 함수 $y=f(x)$와 $y=-f(x)+2$의 그래프의 꼭짓점을 이용하여 점 A와 점 B의 좌표를 구한다.



$f(x)=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8=(x-1)^2-9$이므로
$y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 A(1, -9)

$$\begin{aligned}-f(x)+2&=-(x+2)(x-4)+2\\&=-x^2+2x+10\\&=-(x-1)^2+11\end{aligned}$$

이므로 $y=-f(x)+2$의 그래프의 꼭짓점은 B(1, 11)

Step ❷ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=-f(x)+2$의 교점의 x좌표를 이용하여 점 C와 점 D의 좌표를 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=-f(x)+2$의 그래프의 교점의 x좌표는
$(x-1)^2-9=-(x-1)^2+11$에서
$x^2-2x-9=0$
$x=1\pm\sqrt{10}$
따라서 C$(1-\sqrt{10}, 1)$, D$(1+\sqrt{10}, 1)$

Step ❸ 사각형 ADBC가 마름모임을 알고 그 넓이를 구한다.

이때 선분 AB는 y축에 평행하고 선분 CD는 x축에 평행하므로 사각형 ADBC의 두 대각선은 직교한다.
따라서 사각형 ADBC가 마름모이므로 사각형 ADBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times20\times2\sqrt{10}=20\sqrt{10}$

F056 이차함수의 최대, 최소를 이용한 문제해결하기 정답 4

x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 43%]

(가) $f(-2)=f(6)$
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 -9이다.

❶ $f(x)=(x-2)^2-9$임을 이용한다.

방정식 $f(|f(x)|)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. [4점] 4
❷ $|f(x)|=t$ $(t\geq0)$로 놓고 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값을 구한다.

Step ❶ 두 조건 (가), (나)를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 세운다.

조건 (가)에서 $f(-2)=f(6)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은
$x=\frac{-2+6}{2}=2$
즉 꼭짓점의 x좌표는 2이다. 이때 이차항의 계수가 1이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다. 즉 $x=2$일 때 최솟값을 가지므로 조건 (나)에 의하여 $f(2)=-9$

이고 이차함수 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -9)$이다. 따라서

$$f(x)=(x-2)^2-9$$
$$=x^2-4x-5$$
$$=(x+1)(x-5)$$

Step ❷ 이차함수와 직선의 위치 관계를 이용하여 서로 다른 실근의 개수를 구한다.

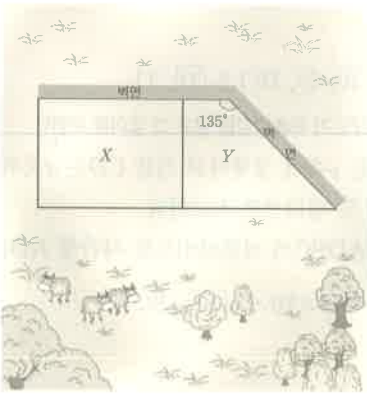
$f(|f(x)|)=0$에서 $|f(x)|=t\ (t\geq 0)$라 하면 $f(t)=0$이고 $t=5$이므로 $f(|f(x)|)=0$을 만족시키는 $f(x)$는 $f(x)=5,\ -5$이다.
이때 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=5$, $y=-5$는 각각 서로 다른 두 점에서 만나므로 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

F057 실생활에 활용된 이차함수의 최대, 최소 문제해결하기 정답 750

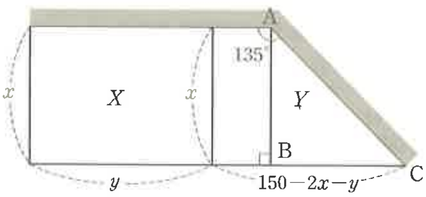
그림과 같이 135°로 꺾인 벽면이 있는 땅에 길이가 150m인 철망으로 울타리를 설치하여 직사각형 모양의 농장 X와 사다리꼴 모양의 농장 Y를 만들려고 한다. 농장 X의 넓이가 농장 Y의 넓이의 2배일 때, 농장 Y의 넓이의 최댓값을 $S(\mathrm{m}^2)$라 하자. S의 값을 구하시오. (단, 벽면에는 울타리를 설치하지 않고, 철망의 폭은 무시한다.) [4점] [정답률 20%]

❶ 직사각형의 세로와 가로의 길이를 각각 x, y로 놓고 (X의 넓이)$=2$(Y의 넓이)임을 이용한다.

750



Step ❶ 직사각형의 세로와 가로의 길이를 각각 x, y로 놓고 X의 넓이와 Y의 넓이의 식을 x, y로 나타낸다.



그림과 같이 직사각형의 세로와 가로의 길이를 각각 x, y라 하자.
X의 넓이는 xy이고, 철망의 길이가 150이므로 사다리꼴의 아랫변의 길이는 $150-2x-y$이다.
점 A에서 사다리꼴의 아랫변에 내린 수선의 발을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는 x이고 $\angle CAB=45°$이므로 선분 BC의 길이는 x이다.
사다리꼴의 윗변의 길이는

$$(150-2x-y)-x=150-3x-y$$

Y의 넓이는

$$\frac{1}{2}x\{(150-3x-y)+(150-2x-y)\}=\frac{1}{2}x(300-5x-2y)$$

Step ❷ X의 넓이는 Y의 넓이의 2배임을 이용하여 Y의 넓이의 최댓값을 구한다.

X의 넓이는 Y의 넓이의 2배이므로

$$xy=x(300-5x-2y)$$

$x>0$이므로 $y=300-5x-2y$에서

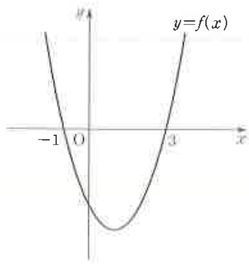
$$y=100-\frac{5}{3}x$$

$$(Y\text{의 넓이})=\frac{1}{2}xy \rightarrow X\text{의 넓이는 } xy\text{이고 } X\text{의 넓이는 } Y\text{의 넓이의 2배}$$
$$=\frac{1}{2}x\left(100-\frac{5}{3}x\right)=-\frac{5}{6}x^2+50x$$
$$=-\frac{5}{6}(x-30)^2+750$$

따라서 $x=30$일 때, Y의 넓이의 최댓값 S는 750이다.

F058 이차함수의 그래프를 이용하여 추론하기 정답 ④

x의 값의 범위가 실수 전체일 때, [정답률 48%]
함수 $f(x)=x^2-2x-3$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$$

❶ $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 방정식 $g(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 부등식 $g(x)\leq 0$의 해는 $-1\leq x\leq 3$이다.

❷ $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

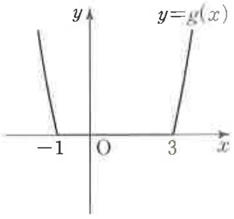
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ❹ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

(i) $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$일 때
  $f(x)\geq 0$이므로 $|f(x)|=f(x)$
(ii) $-1<x<3$일 때
  $f(x)<0$이므로 $|f(x)|=-f(x)$
(i), (ii)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 3) \\ 0 & (-1<x<3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



Step ❷ 함수 $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 부등식 $g(x)\le 0$의 해는 $-1\le x\le 3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

F059 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제해결하기 정답 ①

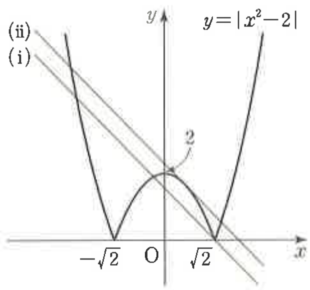
x에 대한 방정식 $|x^2-2|+x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 [정답률 53%]
❶ 두 함수 $y=|x^2-2|$와 $y=-x+k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만남을 이용한다.
가질 때, 모든 실수 k의 값의 곱은? [4점]

❶ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{21\sqrt{2}}{8}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{4}$

Step ❶ 방정식을 함수의 그래프로 나타내어 본다.

$$y=|x^2-2|=\begin{cases} x^2-2 & (x\le-\sqrt{2}\text{ 또는 }x\ge\sqrt{2}) \\ -x^2+2 & (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}) \end{cases}$$이므로

주어진 방정식 $|x^2-2|=-x+k$가 서로 다른 세 실근을 갖는 경우를 두 함수 $y=|x^2-2|$, $y=-x+k$의 그래프를 이용하여 나타내면 그림과 같다.



Step ❷ 그래프를 보고 서로 다른 세 실근을 갖는 경우를 이용하여 k의 값을 구한다.

(i) $y=-x+k$의 그래프가 점 $(\sqrt{2},\ 0)$을 지날 때

$0=-\sqrt{2}+k$이므로

$k=\sqrt{2}$

(ii) 두 함수 $y=-x^2+2$, $y=-x+k$의 그래프가 접할 때

$-x^2+2=-x+k$, 즉 $x^2-x+k-2=0$에서 판별식

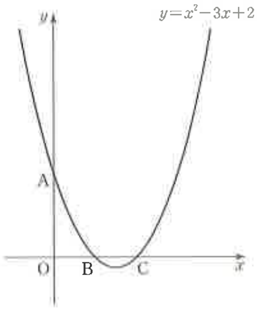
$D=1-4k+8=0$이므로 $k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은

$\sqrt{2}\times\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

F060 이차함수의 최댓값과 최솟값 구하기 정답 9

그림과 같이 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프가 y축과 만나 [정답률 58%]
❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.
는 점을 A, x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자.
점 P$(a,\ b)$가 점 A에서 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프를 따라 점 B를
❷ 점 P$(a,\ b)$가 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점임을 이용한다.
거쳐 점 C까지 움직일 때, $a+b+3$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]
❸ 최댓값과 최솟값을 구한다.
9



Step ❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

이차함수 $y=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$의 y절편은 2이고, x절편은 1, 2이므로

A$(0,\ 2)$, B$(1,\ 0)$, C$(2,\ 0)$

이때 점 P$(a,\ b)$는 두 점 A, B 사이를 움직이므로

$0\le a\le 2$

Step ❷ 주어진 조건을 이용하여 $a+b+3$을 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

또 점 P$(a,\ b)$는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-3a+2$

따라서

$$a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3=a^2-2a+5$$
$$=(a-1)^2+4\ (0\le a\le 2)$$

Step ❸ 최댓값과 최솟값을 구한다.

이므로 $0\le a\le 2$에서 $a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값은 5이고, $a=1$일 때 최솟값은 4이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5+4=9$

F061 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기 정답 15

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 [정답률 47%]
❶ 이차함수의 식과 $y=0$을 이용하여 이차방정식을 세운다.
$(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나고 $\alpha+\beta=20$일 때, 방정식 $f(2x-5)=0$의 모든 실근의 합을 구하시오. [4점]
15

Step ❶ 이차함수의 그래프와 x축과의 교점을 이차방정식의 근으로 이해한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (단, a는 상수, $a\ne0$)

으로 놓을 수 있다.

Step ❷ ❶의 방정식을 이용하여 주어진 방정식의 실근을 구한다.

$$f(2x-5)=a(2x-5-\alpha)(2x-5-\beta)$$
$$=a\left\{2\left(x-\frac{5+\alpha}{2}\right)\right\}\left\{2\left(x-\frac{5+\beta}{2}\right)\right\}$$

$f(2x-5)=0$에서 $x=\frac{5+\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{5+\beta}{2}$이므로

방정식 $f(2x-5)=0$의 모든 실근의 합은

$$\frac{5+\alpha}{2}+\frac{5+\beta}{2}=5+\frac{\alpha+\beta}{2}=5+\frac{20}{2}=15$$

F062 이차함수의 성질을 이용하여 추론하기

정답 ③

이차함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시킨다. [정답률 55%]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.
(나) $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 2)$, $(4,\ 17)$을 지난다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $1\le x\le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 -7이다.
ㄷ. $g(x)=f(x+3)$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.

❶ 두 조건을 만족할 때 주어진 보기의 참, 거짓을 판별한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 주어진 조건을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f(x)=a(x-3)^2+b$라 하면 조건 (나)에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 2)$, $(4,\ 17)$을 지나므로

$16a+b=2$ …… ㉠

$a+b=17$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=18$

즉 $f(x)=-(x-3)^2+18$이므로 $1\le x\le 8$에서 $x=8$일 때 최솟값 -7을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(x+3)=-x^2+18$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$이다.

즉 $g(-x)\ne-g(x)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

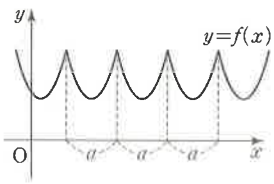
실전 솔루션

주기함수와 선대칭함수

(1) 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 실수 x에 대하여

$$f(x+a)=f(x)$$

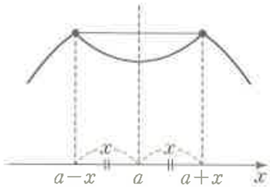
를 만족시키는 0이 아닌 상수 a가 존재할 때 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 이런 상수 a 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.



(2) 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 실수 x에 대하여

$$f(a-x)=f(a+x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 a가 존재할 때 함수 $f(x)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭인 선대칭함수라 한다.



(3) 함수 $f(A)=f(B)$에 대하여

① $A-B$가 상수이면 함수 $f(x)$는 주기함수이다.

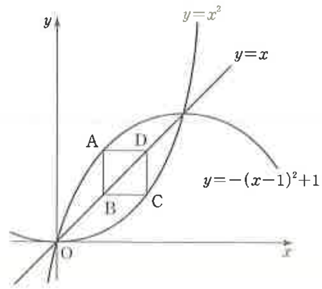
② $A+B$가 상수이면 함수 $f(x)$는 직선 $x=\frac{A+B}{2}$에 대칭인 선대칭함수이다.

F063 이차함수의 그래프를 이용하여 문제해결하기

정답 ②

그림과 같이 두 함수 $y=-(x-1)^2+1$, $y=x^2$의 그래프 위에 각각 점 A와 C를, 직선 $y=x$ 위에 서로 다른 두 점 B와 D를 잡아 사각형 ABCD가 정사각형이 되도록 하였다. 이때, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는? (단, 점 A, B, C, D의 x좌표는 양수이다.) [4점] [정답률 40%]

❶ 점 C의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 놓고 점 A의 좌표를 구한다.



① $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$ ② $\sqrt{5}-2$ ③ $2-\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $3-\sqrt{5}$

Step ❶ 점 C의 좌표를 임의로 정하고 세 점 A, B, D의 좌표를 구한다.

점 C의 x좌표를 a라 하면 점 C의 좌표는 $(a,\ a^2)$이다.

이때 사각형 ABCD가 정사각형이고 두 점 B, D가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표는 $(a^2,\ a^2)$, 점 D의 좌표는 $(a,\ a)$, 점 A의 좌표는 $(a^2,\ a)$이다.

Step ❷ 점 C의 좌표를 임의로 정하고 점 A, B, D의 좌표를 구한다.

한편 점 $A(a^2,\ a)$가 곡선 $y=-(x-1)^2+1$ 위의 점이므로

$a=-(a^2-1)^2+1$ …… ㉠

㉠을 a에 대하여 정리하면

$a^4-2a^2+a=0$에서 $a(a-1)(a^2+a-1)=0$ …… ㉡

이때 두 점 B, D는 서로 다른 점이므로 $a^2\ne a$에서 $a(a-1)\ne 0$이므로 $a\ne 0,\ a\ne 1$이다.

따라서 ㉡에서 $a^2+a-1=0$이므로

$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (a>0)$

이고 $a^2=-a+1$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는

$a-a^2=a-(-a+1)=2a-1=\sqrt{5}-2$

씨리얼 Special

문제편 pp.92 ~ 93

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 ① 5 ② 6 ③ 7 ④

1 복소수의 성질과 곱셈 공식을 이용하여 미지수 구하기 정답 ③

두 실수 a, b에 대하여 등식 $(a+i)(b+i)=(1+i)^3$이 성립
❶ 등식을 전개하여 $a+b$, ab의 값을 구한다.
할 때, a^3+b^3의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]
❷ a^3+b^3의 값을 구한다.

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

Step ❶ 주어진 등식을 정리하여 $a+b$, ab의 값을 구한다.

$(a+i)(b+i)=ab-1+(a+b)i$

$(1+i)^3=1+3i-3-i$
$=-2+2i$

이므로

$ab-1+(a+b)i=-2+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$ab-1=-2$, $a+b=2$

이므로

$ab=-1$, $a+b=2$

Step ❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a^3+b^3의 값을 구한다.

따라서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=2^3-3\times(-1)\times2$
$=14$

2 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 정답 ②

이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
❶ α, β를 이차방정식에 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.
$(\alpha^2-3\alpha)(\beta^2-3\beta)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Step ❶ 이차방정식의 두 근 α, β를 이차방정식에 대입하여 식을 변형한다.

α가 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 근이므로

$\alpha^2-4\alpha-2=0$

$\alpha^2-3\alpha=\alpha+2$

β가 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 근이므로

$\beta^2-4\beta-2=0$

$\beta^2-3\beta=\beta+2$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

α, β가 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

따라서

$(\alpha^2-3\alpha)(\beta^2-3\beta)=(\alpha+2)(\beta+2)$
$=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$
$=-2+2\times4+4=10$

다른 풀이

구하는 식을 전개하면

$(\alpha^2-3\alpha)(\beta^2-3\beta)=\alpha^2\beta^2-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+9\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+9\alpha\beta$

이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

따라서

$(\alpha^2-3\alpha)(\beta^2-3\beta)=(-2)2-3\times(-2)\times4+9\times(-2)$
$=10$

3 조건을 만족시키는 복소수 추론하기 정답 ④

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(z-2)^2<0$
(나) $z-\overline{z}=6i$

❶ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 z를 구한다.
$z\overline{z}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]
❷ $z\overline{z}$의 값을 구한다.

① 5 ② 8 ③ 10 ④ 13 ⑤ 15

Step ❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 복소수 z의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$z-2=(a-2)+bi$

조건 (가)에서 $(z-2)^2<0$이므로 $z-2$는 순허수이다.
(실수 부분)$=a-2=0$이고
(허수 부분)$=b\neq0$

$a-2=0$, $a=2$

조건 (나)에서 $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi=6i$이므로

$2b=6$, $b=3$

Step ❷ $z\overline{z}$의 값을 구한다.

따라서 $z=2+3i$이므로

$z\overline{z}=(2+3i)(2-3i)=2^2-(3i)^2=13$

4 복소수와 켤레복소수의 성질 문제해결하기 정답 ①

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여
❶ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 z를 구한다.

$(2+\overline{z})z=3-4i$

가 성립할 때, z^3+3z^2+7z의 값은? [4점]
❷ z^3+3z^2+7z의 값을 구한다.

① -5 ② -3 ③ $2i$ ④ $-1+i$ ⑤ $1+2i$

Step ❶ $z=a+bi$로 놓고 a, b의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

$(2+\overline{z})z=\overline{3-4i}$에서 $2z+\overline{z}z=3+4i$이므로

$2(a+bi)+(a-bi)(a+bi)=3+4i$

$(2a+a^2+b^2)+2bi=3+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+a^2+b^2=3$, $2b=4$

따라서 $b=2$

$b=2$를 $2a+a^2+b^2=3$에 대입하면

$2a+a^2+2^2=3$, $a^2+2a+1=0$

$(a+1)^2=0$

따라서 $a=-1$이므로

$z=-1+2i$

Step ❷ 곱셈 공식을 이용하여 z^3+3z^2+7z의 값을 구한다.

이때 $z+1=2i$이므로 $(z+1)^3=(2i)^3$에서

$z^3+3z^2+3z+1=-8i$

따라서

$$\begin{aligned} z^3+3z^2+7z &= (z^3+3z^2+3z)+4z \\ &= (-1-8i)+4(-1+2i)=-5 \end{aligned}$$

5 복소수의 거듭제곱 문제해결하기 정답 ②

복소수 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$와 두 실수 a, b에 대하여

$z+z^2+z^3+\cdots+z^{100}=a+bi$

❶ z의 거듭제곱이 반복되는 규칙을 찾아 a, b의 값을 구한다.

일 때, $(a+b)^4$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

① 2 ❷ 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ❶ z의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$에서

$z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{2i}{2}=i$

$z^3=z^2\times z=i\times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=z^2\times z^2=i\times i=-1$

$z^5=z^4\times z=(-1)\times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^6=z^4\times z^2=(-1)\times i=-i$

$z^7=z^4\times z^3=(-1)\times\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z^8=z^4\times z^4=(-1)\times(-1)=1$

$z^9=z^8\times z=1\times z=z$

$\vdots$

이므로 $z^k=z^{k+8}$ (k는 자연수)이다.

Step ❷ ❶에서 찾은 규칙을 이용하여 a, b의 값과 $(a+b)^4$의 값을 구한다.

이때 $z+z^2+z^3+\cdots+z^8=0$이므로

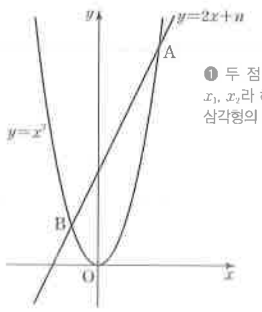
$$\begin{aligned} &z+z^2+z^3+\cdots+z^{100} \\ &=(z+z^2+z^3+\cdots+z^8)+\cdots+(z^{89}+z^{90}+\cdots+z^{96}) \\ &\qquad +z^{97}+z^{98}+z^{99}+z^{100} \\ &=z^{97}+z^{98}+z^{99}+z^{100} \\ &=z+z^2+z^3+z^4 \\ &=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+i+\frac{-1+i}{\sqrt{2}}+(-1) \\ &=-1+(1+\sqrt{2})i \end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=1+\sqrt{2}$이므로

$(a+b)^4=\{-1+(1+\sqrt{2})\}^4=(\sqrt{2})^4=4$

6 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 문제해결하기 정답 ③

그림과 같이 자연수 n에 대하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x+n$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 길이가 $6\sqrt{5}$일 때, 삼각형 ABO의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



❶ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하고 점의 좌표를 구하여 삼각형의 넓이를 구한다.

① 20 ② 22 ❸ 24 ④ 26 ⑤ 28

Step ❶ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하고 x_1, x_2의 값을 구한다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 ($x_2<0<x_1$)라 하자.

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2x+n$이 만나므로

$x^2=2x+n$에서 $x^2-2x-n=0$

x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-2x-n=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=2$

즉 $x_2=2-x_1$

이때 두 점 $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, x_2^2)$에 대하여

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2} \\ &= \sqrt{(2-2x_1)^2+(4-4x_1)^2} \\ &= \sqrt{20(1-x_1)^2} \\ &= 2\sqrt{5}|1-x_1|=6\sqrt{5} \end{aligned}$$

이므로 $|1-x_1|=3$

$1-x_1=3$ 또는 $1-x_1=-3$

$x_1>0$이므로 $x_1=4$, $x_2=-2$

Step ❷ ❶에서 구한 두 점의 좌표를 직선에 대입하여 n의 값을 구한다.

두 점 A, B의 좌표는 A$(4,\ 16)$, B$(-2,\ 4)$이고 직선 $y=2x+n$이 점 A$(4,\ 16)$을 지나므로 $16=2\times4+n$

따라서 $n=8$

즉 직선 $y=2x+8$이 y축과 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 D$(0,\ 8)$이다.

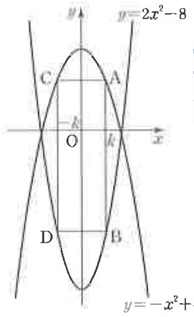
Step ❸ 삼각형 ABO의 넓이를 구한다.

삼각형 ABO의 넓이는 삼각형 ADO와 삼각형 DBO의 넓이의 합이다. 따라서 삼각형 ABO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times2\times8=24$

7 이차함수의 그래프에서 도형 문제해결하기 정답 ④

그림과 같이 두 이차함수 $y=-x^2+4$, $y=2x^2-8$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고 직선 $x=-k$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, $0<k<2$) [4점]



❶ 네 점 A, B, C, D의 좌표를 k에 대한 식으로 나타내고 사각형 ACDB의 둘레의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

① $\frac{65}{3}$ ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{71}{3}$ ④ $\frac{74}{3}$ ⑤ $\frac{77}{3}$

Step ❶ 두 이차함수의 그래프와 두 직선이 만나는 점의 좌표를 k에 대한 식으로 나타낸다.

두 이차함수 $y=-x^2+4$, $y=2x^2-8$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 두 점 A, B의 좌표는

A$(k,\ -k^2+4)$, B$(k,\ 2k^2-8)$

두 이차함수 $y=-x^2+4$, $y=2x^2-8$의 그래프와 직선 $x=-k$가 만나는 두 점 C, D의 좌표는

C$(-k,\ -k^2+4)$, D$(-k,\ 2k^2-8)$

Step ❷ 직사각형의 네 변의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

이때

$\overline{AB}=\overline{CD}=(-k^2+4)-(2k^2-8)=-3k^2+12$

$\overline{AC}=\overline{BD}=2k$

Step ❸ 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값을 구한다.

따라서 사각형 ACDB의 둘레의 길이는

$$2(-3k^2+12)+4k=-6k^2+4k+24$$
$$=-6\left(k-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{74}{3}$$

이때 $0<k<2$이므로 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최댓값은

$k=\frac{1}{3}$일 때 $\frac{74}{3}$이다.

III 방정식과 부등식

G 여러 가지 방정식

문제편 pp.97 ~ 109

필수 기출

001 ③	002 ③	003 ④	004 ①	005 ①	006 ④
007 ④	008 ③	009 4	010 ⑤	011 ②	012 ②
013 ①	014 ①	015 6	016 ①	017 ⑤	018 ①
019 16	020 ⑤	021 ②	022 ②	023 ⑤	024 ②
025 ⑤	026 ④	027 ②	028 ①	029 ⑤	030 ①
031 7	032 ②	033 60	034 39	035 394	036 14
037 ③	038 25				

플러스 기출

039 ①	040 ①	041 24	042 ②	043 5	044 20
045 16	046 ⑤				

G001 삼차방정식의 근 구하기 정답 ③

x에 대한 삼차방정식 [정답률 82%]

$ax^3+x^2+x-3=0$

❶ $x=1$을 대입하여 a의 값을 구한다.

의 한 근이 1일 때, 나머지 두 근의 곱은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ $x=1$이 삼차방정식 $ax^3+x^2+x-3=0$의 근임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$ax^3+x^2+x-3=0$의 한 근이 1이므로

$a+1+1-3=0$, 즉 $a=1$

따라서 주어진 방정식은 $x^3+x^2+x-3=0$이다.

Step ❷ 삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 좌변을 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

$f(x)=x^3+x^2+x-3$으로 놓으면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

Step ❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 두 근의 곱을 구한다.

따라서 삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근과 같다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 3

G002 삼차방정식의 근 구하기 정답 ③

삼차방정식 [정답률 81%]

$x^3-2x^2-5x+6=0$

❶ 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해한다.

의 세 실근 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$에 대하여 $\alpha+\beta+2\gamma$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Step ❶ 조립제법을 이용하여 주어진 방정식을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면

$f(1)=1-2-5+6=0$

$f(3)=27-18-15+6=0$

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
3	1	-1	-6	0
		3	6	
	1	2	0	

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)=0$이므로

$\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=3$

따라서 $\alpha+\beta+2\gamma=-2+1+2\times3=5$

G003 사차방정식의 근 구하기 정답 ④

x에 대한 사차방정식 [정답률 76%]

$x^4-x^3+ax^2+x+6=0$

❶ 한 근을 방정식에 대입한다.

의 한 근이 -2일 때, 네 실근 중 가장 큰 것을 b라 하자. $a+b$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [3점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

Step ❶ 주어진 사차방정식의 한 근을 이용하여 a의 값을 구한다.

주어진 사차방정식의 한 근이 -2이므로 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^4-(-2)^3+a\times(-2)^2+(-2)+6=0$

$4a+28=0$, $a=-7$

따라서 주어진 사차방정식은

$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

Step ❷ 주어진 사차방정식을 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$으로 놓으면

$f(-1)=1-(-1)-7+(-1)+6=0$

$f(1)=1-1-7+1+6=0$

조립제법에 의하여

-2	1	-1	-7	1	6
		-2	6	2	-6
-1	1	-3	-1	3	0
		-1	4	-3	
1	1	-4	3	0	
		1	-3		
	1	-3	0		

$f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$

이므로

$f(x)=0$에서 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=3$

Step ❸ $a+b$의 값을 구한다.

따라서 $a=-7$, $b=3$이므로

$a+b=-4$

G004 삼차방정식의 근 구하기 정답 ①

삼차방정식 $2x^3+x^2+2x+3=0$의 한 허근을 α라 할 때, [정답률 71%]

❶ 좌변을 인수분해한다.

$4\alpha^2-2\alpha+7$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

Step ❶ 조립제법을 이용하여 주어진 방정식을 인수분해한다.

$f(x)=2x^3+x^2+2x+3$으로 놓으면

$f(-1)=-2+1-2+3=0$

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	2	1	2	3
		-2	1	-3
	2	-1	3	0

$2x^3+x^2+2x+3=(x+1)(2x^2-x+3)$

Step ❷ 주어진 허근이 이차방정식의 근임을 이용하여 식의 값을 구한다.

따라서 α는 이차방정식 $2x^2-x+3=0$의 허근이다.

$2\alpha^2-\alpha+3=0$이므로

$4\alpha^2-2\alpha+7=2(2\alpha^2-\alpha+3)+1=1$

G005 삼차방정식의 근 이해하기 정답 ①

삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 [정답률 81%]

❶ 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

두 허근을 α, β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 값은? [3점]

❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step ❶ 조립제법을 이용하여 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3+x^2+x-3$으로 놓으면

$f(1)=1+1+1-3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

주어진 삼차방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

이므로

$$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=3-(-2)+1=6\end{aligned}$$

G006 사차방정식의 근 구하기 정답 ④

사차방정식 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$의 네 실근 중 가장 작 [정답률 81%]

❶ 사차방정식의 좌변을 인수분해한다.

은 것을 α, 가장 큰 것을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ❹ 4 ⑤ 5

Step ❶ 인수정리를 이용하여 인수를 찾고, 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$으로 놓으면

$f(1)=1-5+5+5-6=0$

$f(-1)=1+5+5-5-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x-1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

이므로 $f(x)=0$의 네 실근은 -1, 1, 2, 3이다.

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=4$

G007 삼차방정식의 허근 구하기 정답 ④

방정식 $x^3+8=0$의 근 중 허수부분이 양수인 근을 α라 하자. [정답률 71%]

❶ 방정식의 세 근 중 허수부분이 양수인 근을 찾는다.

$\alpha-\overline{\alpha}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.) [3점]

① $-2\sqrt{3}i$ ② $-\sqrt{3}i$ ③ $\sqrt{3}i$ ❹ $2\sqrt{3}i$ ⑤ $4\sqrt{3}i$

Step ❶ 방정식 $x^3+8=0$의 근을 구한다.

$x^3+8=0$에서 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x^2-2x+4=0$

$x^2-2x+4=0$의 근을 구하면

$x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 방정식 $x^3+8=0$의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=1-\sqrt{3}i$

Step ❷ α의 값을 구하고 $\alpha-\overline{\alpha}$의 값을 구한다.

이때

$x=-2+0i$의 허수부분은 0

$x=1+\sqrt{3}i$의 허수부분은 $\sqrt{3}$

$x=1-\sqrt{3}i$의 허수부분은 $-\sqrt{3}$

이므로

$\alpha=1+\sqrt{3}i$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha-\overline{\alpha}&=1+\sqrt{3}i-(\overline{1+\sqrt{3}i})\\&=1+\sqrt{3}i-(1-\sqrt{3}i)\\&=2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

G008 삼차방정식의 근 이해하기 정답 ③

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-2=0$ [정답률 83%]

❶ 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

의 두 허근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값은? [3점]

❷ 두 허근 α, β의 합과 곱을 구한다.

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ❸ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

Step ❶ 조립제법을 이용하여 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-2x^2+3x-2$로 놓으면

$f(1)=1-2+3-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-x+2)$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-2=0$의 두 허근은 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 허근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$

이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}$$

G009 사차방정식의 근 구하기 　　정답 4

사차방정식 $x^4-6x^3+15x^2-22x+12=0$의 모든 실근의 합 　[정답률 65%]
❶ 사차방정식의 좌변을 인수분해한다.
을 구하시오. [3점]

Step ❶ 인수정리를 이용하여 인수를 찾고, 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

$f(x)=x^4-6x^3+15x^2-22x+12$로 놓으면

$f(1)=1-6+15-22+12=0$

$f(3)=81-162+135-66+12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -6 & 15 & -22 & 12 \\ & & 1 & -5 & 10 & -12 \\ \hline 3 & 1 & -5 & 10 & -12 & \boxed{0} \\ & & 3 & -6 & 12 & \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-3)(x^2-2x+4)$

이때 $x^2-2x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 모든 실근의 합은 $1+3=4$ 　$\rightarrow D=(-2)^2-4\times1\times4<0$

실전 솔루션

(1) 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

(2) 인수 $x-\alpha$에서 α는 $\pm\dfrac{(\text{상수항의 양의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 양의 약수})}$ 중에 있다.

G010 사차방정식의 근 이해하기 　　정답 ⑤

사차방정식 $(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$의 　[정답률 69%]
❶ $x^2+x=t$로 치환하여 인수분해한다.
서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값은?
❷ 허근의 성질을 이용한다.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [3점]

① 4 　② 5 　③ 6 　④ 7 　⑤ 8

Step ❶ $x^2+x=t$로 치환하여 인수분해한다.

$x^2+x=t$로 놓으면

$(t-1)(t+3)-5=0$, $t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0$

$(x^2+x+4)(x^2+x-2)=0$

$(x+2)(x-1)(x^2+x+4)=0$

Step ❷ 이차방정식의 근의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

이때 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times4=-15<0$

즉 α, β는 $x^2+x+4=0$의 서로 다른 두 허근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$

$\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로 $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=8$

$\rightarrow$ 이차방정식의 계수가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

해검단 TALK

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 근의 공식에 의하여 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이때 $b^2-4ac<0$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

두 허근 α, β에 대하여

$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$라 하면 $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이므로

$\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$

G011 삼차방정식의 근을 이용하여 미정계수 구하기 　　정답 ②

다항식 $f(x)=x^3-(a+4)x^2+(4a-5)x+5a$에 대하여 　[정답률 59%]
$f(a)=f(a+3)=0$을 만족시키는 실수 a의 값의 합은? [3점]
❶ $f(a)=0$임을 이용하여 다항식을 인수분해한 후, $f(a+3)=0$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

① -4 　② -2 　③ 0 　④ 2 　⑤ 4

Step ❶ 조립제법을 이용하여 삼차방정식 $f(x)=0$의 근을 구한다.

$f(a)=0$, $f(a+3)=0$이므로 a와 $a+3$은 삼차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & -a-4 & 4a-5 & 5a \\ & & a & -4a & -5a \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-a)(x^2-4x-5)$

$\quad=(x-a)(x+1)(x-5)$

$f(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

Step ❷ $f(a+3)=0$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(a+3)=0$에서 $a+3$은 다항식 $f(x)=0$의 근이므로

$a+3=-1$ 또는 $a+3=5$

따라서 $a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 값의 합은 $(-4)+2=-2$

다른 풀이

$f(a+3)=(a+3)^3-(a+4)(a+3)^2+(4a-5)(a+3)+5a$

$\quad=3a^2+6a-24$

$f(a+3)=0$에서

$a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

따라서 $a=-4$ 또는 $a=2$

$a=-4$일 때 $f(-4)=-64+84-20=0$

$a=2$일 때 $f(2)=8-24+6+10=0$

이므로 $a=-4$, $a=2$는 조건을 만족시킨다.

따라서 실수 a의 값의 합은

$(-4)+2=-2$

G012 삼차방정식의 근 이해하기 정답 ②

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, [정답률 73%]
❶ $x^3+2x^2-3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$의 값은? [4점]

① -5 ❷ -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

Step ❶ 최고차항의 계수가 1이고 세 근이 α, β, γ인 삼차방정식을 구한다.

최고차항의 계수가 1이고 세 근이 α, β, γ인 삼차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로
$x^3+2x^2-3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ …… ㉠

Step ❷ ㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하여 $(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$의 값을 구한다.

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^3+2\times(-3)^2-3\times(-3)+4$
$=(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)$
$4=-(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$
$-4=(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$
따라서 $(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=-4$

G013 삼차방정식의 근 이해하기 정답 ①

x에 대한 방정식 [정답률 75%]
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^7+x^6+x^5+x^4$$
❶ 좌변을 전개하여 정리한다.
의 세 근을 각각 α, β, γ라 할 때, $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$의 값은? [4점]

❶ 3 ② 7 ③ 11 ④ 15 ⑤ 19

Step ❶ 주어진 식의 좌변을 전개하여 식을 간단히 한다.

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=\{1(1+x^2)+x(1+x^2)\}(1+x^4)$
$=(1+x^2+x+x^3)(1+x^4)$
$=(1+x+x^2+x^3)(1+x^4)$
$=(1+x^4)(1+x+x^2+x^3)$
$=1(1+x+x^2+x^3)+x^4(1+x+x^2+x^3)$
$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$
이므로
$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7=x^7+x^6+x^5+x^4$

Step ❷ 삼차방정식을 인수분해하여 근을 구한다.

$1+x+x^2+x^3=0$
$(1+x)+x^2(1+x)=0$
$(1+x)(1+x^2)=0$
$x=-1$ 또는 $x^2=-1$
$x=-1$ 또는 $x=i$ 또는 $x=-i$
따라서 주어진 방정식의 세 근은 -1, i, $-i$이므로
$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-1)^4+i^4+(-i)^4=1+1+1=3$

다른 풀이

주어진 식의 우변을 인수분해하면
$x^4(x^3+x^2+x+1)=x^4\{x^2(x+1)+x+1\}=x^4(x^2+1)(x+1)$
$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^4(1+x)(1+x^2)$
$(1+x)(1+x^2)(1+x^4-x^4)=0$
$(1+x)(1+x^2)=0$
$x=-1$ 또는 $x^2=-1$
따라서 주어진 방정식의 세 근은 -1, i, $-i$이므로
$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-1)^4+i^4+(-i)^4=1+1+1=3$

G014 삼차방정식과 도형과의 관계 추론하기 정답 ①

다음은 x에 대한 삼차방정식 [정답률 49%]
$$2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$$
의 서로 다른 세 실근이 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 상수 k의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> 삼차방정식 $2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$에서
> ❶ $x=1$을 대입하면 등식이 성립한다.
> $(x-1)(\boxed{(가)}+k)=0$
> ❷ 조립제법을 이용한다.
> 이므로 삼차방정식 $2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$의 서로 다른 세 실근은 1과 이차방정식 $\boxed{(가)}+k=0$의 두 근이다. 이차방정식 $\boxed{(가)}+k=0$의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하자. 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같이 2가지로 나눌 수 있다.
> (i) 빗변의 길이가 1인 경우
> $\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$이다.
> 그러므로 $k=\boxed{(나)}$이다.
> 그런데 $\boxed{(가)}+k=0$에서 판별식 $D<0$이므로 α, β는 실수가 아니다.
> 따라서 1, α, β는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.
> (ii) 빗변의 길이가 α인 경우
> $1+\beta^2=\alpha^2$이므로 $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1$이다.
> 그러므로 $k=\boxed{(다)}$이다. 이때 1, α, β는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.
> 따라서 (i)과 (ii)에 의하여 $k=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(x)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $f(3)\times\dfrac{q}{p}$의 값은? [4점]

❶ $\dfrac{13}{2}$ ② $\dfrac{15}{2}$ ③ $\dfrac{17}{2}$ ④ $\dfrac{19}{2}$ ⑤ $\dfrac{21}{2}$

Step ❶ 주어진 과정에 따라 빈칸을 알맞게 채운다.

삼차방정식 $2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$에 $x=1$을 대입하면
$2\times1^3-5\times1^2+(k+3)\times1-k=0$
따라서 등식이 성립하므로 삼차방정식
$2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$의 한 근은 1이다.
조립제법에 의하여

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -5 & k+3 & -k \\ & & 2 & -3 & k \\ \hline & 2 & -3 & k & 0 \end{array}$$

따라서 $(x-1)(\boxed{2x^2-3x}+k)=0$

즉 삼차방정식 $2x^3-5x^2+(k+3)x-k=0$의 서로 다른 세 실근은 1과 이차방정식 $\boxed{2x^2-3x}+k=0$의 두 근이다. 이차방정식 $\boxed{2x^2-3x}+k=0$의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하자. 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같이 2가지로 나눌 수 있다.

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$이다.

이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$이다.

$\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{k}{2}=1$

이므로 $k=\boxed{\frac{5}{4}}$이다.

그런데 $\boxed{2x^2-3x}+\frac{5}{4}=0$에서 판별식 $D<0$이므로 α, β는 실수가 아니다. 따라서 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ii) 빗변의 길이가 α인 경우

$1+\beta^2=\alpha^2$이므로 $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1$이다.

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$에서 $\alpha-\beta=\frac{2}{3}$이고,

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\frac{k}{2}$

이므로 $k=\boxed{\frac{65}{72}}$이다. 이때 $\alpha=\frac{13}{12}$, $\beta=\frac{5}{12}$이므로 1, α, β는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여 $k=\boxed{\frac{65}{72}}$이다.

그러므로 $f(x)=2x^2-3x$, $p=\frac{5}{4}$, $q=\frac{65}{72}$이다.

따라서 $f(3)\times\frac{q}{p}=9\times\frac{\frac{65}{72}}{\frac{5}{4}}=\frac{13}{2}$

G015 사차방정식의 근 이해하기 정답 6

사차방정식 $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오. [4점] [정답률 59%]

❶ $x^2-5x=t$로 치환하여 인수분해한다.

6

Step ❶ $x^2-5x=t$로 치환하여 방정식을 푼다.

$(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$에서 $x^2-5x=t$로 놓으면

$t(t+13)+42=0$

$t^2+13t+42=0$

$(t+6)(t+7)=0$

$t=x^2-5x$이므로

$(x^2-5x+6)(x^2-5x+7)=0$

$(x-2)(x-3)(x^2-5x+7)=0$

따라서 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x^2-5x+7=0$

Step ❷ 모든 실근의 곱을 구한다.

이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-28=-3<0$

이므로 이차방정식 $x^2-5x+7=0$은 허근을 갖는다.

따라서 모든 실근의 곱은

$2\times3=6$

G016 고차방정식의 해 추론하기 정답 ①

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$이 무리수일 때, $\sqrt{n}=a+b$ (a는 자연수, $0<b<1$)라 하자. 다음은 $a^3-9ab+b^3=0$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하는 과정이다. [정답률 70%]

> $\sqrt{n}=a+b$ (a는 자연수, $0<b<1$)이므로
>
> $b=\sqrt{n}-a$
>
> $a^3-9ab+b^3=a^3-9a(\sqrt{n}-a)+(\sqrt{n}-a)^3$
>
> $=(3a^2-9a+n)\sqrt{n}+9a^2+(\boxed{(가)})\times a$
>
> ❶ 식을 변형하여 (가)에 들어갈 식을 구한다.
>
> $=0$
>
> 무리수가 서로 같을 조건에 의하여
>
> $3a^2-9a+n=0$ …… ㉠
>
> $9a^2+(\boxed{(가)})\times a=0$ …… ㉡
>
> ㉠, ㉡에서 n을 소거하면
>
> $9a^3+\boxed{(나)}=0$ 따라서 $a=2$
>
> ❷ 식을 변형하여 (나)에 들어갈 식을 구한다.
>
> 따라서 $n=6$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(a)$라 할 때, $\frac{g(2)}{f(2)}$의 값은? [4점]

❶ 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

Step ❶ 식을 변형하여 (가)에 들어갈 식을 구한다.

$\sqrt{n}=a+b$ (a는 자연수, $0<b<1$)이므로 $b=\sqrt{n}-a$

$a^3-9ab+b^3=a^3-9a(\sqrt{n}-a)+(\sqrt{n}-a)^3$

$=a^3-9a(\sqrt{n}-a)+(n\sqrt{n}-3an+3a^2\sqrt{n}-a^3)$

$=(3a^2-9a+n)\sqrt{n}+9a^2+(\boxed{-3n})\times a$

$=0$

무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a^2-9a+n=0$ …… ㉠

$9a^2+(\boxed{-3n})\times a=0$ …… ㉡

Step ❷ 식을 변형하여 (나)에 들어갈 식을 구하고 $\frac{g(2)}{f(2)}$의 값을 구한다.

㉠$\times3a+$㉡을 하면 $9a^3+(\boxed{-18a^2})=0$

따라서 $f(n)=-3n$, $g(a)=-18a^2$이므로

$\frac{g(2)}{f(2)}=12$

G017 삼차방정식을 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

다항식 $2x^3+x^2+x-1$을 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 몫 [정답률 68%]
❶ $2x^3+x^2+x-1=(x-a)Q(x)+3$
은 $Q(x)$, 나머지는 3이다. $Q(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]
❷ ❶의 식에 $x=a$를 대입한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 다항식 $2x^3+x^2+x-1$을 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$와 나머지 3을 이용하여 식을 세운다.

다항식 $2x^3+x^2+x-1$을 일차식 $x-a$로 나누었을 때 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이므로

$2x^3+x^2+x-1=(x-a)Q(x)+3$ …… ㉠

Step ❷ ㉠의 양변에 $x=a$를 대입하여 얻은 삼차방정식을 풀어 a의 값을 구한다.

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$2a^3+a^2+a-1=3$

$2a^3+a^2+a-4=0$

$f(a)=2a^3+a^2+a-4$로 놓으면

$f(1)=2\times1^3+1^2+1-4=0$

이므로

$(a-1)(2a^2+3a+4)=0$

$2a^2+3a+4=0$이 실근을 갖지 않으므로

$a=1$

Step ❸ ㉠에 $a=1$을 대입한 후 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 구한다.

㉠에 $a=1$을 대입하면

$2x^3+x^2+x-1=(x-1)Q(x)+3$

조립제법을 이용하여 $2x^3+x^2+x-1$을 $x-1$로 나눈 몫을 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ & & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & \boxed{3} \end{array}$$

$2x^3+x^2+x-1=(x-1)(2x^2+3x+4)+3$

따라서 $Q(x)=2x^2+3x+4$이므로

$Q(a)=Q(1)=9$

G018 삼차방정식의 근의 성질을 이용하여 추론하기 정답 ①

다음은 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ일 [정답률 72%]
때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 삼차방정식을 구하는 과정의 일부이다.

> α가 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 한 근이므로
> $\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1=0$이다.
> α는 0이 아니므로 양변을 α^3으로 나누어 정리하면
> $$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\boxed{(가)}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$$
> ❶ 양변을 α^3으로 나누고 정리하여 (가)에 들어갈 수를 구한다.
> 이다.
> 그러므로 $\frac{1}{\alpha}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식
> ❷ $\frac{1}{\alpha}$을 x로 생각하여 (나)에 들어갈 식을 구한다.
> $\boxed{(나)}=0$
> 의 한 근이다.
> 같은 방법으로 β, γ도 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 근이므로
> ⋮
> 이다. 따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식은 $\boxed{(나)}=0$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(x)$라 할 때, $p+f(2)$의 값은? [3점]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

Step ❶ 식을 변형하여 (가)에 들어갈 수를 구한다.

α가 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 한 근이므로

$\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1=0$

이다.

α는 0이 아니므로 양변을 α^3으로 나누면

$1+\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=0$

식을 정리하면

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\boxed{3}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$

이다.

Step ❷ 치환하여 (나)에 들어갈 식을 구하고 $p+f(2)$의 값을 구한다.

그러므로 $\frac{1}{\alpha}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식

$\boxed{x^3+3x^2+2x+1}=0$의 한 근이다.

같은 방법으로 β, γ도 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 근이므로

$\beta^3+2\beta^2+3\beta+1=0$ …… ㉠

$\gamma^3+2\gamma^2+3\gamma+1=0$ …… ㉡

β, γ는 0이 아니므로 ㉠, ㉡의 양변을 각각 β^3, γ^3으로 나누면

$1+\frac{2}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}=0$

$1+\frac{2}{\gamma}+\frac{3}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^3}=0$

식을 정리하면

$\left(\frac{1}{\beta}\right)^3+3\left(\frac{1}{\beta}\right)^2+2\left(\frac{1}{\beta}\right)+1=0$

$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^3+3\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2+2\left(\frac{1}{\gamma}\right)+1=0$

이다.

그러므로 $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식

$x^3+3x^2+2x+1=0$의 근이다.

즉 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한

삼차방정식은 $\boxed{x^3+3x^2+2x+1}=0$

따라서 $p=3$, $f(x)=x^3+3x^2+2x+1$이므로

$p+f(2)=3+25=28$

G019 사차방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 16

최고차항의 계수가 음수인 이차다항식 $P(x)$가 모든 실수 x [정답률 18%] 에 대하여

$$\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

❶ 완전제곱식이어야 한다.

를 만족시킨다. $\{P(a)\}^2$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) [4점] 16

Step ❶ $P(x)+x$가 이차식이므로 $\{P(x)+x\}^2$가 이차식의 완전제곱식임을 이용한다.

$P(x)$가 이차다항식이므로 $P(x)+x$도 이차다항식이다.

$\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$ …… ㉠

이므로 $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$는 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

Step ❷ $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$가 이차식의 완전제곱식이 되도록 하는 a의 값을 구한다.

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$

$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{4}\right)^2-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$ …… ㉡

에서

$(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)=0$

$a^4+10a^2-11=0$

$(a^2+11)(a^2-1)=0$

$a=1$ 또는 $a=-1$

$a>0$이므로 $a=1$

Step ❸ $A^2=B^2$이면 $A=B$ 또는 $A=-B$임을 이용한다.

㉠, ㉡에 의하여

$\{P(x)+x\}^2=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$

$=\left(x^2+\frac{5-1^2}{2}\right)^2$

$=(x^2+2)^2$

$P(x)+x=x^2+2$ 또는 $P(x)+x=-(x^2+2)$,

즉 $P(x)=x^2-x+2$ 또는 $P(x)=-x^2-x-2$

$P(x)$의 이차항의 계수가 음수이므로 $P(x)=-x^2-x-2$

따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-4)^2=16$

다른 풀이

$\{P(x)+x\}^2=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)+x=-x^2+px+q$

$(-x^2+px+q)^2=x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

에서

$-2p=0$,

$p^2-2q=5-a^2$,

$2pq=0$,

$q^2=-5a^2+9$

이므로 $p=0$이고 $a^2=2q+5$

$q^2+10q+16=0$

$(q+8)(q+2)=0$

$q=-8$ 또는 $q=-2$

$q=-8$이면 $a^2=-11<0$이므로 모순되어 $q=-2$

$a^2=2q+5$에 $q=-2$를 대입하면

$a^2=2\times(-2)+5$

$a^2=1$

a가 양수이므로 $a=1$

따라서 $P(x)+x=-x^2-2$, 즉 $P(x)=-x^2-x-2$

따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$

G020 삼차방정식의 허근의 성질 추론하기 정답 ⑤

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 [정답률 42%] 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$

ㄴ. $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$

ㄷ. $(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는 50이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 허근의 성질을 이용하여 〈보기〉의 참, 거짓을 판별한다.

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$의 다른 한 허근이므로

$\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\times\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

$\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$

따라서 $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$ (참)

ㄷ. $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$

$\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\frac{1}{\omega}\right)^n$

$\omega+\overline{\omega}=-1$이므로 $\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}=\frac{\overline{\omega}}{-1}=-\overline{\omega}$

$=(-1)^n\times\left(\frac{1}{\omega}\right)^n$

$=(-1)^n\times(\omega^2)^n$

$(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 n은

$(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$, $1=(-1)^n$을 만족시키므로 n은 짝수이다. 그러므로 100 이하의 짝수 n의 개수는 50이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

G021 삼차방정식의 켤레근을 이용하여 문제해결하기 정답 ②

세 실수 a, b, c에 대하여 한 근이 $1+\sqrt{3}i$인 방정식 [정답률 59%]

❶ 삼차방정식의 켤레근을 이용하여 다른 근을 찾는다.

$x^3+ax^2+bx+c=0$과 이차방정식 $x^2+ax+2=0$이 공통인 근 m을 가질

❷ 삼차방정식과 이차방정식에 공통근 m을 대입하여 m의 값을 구한다.

때, m의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

① 2 ❷ 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

Step ❶ 방정식의 계수가 모두 실수일 때, 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}i$임을 이용한다.

방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{3}i$가 근이면 $1-\sqrt{3}i$도 근이다.

$1+\sqrt{3}i$가 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 근이면 $1-\sqrt{3}i$ 또한 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 근이어야 한다.

Step ❷ 삼차방정식을 인수분해하여 m의 값을 구한다.

$1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-2x+4=0$이므로 $1+\sqrt{3}i$는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 근이 될 수 없다. 따라서

$m\neq1+\sqrt{3}i$

즉 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 세 근

$1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$, m

을 갖는다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+m=2+m$

$(1+\sqrt{3}i)\times(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\times m+(1-\sqrt{3}i)\times m=4+2m$

$(1+\sqrt{3}i)\times(1-\sqrt{3}i)\times m=4m$

이므로

$x^3+ax^2+bx+c=x^3-(m+2)x^2+2(m+2)x-4m=0$

따라서 $a=-m-2$ ...... ㉠

또한 m은 $x^2+ax+2=0$의 근이므로 $m^2+am+2=0$이고 이 식에 ㉠을 대입하면

$m^2+(-m-2)m+2=0$

$-2m+2=0$

따라서 $m=1$

실전솔루션

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$에서

❶ a, b, c, d가 유리수일 때, 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

❷ a, b, c, d가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.

G022 연립이차방정식의 해 구하기 정답 ②

연립방정식 [정답률 87%]

$$\begin{cases}3x-y=0\\x^2+y^2=90\end{cases}$$

❶ 일차식을 이차식에 대입한다.

의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① 24 ❷ 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

Step ❶ 일차방정식을 y에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입하여 해를 구한다.

$$\begin{cases}3x-y=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=90 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서

$y=3x$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(3x)^2=90$

$10x^2=90$

$x^2=9$

따라서 $x=3$ 또는 $x=-3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=3\times3=9$,

$x=-3$을 ㉢에 대입하면 $y=3\times(-3)=-9$

따라서 주어진 연립이차방정식의 해는

$x=3$, $y=9$ 또는 $x=-3$, $y=-9$

이므로

$a=3$, $b=9$일 때 $ab=3\times9=27$

$a=-3$, $b=-9$일 때 $ab=(-3)\times(-9)=27$

따라서 $ab=27$

G023 연립이차방정식을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 ⑤

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥 모양의 용기에 [정답률 75%]
대하여

$r+2h=8$, $r^2-2h^2=8$

❶ 일차식을 이차식에 대입한다.

일 때, 이 용기의 부피는? (단, 용기의 두께는 무시한다.) [3점]

① 16π ② 20π ③ 24π ④ 28π ⑤ 32π

Step ❶ r, h에 관한 연립이차방정식을 세워서 푼다.

$$\begin{cases} r+2h=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ r^2-2h^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $r=8-2h$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(8-2h)^2-2h^2=8$

$h^2-16h+28=0$

$(h-2)(h-14)=0$

따라서 $h=2$ 또는 $h=14$

$h=2$를 ㉢에 대입하면 $r=4$이고, $h=14$를 에 대입하면 $r=-20$

$r>0$이어야 하므로 $r=4$, $h=2$

Step ❷ 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥의 부피 V는 $V=\pi r^2h$임을 이용한다.

따라서 이 용기의 부피는 $\pi\times4^2\times2=32\pi$

G024 연립이차방정식 이해하기 정답 ②

x, y에 대한 두 연립방정식 [정답률 69%]

$$\begin{cases} 3x+y=a \\ 2x+2y=1 \end{cases}, \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x-y=b \end{cases}$$

❶ 일차식을 이차식에 대입한다.

의 해가 일치할 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 두 연립방정식의 방정식 중에서 미지수를 포함하지 않은 두 식으로 새로운 연립방정식을 만들어 푼다.

두 연립방정식

$$\begin{cases} 3x+y=a \\ 2x+2y=1 \end{cases}, \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x-y=b \end{cases}$$

의 일치하는 해는 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉡에서

$y=-x+\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2=-1$

$x-\frac{1}{4}=-1$

$x=-\frac{3}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$을 ㉢에 대입하면

$y=\frac{5}{4}$

Step ❷ 구한 해를 $3x+y=a$, $x-y=b$에 대입하여 두 상수 a, b의 값을 구한다.

$3x+y=a$에 $x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 대입하면

$3\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}=a$, $a=-1$

$x-y=b$에 $x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 대입하면

$-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=b$, $b=-2$

따라서 $ab=2$

G025 연립이차방정식의 해 구하기 정답 ⑤

연립방정식 [정답률 90%]

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ x^2+y=2 \end{cases}$$

❶ 일차식을 이차식에 대입한다.

의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, $a+3b$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Step ❶ 일차식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 방정식으로 만든다.

$$\begin{cases} y=2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(2x+3)=2$

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

따라서 $x=-1$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=2\times(-1)+3$, 즉 $y=1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로 $a+3b=2$

G026 연립이차방정식의 해 구하기 정답 ④

연립방정식 [정답률 83%]

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-xy-y^2=5 \end{cases}$$

❶ 일차식을 이차식에 대입한다.

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 일차식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 방정식으로 만든다.

$x=y+2$를 $x^2-xy-y^2=5$에 대입하면

$(y+2)^2-(y+2)y-y^2=5$

$y^2-2y+1=0$
$(y-1)^2=0$
따라서 $y=1$
$y=1$을 $x=y+2$에 대입하면
$x=1+2=3$
즉 $\alpha=3$, $\beta=1$이다.
따라서 $\alpha+\beta=3+1=4$

G027 연립이차방정식의 해 이해하기 정답 ②

x, y에 대한 연립방정식 [정답률 73%]

$$\begin{cases} x+y=k \\ xy+2x-1=0 \end{cases}$$ — ❶ 일차식을 이차식에 대입한다.

이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]
❷ 이차방정식의 판별식을 이용한다.

① -5 ❷ -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

Step ❶ 일차식을 이차식에 대입하고 이차방정식의 판별식을 이용하여 미지수를 구한다.

$x+y=k$에서 $y=-x+k$이고
이 식을 $xy+2x-1=0$에 대입하면
$x(-x+k)+2x-1=0$
$-x^2+kx+2x-1=0$
$x^2-(k+2)x+1=0$이 중근을 가져야 하므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.
$D=\{-(k+2)\}^2-4$
$=k^2+4k+4-4$
$=k^2+4k=k(k+4)=0$
에서 $k=0$ 또는 $k=-4$
따라서 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은 -4이다.

G028 연립이차방정식의 해 구하기 정답 ①

연립방정식 [정답률 83%]

$$\begin{cases} x-y=3 \\ xy+x+1=0 \end{cases}$$ — ❶ 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입한다.

의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, $a+b$의 값은? [3점]

❶ -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

Step ❶ 일차방정식을 y에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입하여 해를 구한다.

$$\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+x+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서
$y=x-3$ ······ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$x(x-3)+x+1=0$
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$
따라서 $x=1$
$x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-2$
따라서 $a=1$, $b=-2$이므로
$a+b=-1$

실전솔루션

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식
⇨ 일차방정식을 한 문자에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입한다.

G029 연립이차방정식의 해 구하기 정답 ⑤

두 양수 α, β에 대하여 $x=\alpha$, $y=\beta$가 [정답률 87%]

연립이차방정식 $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 2x^2+y^2=27 \end{cases}$의 해일 때, $\alpha\times\beta$의 값은? [3점]

❶ 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ❺ 5

Step ❶ 일차방정식을 y에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입하여 해를 구한다.

$$\begin{cases} 2x-y=-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=27 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=2x+3$을 ㉡에 대입하면
$2x^2+(2x+3)^2=27$
$6x^2+12x-18=0$, $x^2+2x-3=0$
$(x+3)(x-1)=0$
$x=-3$ 또는 $x=1$
$x=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-3$
$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=5$
따라서 $x=-3$, $y=-3$ 또는 $x=1$, $y=5$
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=1$, $\beta=5$
따라서 $\alpha\times\beta=5$

G030 연립이차방정식의 해 구하기 정답 ①

연립방정식 [정답률 78%]

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2-2y=6 \end{cases}$$ — ❶ 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입한다.

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

❶ 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

Step ❶ 일차방정식을 y에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입하여 해를 구한다.

$$\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=2x-5$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=6$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $2\times2-y=5$, 즉 $y=-1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=1$

G031 판별식을 이용하여 연립이차방정식의 해 구하기 정답 7

x, y에 대한 연립방정식 [정답률 59%]

$$\begin{cases}2x-y=5\\x^2-2y=k\end{cases}$$

— ❶ 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 푼 후, 이차방정식에 대입하여 한 쌍의 해를 가질 조건을 이용한다.

가 오직 한 쌍의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가질 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점] 7

Step ❶ 일차방정식을 y에 대하여 푼 후 이차방정식에 대입하여 정리한다.

$$\begin{cases}2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $y=2x-5$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=k$

$x^2-4x+10-k=0$ ...... ㉢

Step ❷ 이차방정식이 하나의 해를 가질 조건을 이용하여 k, α, β의 값을 구한다.

㉢의 판별식을 D라 할 때, 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$

따라서 $k=6$

$k=6$을 ㉢에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $2\times2-y=5$, 즉 $y=-1$

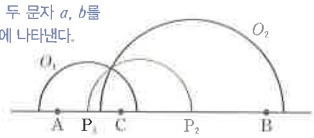
따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$, $k=6$이므로

$\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$

G032 연립이차방정식을 활용하여 도형 추론하기 정답 ②

그림과 같이 직선 위에 $\overline{AB}=6$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB 위의 점 C에 대하여 선분 AC의 중점을 P_1, 선분 CB의 중점을 P_2라 하고 $\overline{P_1C}=a$, $\overline{CP_2}=b$라 하자. 점 P_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $a+\frac{1}{2}$인 반원 O_1, 점 P_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $b+\frac{1}{2}$인 반원 O_2를 각각 그린 후, 선분 P_1P_2를 지름으로 하는 반원을 그린다. 두 반원 O_1과 O_2의 교점이 호 P_1P_2 위에 있을 때, ab의 값은? (단, $a<b$) [4점] [정답률 31%]

❶ 선분의 길이를 두 문자 a, b를 사용하여 그림에 나타낸다.



① $\frac{5}{4}$ ❷ $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{13}{4}$

Step ❶ $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$ 임을 이용하여 a, b의 관계식을 세운다.

$\overline{P_1C}=a$이고 점 P_1은 선분 AC의 중점이므로 $\overline{AC}=2a$

$\overline{CP_2}=b$이고 점 P_2는 선분 CB의 중점이므로 $\overline{CB}=2b$

$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$이므로

$6=2a+2b$

$a+b=3$ ...... ㉠

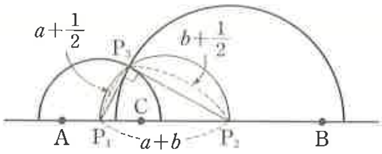
Step ❷ 삼각형 $P_1P_2P_3$이 직각삼각형임을 이용한다.

두 반원 O_1과 O_2의 교점을 P_3이라 하자.

반원 O_1의 반지름의 길이가 $a+\frac{1}{2}$이므로 $\overline{P_1P_3}=a+\frac{1}{2}$

반원 O_2의 반지름의 길이가 $b+\frac{1}{2}$이므로 $\overline{P_2P_3}=b+\frac{1}{2}$

$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1C}+\overline{CP_2}=a+b$



그림과 같이 반원에 대한 원주각은 $90°$이므로 삼각형 $P_1P_2P_3$은 직각삼각형이다.

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1P_3}^2+\overline{P_2P_3}^2$

$(a+b)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$

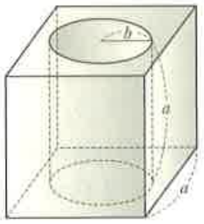
$a^2+2ab+b^2=a^2+a+\frac{1}{4}+b^2+b+\frac{1}{4}$

$2ab=a+b+\frac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $ab=\frac{7}{4}$

G033 연립이차방정식을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 60

한 모서리의 길이가 a인 정육면체 모양의 입체도형이 있다. 이 [정답률 48%]
❶ (겉넓이)$=6a^2$
입체도형에서 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 b이고 높이가 a인 원기둥
❷ (겉넓이)$=2b^2+2b\pi\times a$
모양의 구멍을 뚫었다. 남아 있는 입체도형의 겉넓이가 $216+16\pi$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $15(a-b)$의 값을 구하시오. (단, $a>2b$) [4점] 60



Step ❶ 남아있는 입체도형의 겉넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

남아 있는 입체도형의 겉넓이를 S라 하면

$S=$(정육면체의 겉넓이)$-$(원기둥의 두 밑면의 넓이)

$+$(원기둥의 옆면의 넓이)

$=6a^2-2\pi b^2+2\pi ab$

$=6a^2+2\pi(ab-b^2)$

$=216+16\pi$

Step ❷ $a+b\pi=c+d\pi$이면 $a=c$, $b=d$임을 이용하여 연립이차방정식을 세워서 푼다.

이때 a, b가 유리수이므로

$$\begin{cases} 6a^2=216 & \cdots\cdots ㉠ \\ ab-b^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $a=6$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$6b-b^2=8$, 즉 $b^2-6b+8=0$

$(b-2)(b-4)=0$

$b=2$ 또는 $b=4$

$b=2$를 ㉡에 대입하면 $2a-2^2=8$, $a=6$

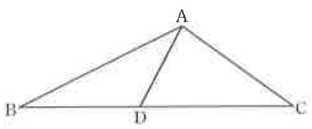
$b=4$를 ㉡에 대입하면 $4a-4^2=8$, $a=6$

$a>2b$이므로 $a=6$, $b=2$

따라서 $15(a-b)=15\times(6-2)=60$

G034 연립방정식을 이용하여 도형 문제해결하기 정답 39

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 [정답률 35%]
$\overline{AD}=6$, $\overline{BD}=8$이고, $\angle BAD=\angle BCA$이다. $\overline{AC}=\overline{CD}-1$일 때, 삼각형
❶ 삼각형 ABC, DBA가 닮은 삼각형임을 이용한다.
ABC의 둘레의 길이를 구하시오. [4점] 39



Step ❶ 삼각형의 닮음을 이용하여 각 변의 길이의 비를 구한다.

두 삼각형 ABC, DBA에서

$\angle BAD=\angle BCA$, $\angle B$는 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$

$\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=x-1$, $\overline{AB}=y$라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{DA}$이므로 $y:(x-1)=8:6$

$x=\frac{3}{4}y+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{BA}$이므로 $y:(8+x)=8:y$

$y^2=8x+64$ $\cdots\cdots$ ㉡

Step ❷ 연립방정식을 이용하여 변의 길이를 구한다.

㉠을 ㉡에 대입하면 $y^2=8\times\left(\frac{3}{4}y+1\right)+64$

$y^2-6y-72=0$, $(y-12)(y+6)=0$

$y=12$ $(y>0)$

$y=12$를 ㉠에 대입하면 $x=\frac{3}{4}\times12+1=10$

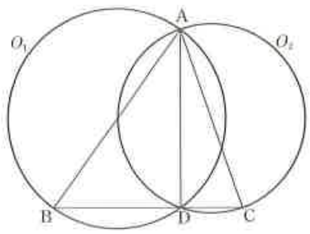
$\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8+10=18$, $\overline{CA}=9$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$12+18+9=39$

G035 연립방정식을 이용하여 도형 문제해결하기 정답 394

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB와 변 AC를 각각 [정답률 10%]
지름으로 하는 두 원 O_1, O_2가 두 점 A, D에서 만난다.



$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수일 때, 두 원 O_1, O_2
❶ 연속된 네 개의 짝수를 $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$으로 놓고 피타고라스 정리를 이용한다.
의 넓이의 합은 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점] 394

Step ❶ 연속된 네 개의 짝수를 $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$으로 놓고 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$를 n으로 나타낸다.

$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$는 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로

$\overline{AD}=2n$, $\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$(n은 자연수)

으로 놓자.

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$로 놓으면

$x+y=2n+4$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 삼각형 ABD와 ACD는 직각삼각형이므로

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$

즉 $\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$이므로

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$

$(2n+6)^2-(2n+2)^2=x^2-y^2$

$8(2n+4)=(x+y)(x-y)$

$8(2n+4)=(2n+4)(x-y)$

$x-y=8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x=2n+12$, 즉 $x=n+6$

㉠−㉡을 하면 $2y=2n-4$, 즉 $y=n-2$

따라서 $\overline{BD}=n+6$, $\overline{CD}=n-2$

Step ❷ 직각삼각형 ACD에서 피타고라스 정리를 이용하여 n의 값을 구한다.

한편 직각삼각형 ACD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$이므로

$(2n+2)^2=(2n)^2+(n-2)^2$

$n^2-12n=0$, $n(n-12)=0$

n은 자연수이므로 $n=12$

따라서

$\overline{AB}=2n+6=2\times12+6=30$

$\overline{AC}=2n+2=2\times12+2=26$

따라서 원 O_1의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times30=15$

원 O_2의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times26=13$

이므로 두 원 O_1, O_2의 넓이의 합 S는

$S=15^2\pi+13^2\pi=394\pi$

따라서 $\frac{S}{\pi}=394$

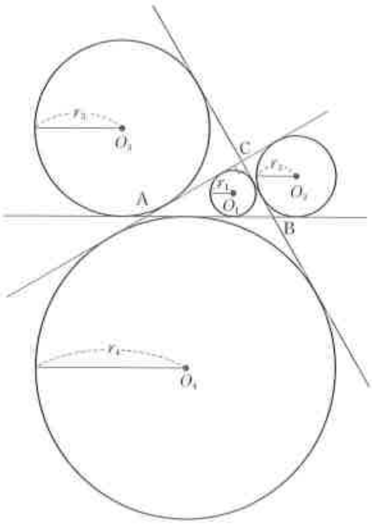
G036 원의 성질과 여러 가지 방정식 문제해결하기 정답 14

그림과 같이 직각삼각형 ABC가 있다. 세 직선 AB, BC, CA에 동시에 접하는 네 원 O_1, O_2, O_3, O_4의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3, r_4라 하자. 직각삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{15}{2}$이고 $r_1=1$일 때, $r_2+r_3+r_4$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 15%]

❶ 삼각형의 내접원의 반지름과 세 변의 길이로 넓이를 구한다.

❷ 원에 접하는 직선의 성질을 이용하여 반지름의 길이를 구한다.

14



Step ❶ 삼각형의 변의 길이와 내접원의 반지름의 길이로 삼각형의 넓이를 구한다.

직각삼각형 ABC의 넓이를 S, 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 c, a, b라 하자.

$S=\triangle ABO_1+\triangle BCO_1+\triangle CAO_1$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r_1+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r_1+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r_1$

$=\frac{1}{2}\times c\times r_1+\frac{1}{2}\times a\times r_1+\frac{1}{2}\times b\times r_1$

$=\frac{1}{2}r_1(a+b+c)$

이고, $S=\frac{15}{2}$, $r_1=1$이므로

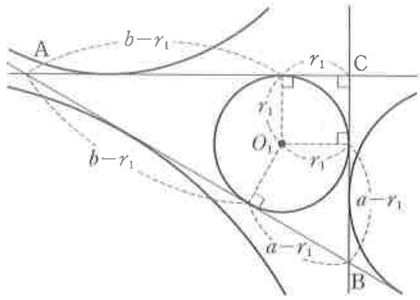
$\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\times1\times(a+b+c)$

따라서 $a+b+c=15$

Step ❷ 원의 성질을 이용하여 각 원의 반지름의 길이를 구한다.

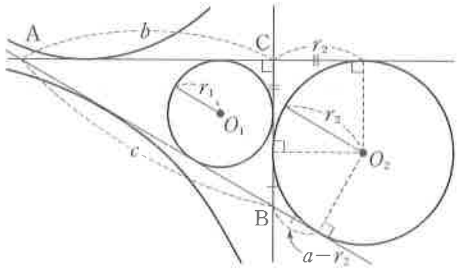
한편 세 꼭짓점 A, B, C에서 원 O_1에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로

$c=(a-r_1)+(b-r_1)$, $r_1=\frac{a+b-c}{2}$



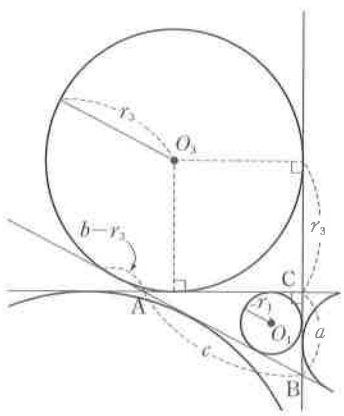
점 A에서 원 O_2에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로

$b+r_2=c+(a-r_2)$, $r_2=\frac{a-b+c}{2}$



점 B에서 원 O_3에 그은 두 접선의 접점까지의 길이가 같으므로

$a+r_3=c+(b-r_3)$, $r_3=\frac{-a+b+c}{2}$



점 A에서 원 O_4에 그은 접선의 길이와 점 B에서 원 O_4에 그은 접선의 길이의 합은 $\overline{AB}$의 길이와 같으므로

$(r_4-a)+(r_4-b)=c$, $r_4=\frac{a+b+c}{2}$

$r_1+r_2+r_3+r_4=a+b+c=15$

따라서 $r_2+r_3+r_4=14$

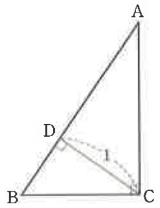
해검단 TALK

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면
삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$로 구할 수 있어.

G037 연립방정식을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 ③

$\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 점 D는 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발이고 $\overline{CD}=1$이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 5일 때, 선분 AB의 길이는? [4점] [정답률 55%]

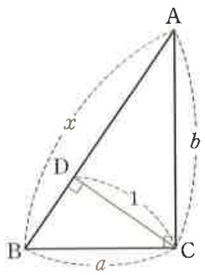
① $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$로 놓고 연립방정식을 세워 x의 값을 구한다.



① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{23}{12}$ ③ $\frac{25}{12}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{29}{12}$

Step ① $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$로 놓고, 삼각형 ABC의 넓이와 둘레의 길이를 이용하여 x, a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

그림과 같이 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.



삼각형 ABC의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$이므로

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}x$

$ab=x$ …… ㉠

삼각형 ABC의 세 변의 길이의 합은 5이므로

$a+b+x=5$

$a+b=5-x$ …… ㉡

Step ② 피타고라스 정리를 이용하여 x의 값을 구한다.

한편 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$a^2+b^2=x^2$

$x^2=(a+b)^2-2ab$ …… ㉢

㉢에 ㉠과 ㉡을 대입하면

$x^2=(5-x)^2-2x$

$x^2=5^2-10x+x^2-2x$

$25-12x=0$

$x=\frac{25}{12}$

따라서 선분 AB의 길이는 $\frac{25}{12}$이다.

G038 연립이차방정식의 해 구하기 정답 25

연립방정식

$$\begin{cases} x^2-y^2=6 \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 \end{cases}$$

을 만족시키는 양수 x, y에 대하여 $20xy$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 61%]

① ㉡에서 $x+y=t$로 치환하여 방정식을 푼 후, $x+y$의 값을 ㉠에 대입하여 x, y의 값을 구한다.

25

Step ① $x+y=t$로 치환하여 방정식을 푼다.

$$\begin{cases} x^2-y^2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x+y=t$라 하면 $t^2-2t-3=0$이므로

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3$ 또는 $t=-1$

즉 $x+y=3$ 또는 $x+y=-1$

이때 x, y는 양수이므로

$x+y=3$ …… ㉢

Step ② ㉠, ㉢을 연립하여 x, y의 값을 구한다.

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=6$

㉢에 의하여 $3(x-y)=6$

$x-y=2$ …… ㉣

㉢+㉣을 하면 $2x=5$, $x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$

따라서 $20xy=25$

다른 풀이

$$\begin{cases} x^2-y^2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

$x+y=\alpha$, $xy=\beta$라 하면 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로

$(x-y)^2=\alpha^2-4\beta$ …… ㉢

㉡에서 $\alpha^2-2\alpha-3=0$, $(\alpha-3)(\alpha+1)=0$이므로

$\alpha=3$ 또는 $\alpha=-1$

이때 x, y는 양수이므로 $\alpha=3$, 즉 $x+y=3$

㉢에 $\alpha=3$을 대입하면 $(x-y)^2=9-4\beta$ …… ㉣

또한 ㉠의 양변을 제곱하면 $(x^2-y^2)^2=6^2$

$(x+y)^2(x-y)^2=6^2$ …… ㉤

㉤에 $x+y=3$과 ㉣을 대입하면

$3^2(9-4\beta)=6^2$이므로 $9-4\beta=4$, 즉 $\beta=\frac{5}{4}$

따라서 $20xy=20\beta=25$

G039 사차방정식의 근 이해하기 정답 ①

방정식 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$의 [정답률 52%]
❶ 식을 변형하여 인수분해한다.
한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2-5\omega$의 값은? [4점]
❷ 허근 ω를 찾는다.

❶ -16 ② -14 ③ -12 ④ -10 ⑤ -8

Step ❶ 주어진 사차방정식의 좌변을 인수분해하여 공통부분이 생기도록 일차식을 짝지어 전개한다.

$(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

Step ❷ 치환을 이용하여 인수분해한다.

$x^2-5x=t$라 하면

$(t+4)(t+6)-120=0$

$t^2+10t-96=0$

$(t-6)(t+16)=0$

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$

$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$

Step ❸ 허근 ω를 찾아 주어진 식의 값을 구한다.

$x^2-5x+16=0$이 허근 ω를 가지므로 $\omega^2-5\omega+16=0$

$\rightarrow D=(-5)^2-4\times1\times16<0$

따라서 $\omega^2-5\omega=-16$

G040 부정방정식 이해하기 정답 ①

x에 대한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$의 두 근이 [정답률 68%]
❶ 두 근이 정수이므로 두 근의 합과 곱이 모두 정수이어야 한다.
정수가 되도록 하는 모든 정수 m의 값의 합은? [4점]

❶ 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step ❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 두 정수근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m-1$ …… ㉠

$\alpha\beta=2m-1$ …… ㉡

Step ❷ 두 식을 연립하여 α, β에 대한 부정방정식을 얻는다.

㉠에서 $m=-\alpha-\beta-1$을 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=2(-\alpha-\beta-1)-1$

$(\alpha+2)(\beta+2)=1$

α, β는 정수이므로

$\alpha+2=1$, $\beta+2=1$ 또는 $\alpha+2=-1$, $\beta+2=-1$

$\alpha=\beta=-1$일 때, $m=1$

$\alpha=\beta=-3$일 때, $m=5$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은 6이다.

다른 풀이

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 두 근은

$x=\dfrac{-(m+1)\pm\sqrt{D}}{2}$

$D=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2-6m+5$

두 근이 정수가 되기 위해서는 D가 제곱수이거나 $D=0$이어야 한다.

그런데 D가 제곱수가 아니므로 $D=0$이어야 한다.

$m^2-6m+5=0$

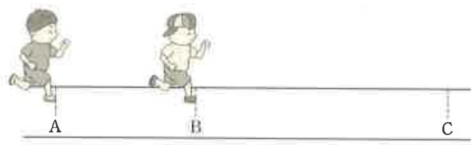
$(m-1)(m-5)=0$

$m=1$ 또는 $m=5$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은 $1+5=6$

G041 연립방정식을 이용하여 실생활 문제해결하기 정답 24

그림과 같이 직선 도로 위에 세 지점 A, B, C가 있고 갑은 A, [정답률 16%]
을은 B에 있다.



갑이 A에서 출발하여 B를 거쳐 C를 향하여 움직인다. 갑이 B에 도착하였을 때, 을이 B를 출발하여 갑과 을이 동시에 C에 도착하였다. 갑과 을이 같은 속도로 움직였을 때, 다음은 갑과 을의 이동거리에 관한 설명이다.

(i) 갑이 A에서 출발한 후 a만큼 이동하였을 때, 을이 이동한 거리는 A에서 C까지 거리의 $\frac{1}{2}$이다.
(ii) 을이 B에서 출발한 후 a만큼 이동하였을 때, 갑이 A에서 출발하여 이동한 거리는 B에서 C까지 거리와 같다.

❶ A와 B 사이의 거리를 x, B와 C 사이의 거리를 y라 하고 식을 세운다.

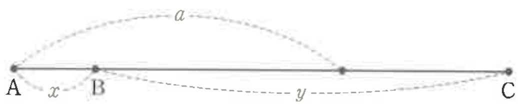
갑과 을이 이동한 거리의 총합이 66일 때, a의 값을 구하시오. (단, A에서 B
❷ 갑과 을이 이동한 거리의 총합을 x, y로 나타내고 a의 값을 구한다.
까지의 거리는 a보다 작고, 직선 도로의 폭은 무시한다.) [4점] 24

Step ❶ A, B 사이의 거리를 x, B, C 사이의 거리를 y로 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.

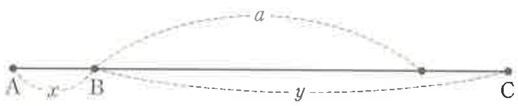
A와 B 사이의 거리를 x, B와 C 사이의 거리를 y라 하자.

(i) 갑이 a만큼 이동하였을 때, 을이 이동한 거리는 $a-x$이므로

$a-x=\frac{1}{2}(x+y)$



(ii) 을이 이동한 거리가 a일 때, 갑이 A에서 출발하여 이동한 거리는 $x+a$이므로 $x+a=y$



(i), (ii)에 의하여 $y=x+x+\frac{1}{2}(x+y)$이므로 $y=5x$

Step ❷ 갑과 을이 이동한 거리의 총합이 66임을 이용하여 a의 값을 구한다.

이때 갑과 을이 이동한 거리의 총합은

$x+y+y=x+2y=66$이므로 $x=6$, $y=30$

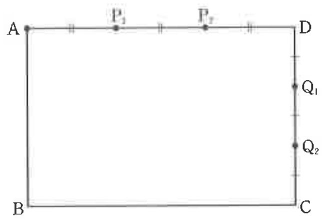
따라서 $a=y-x=30-6=24$

G042 연립이차방정식을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 ②

그림과 같이 $\overline{AD}:\overline{DC}=3:2$인 직사각형 ABCD가 있다. [정답률 76%]

❶ $\overline{AD}=x$, $\overline{DC}=y$로 놓고 비례식을 x, y로 나타낸다.

변 AD를 삼등분한 점들 중 A에 가까운 점을 P_1, D에 가까운 점을 P_2라 하고, 변 DC를 삼등분한 점들 중 D에 가까운 점을 Q_1, C에 가까운 점을 Q_2라 하자.



세 삼각형 AQ_1D, P_1Q_2D, P_2CD의 넓이의 합이 10일 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는? [4점]

❷ 세 삼각형의 넓이의 합이 10임을 x, y를 사용하여 식으로 나타낸다.

① $10\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ 20 ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{6}$

Step ❶ $\overline{AD}=x$, $\overline{DC}=y$로 놓고 식을 세운다.

$\overline{AD}=x$, $\overline{DC}=y$라 하면 $x:y=3:2$이므로

$2x=3y$ …… ㉠

Step ❷ 세 삼각형의 넓이의 합이 10임을 식으로 나타낸다.

$\triangle AQ_1D+\triangle P_1Q_2D+\triangle P_2CD$

$=\frac{xy}{6}+\frac{2xy}{9}+\frac{xy}{6}=\frac{5xy}{9}$

세 삼각형의 넓이의 합이 10이므로

$\frac{5xy}{9}=10$

$xy=18$ …… ㉡

㉠에서 $y=\frac{2}{3}x$

$y=\frac{2}{3}x$를 ㉡에 대입하면

$x\times\left(\frac{2}{3}x\right)=18$

$\frac{2}{3}x^2=18$

$x^2=27$

$x>0$이므로 $x=3\sqrt{3}$

$y=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

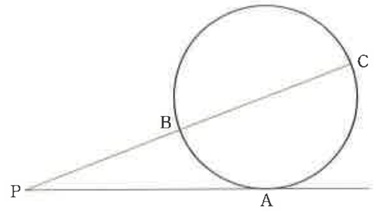
즉 $\overline{AD}=3\sqrt{3}$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$2(\overline{AD}+\overline{DC})=10\sqrt{3}$

G043 고차방정식을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 5

그림과 같이 원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 점 P를 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 B, C라 하자. [정답률 32%]



$\overline{PB}=x^2-x+4$, $\overline{BC}=2x$, $\overline{PA}=2\sqrt{6x}$가 되도록 하는 모든 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

❶ 원의 접선과 할선에 대한 성질을 이용하여 x에 대한 식을 세워 x의 값을 구한다.

5

Step ❶ 원의 접선과 할선 사이의 비례 관계를 이용하여 식을 세운다.

$\overline{PC}=\overline{PB}+\overline{BC}$

$=(x^2-x+4)+2x$

$=x^2+x+4$

이때 $\overline{PA}^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$이므로

$(2\sqrt{6x})^2=(x^2-x+4)(x^2+x+4)$

$24x^2=(x^2+4-x)(x^2+4+x)$

$24x^2=(x^2+4)^2-x^2$

$x^4-17x^2+16=0$

Step ❷ 치환을 이용하여 사차방정식의 해를 구하고 모든 x의 값의 합을 구한다.

$x^2=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-17t+16=0$

$(t-1)(t-16)=0$

$t=1$ 또는 $t=16$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=16$

$x>0$이므로 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 x의 값의 합은 5이다.

G044 부정방정식을 이용하여 문제해결하기 정답 20

x^2-8x+1이 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [4점] [정답률 35%]

❶ 어떤 자연수를 n으로 놓고 식을 세운다.

20

Step ❶ 어떤 자연수를 n으로 놓고 식을 세운 후, x의 값을 구한다.

어떤 자연수를 n이라 하면

$x^2-8x+1=n^2$

$x^2-8x+16-15=n^2$

$(x-4)^2-n^2=15$

$(x-4+n)(x-4-n)=15$

$\begin{cases}x-4+n=15\\x-4-n=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x-4+n=5\\x-4-n=3\end{cases}$

└ n이 자연수이므로 $x-4+n>x-4-n$

$x=12$, $n=7$ 또는 $x=8$, $n=1$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 20이다.

G045 고차식의 인수분해 및 근과 계수의 관계를 이해하기 정답 16

사차방정식 $x^4-x^3+ax+b=0$의 두 근이 1, -2일 때, 나머 [정답률 49%]
❶ 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해한다.
지 두 근 α, β에 대하여 $|\alpha^4+\beta^4|$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)
[4점] 16

Step ❶ 조립제법을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

사차방정식 $x^4-x^3+ax+b=0$의 두 근이 1, -2이므로 조립제법을 이용하면

1	1	-1	0	a	b
		1	0	0	a
-2	1	0	0	a	$a+b=0$
		-2	4	-8	
	1	-2	4	$a-8=0$	

따라서 $a=8$, $b=-8$이고

$x^4-x^3+8x-8=(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$

Step ❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

$x^2-2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$\alpha^4+\beta^4=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2=-16$

따라서 $|\alpha^4+\beta^4|=16$

다른 풀이

$x^2-2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-2\alpha+4=0$이고, $\beta^2-2\beta+4=0$

즉 $\alpha^2=2\alpha-4$이고, $\beta^2=2\beta-4$이다.

따라서

$\alpha^3=2\alpha^2-4\alpha=2(2\alpha-4)-4\alpha=-8$이고,

$\beta^3=2\beta^2-4\beta=2(2\beta-4)-4\beta=-8$이므로

$\alpha^4+\beta^4=-8(\alpha+\beta)=-8\times2=-16$

따라서 $|\alpha^4+\beta^4|=16$

G046 방정식 $x^3-1=0$의 허근의 성질을 이용하여 추론하기 정답 ⑤

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉 [정답률 45%]
에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\omega^{10}=\omega$

ㄴ. $\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=-2$ (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

ㄷ. $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$을 만족시키는 30 이하의 양의 정수 n의 개수는 20이다.

❶ $\omega^3=1$의 성질을 이용하여 〈보기〉의 참, 거짓을 판별한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 허근 ω의 성질을 이용하여 〈보기〉의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $x^3-1=0$에서 $\omega^3=1$이므로

$\omega^{10}=(\omega^3)^3\omega=\omega$ (참)

ㄴ. $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이므로

$\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=(-1)+(-1)=-2$ (참)

ㄷ. $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=(\omega^3\omega)^n+(-\omega^2)^{4n}+1$

$=(\omega^3\omega)^n+(\omega^4)^{2n}+1$

$=(\omega^3\omega)^n+\underbrace{(\omega^3)^{2n}}_{(\omega^3)^{2n}=(1)^{2n}=1}\omega^{2n}+1$

$=\omega^n+\omega^{2n}+1$

$=\omega^{2n}+\omega^n+1$

(i) $n=3k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때

$\omega^{2n}=1$, $\omega^n=1$이므로 $\omega^{2n}+\omega^n+1=3$

(ii) $n=3k+1$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)일 때

$\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1=\omega^2+\omega+1=0$

(iii) $n=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)일 때

$\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1=\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

그러므로 $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$을 만족시키는 30 이하의 양의 정수 n의 개수는

$30-(\underbrace{30\text{ 이하의 3의 배수}}_{\text{(i) } n=3k(k=1,\,2,\,3,\,\cdots)}\text{의 개수})=30-10=20$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

해검단 TALK

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로
$x^2+x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$야!

H 여러 가지 부등식

문제편 pp.110~123

필수 기출

001 ①	002 ①	003 ④	004 ①	005 ③	006 ②
007 11	008 ③	009 ②	010 ④	011 21	012 ④
013 ①	014 11	015 ①	016 56	017 ③	018 ①
019 ③	020 ⑤	021 12	022 ②	023 ③	024 18
025 ①	026 ④	027 2	028 ⑤	029 ④	030 29
031 27	032 8	033 ②	034 ⑤	035 ②	036 ④
037 ③	038 7	039 ⑤	040 ⑤	041 3	042 34
043 ③	044 28	045 ③	046 9	047 ①	048 ②
049 ④	050 ③				

플러스 기출

051 ③	052 ③	053 18	054 ⑤	055 4	056 71
057 ④					

H001 절댓값을 포함한 부등식의 해 구하기 정답 ①

부등식 $|3x-2|\le x+6$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값 [정답률 83%]
❶ $3x-2=0$, $x=\frac{2}{3}$에서 $x\ge\frac{2}{3}$ 또는 $x<\frac{2}{3}$인 경우로 나누어 생각한다.
은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

Step ❶ 절댓값 기호안의 식을 0으로 하는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 푼다.

부등식 $|3x-2|\le x+6$에서

(i) $3x-2\ge0$, 즉 $x\ge\frac{2}{3}$일 때

$3x-2\le x+6$

$2x\le8$, $x\le4$

따라서 $\frac{2}{3}\le x\le4$

(ii) $3x-2<0$, 즉 $x<\frac{2}{3}$일 때

$-(3x-2)\le x+6$

$-4\le4x$, $-1\le x$

따라서 $-1\le x<\frac{2}{3}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=(-1)+4=3$

H002 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기 정답 ①

x에 대한 부등식 $|x-a|<2$를 만족시키는 모든 정수 x의 값 [정답률 79%]
❶ 양수 l에 대하여 $|x|<l$이면 $-l<x<l$임을 이용한다.
의 합이 33일 때, 자연수 a의 값은? [3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

Step ❶ 절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

$|x-a|<2$에서

$-2<x-a<2$

$-2+a<x<2+a$

a가 자연수이므로 부등식을 만족하는 정수 x는

$-1+a$, a, $1+a$

이다. 모든 정수 x의 값의 합이 33이므로

$(-1+a)+a+(1+a)=33$

$3a=33$

따라서 $a=11$

H003 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기 정답 ④

두 상수 a, b에 대하여 부등식 $|x+a|\le8$의 해가 $b\le x\le2$ [정답률 89%]
❶ 양수 l에 대하여 $|x|\le l$이면 $-l\le x\le l$임을 이용한다.
일 때, $a-b$의 값은? [3점]

① 17　② 18　③ 19　④ 20　⑤ 21

Step ❶ 절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

$|x+a|\le8$에서

$-8\le x+a\le8$

$-8-a\le x\le8-a$

이때 주어진 부등식의 해가 $b\le x\le2$이므로

$a=6$, $b=-14$

따라서 $a-b=20$

H004 절댓값을 포함한 부등식의 해 구하기 정답 ①

x에 대한 부등식 $|x-2|<a$를 만족시키는 모든 정수 x의 개 [정답률 76%]
❶ 양수 l에 대하여 $|x|<l$이면 $-l<x<l$임을 이용한다.
수가 19일 때, 자연수 a의 값은? [3점]

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

Step ❶ 절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

부등식 $|x-2|<a$의 해가 존재하므로 $a>0$

$|x-2|<a$에서

$-a<x-2<a$

$2-a<x<2+a$ → $n<x<m$인 정수 x의 개수는 $(m-n-1)$개이다.

이 범위에 속하는 모든 정수 x의 개수는

$2+a-(2-a)-1=2a-1=19$

따라서 $a=10$

실전 솔루션

a, $b(a<b)$가 정수일 때

① $a\le x\le b$인 정수 x의 개수는 $(b-a+1)$개

② $a<x\le b$(또는 $a\le x<b$)인 정수 x의 개수는 ①의 개수에서 1을 빼서 $(b-a)$개

③ $a<x<b$인 정수 x의 개수는 ②의 개수에서 1을 빼서 $(b-a-1)$개

H005 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기 정답 ③

x에 대한 부등식 $|x-a|<5$를 만족시키는 정수 x의 최댓값 [정답률 86%]
❶ $|x-a|<5$이면 $-5<x-a<5$임을 이용한다.
이 12일 때, 정수 a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

Step ❶ 절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

부등식 $|x-a|<5$를 풀면

$-5<x-a<5$

$a-5<x<a+5$

이므로 정수 x의 최댓값이 12가 되려면

$12<a+5\le 13$, 즉 $7<a\le 8$이어야 한다.

따라서 정수 a의 값은 8이다.

H006 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기 정답 ②

부등식 $|x-a|<3$의 해가 $4<x<10$일 때, 상수 a의 값은? [정답률 94%]
❶ $|x-a|<3$이면 $-3<x-a<3$임을 이용한다.
[3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step ❶ 절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

부등식 $|x-a|<3$을 풀면

$-3<x-a<3$

$a-3<x<a+3$

이 부등식의 해가 $4<x<10$이므로 $a-3=4$, $a+3=10$

따라서 $a=7$

H007 절댓값을 포함한 부등식의 해 구하기 정답 11

부등식 $|x-1|\le 5$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. [정답률 82%]
❶ 양수 a에 대하여 $|x|\le a$이면 $-a\le x\le a$임을 이용한다.
[3점] 11

Step ❶ 절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

부등식 $|x-1|\le 5$를 풀면

$-5\le x-1\le 5$

$-4\le x\le 6$

따라서 정수 x의 개수는 $6-(-4)+1=11$이다.

H008 절댓값을 포함한 부등식의 해 구하기 정답 ③

부등식 $2|x-2|\le 5$를 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점] [정답률 85%]
❶ $|x-2|\le\frac{5}{2}$로 바꾸어 부등식을 푼다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Step ❶ $|x|\le a$의 꼴로 변형하여 정수 x의 개수를 구한다.

부등식 $2|x-2|\le 5$를 풀면

$|x-2|\le\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}\le x-2\le\frac{5}{2}$

$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{9}{2}$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

H009 절댓값을 포함하고 있는 식의 값 구하기 정답 ②

$\sqrt{3}<a<\sqrt{6}$일 때, $|a^2-2|+|a^2-7|$을 간단히 하면? [3점] [정답률 87%]
❶ $x\ge 0$이면 $|x|=x$, $x<0$이면 $|x|=-x$임을 이용한다.

① 3 ② 5 ③ 9 ④ $-2a^2+9$ ⑤ $2a^2-9$

Step ❶ 제곱근과 절댓값의 성질을 이용한다.

$\sqrt{3}<a<\sqrt{6}$에서 $3<a^2<6$

$1<a^2-2<4$이고 $-4<a^2-7<-1$

즉 $a^2-2>0$, $a^2-7<0$이므로

$|a^2-2|+|a^2-7|=(a^2-2)-(a^2-7)=5$

H010 삼차방정식의 근의 성질 이해하기 정답 ④

x에 대한 삼차방정식 $x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=0$이 1보다 [정답률 50%]
❶ 인수분해하여 근의 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.
작은 한 근과 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

Step ❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 근의 위치를 따져 본다.

$x^3-5x^2+(k-9)x+k-3$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & k-9 & k-3 \\ & & -1 & 6 & -k+3 \\ \hline & 1 & -6 & k-3 & 0 \end{array}$$

$x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=(x+1)(x^2-6x+k-3)$

$x=-1$은 주어진 삼차방정식의 근이므로 이차방정식

$x^2-6x+k-3=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

Step ❷ $x^2-6x+k-3=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=x^2-6x+k-3$이라 하면 $f(x)=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

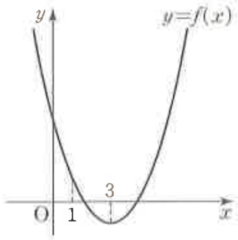
$\frac{D}{4}=9-k+3>0$

$k<12$ …… ㉠

또 $f(1)=1-6+k-3>0$에서

$k>8$ …… ㉡

한편 이차함수 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=3$이므로 $3>1$은 k의 값에 관계없이 항상 성립한다.



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 k의 값의 범위는 $8<k<12$이므로 정수 k는 9, 10, 11이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은 30이다.

실전솔루션

이차방정식의 근의 위치

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

❶ 두 근이 모두 p보다 작다.

⇨ $D\ge0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

❷ 두 근이 모두 p보다 크다.

⇨ $D\ge0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

❸ 두 근이 p, q 사이에 있다.

⇨ $D\ge0$, $f(p)>0$, $f(q)>0$, $p<-\frac{b}{2a}<q$

❹ 두 근 사이에 p가 있다.

⇨ $f(p)<0$

H011 사차방정식의 근의 성질 이해하기 정답 21

x에 대한 사차방정식 $x^4-9x^2+k-10=0$의 모든 근이 실수 [정답률 12%]

❶ $x^2=t$로 치환한 이차방정식이 양의 실근을 가짐을 이용한다.

가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점] 21

Step ❶ 주어진 사차방정식에서 $x^2=t$ $(t\ge0)$로 치환한다. (실수)$^2\ge0$

$x^2=t$ $(t\ge0)$라 하면 주어진 사차방정식은

$t^2-9t+k-10=0$이므로 t에 대한 이차방정식이다.

Step ❷ 이차방정식의 두 실근이 0 이상일 조건을 이용하여 자연수 k의 개수를 구한다.

방정식 $t^2-9t+k-10=0$의 두 실근이 0 이상이어야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D\ge0$, (두 근의 합)≥0, (두 근의 곱)≥0

이어야 한다.

(i) $D=9^2-4(k-10)\ge0$이므로

$k\le\frac{121}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=9>0$이므로 k의 값에 관계없이 성립한다.

(iii) (두 근의 곱)$=k-10\ge0$이므로

$k\ge10$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $10\le k\le\frac{121}{4}$이므로 모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k는 10, 11, …, 30의 21개이다.

해검단 TALK

사차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면 $x^2=t$로 치환한 이차방정식 $at^2+bt+c=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지면 돼!

실전솔루션

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

❶ 두 근이 모두 양 ⇨ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

❷ 두 근이 모두 음 ⇨ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

❸ 두 근이 서로 다른 부호 ⇨ $\alpha\beta<0$

H012 이차부등식의 해 구하기 정답 ④

이차부등식 $x^2-6x+5\le0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 [정답률 85%]

❶ 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)\le0$ $(\alpha<\beta)$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$임을 이용한다.

값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 이차부등식의 해를 구한다.

$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)\le0$

이므로 부등식의 해는

$1\le x\le5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$이므로

$\beta-\alpha=5-1=4$

H013 이차부등식의 해 구하기 정답 ①

이차부등식 $x^2-7x+12\ge0$의 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$일 때, [정답률 85%]

❶ 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)\ge0$ $(\alpha<\beta)$의 해는 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$임을 이용한다.

$\beta-\alpha$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

Step ❶ 이차부등식의 해를 구한다.

이차부등식 $x^2-7x+12\ge0$에서

$(x-3)(x-4)\ge0$이므로 부등식의 해는

$x\le3$ 또는 $x\ge4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로

$\beta-\alpha=1$

H014 이차방정식의 판별식을 이해하고 이차부등식의 해 구하기 정답 11

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+9=0$이 허근을 갖도록 하는 [정답률 65%]

❶ 이차방정식이 허근을 가지면 $D<0$임을 이용한다.

정수 a의 개수를 구하시오. [3점] 11

Step ❶ 이차방정식이 허근을 가질 조건을 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+9=0$의 판별식을 D라 할 때, 허근을 가지려면 $D=a^2-36<0$이어야 한다.

즉 $(a+6)(a-6)<0$에서 $-6<a<6$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 $6-(-6)-1=11$이다.

H015 해가 주어진 이차부등식의 미지수 구하기 정답 ①

이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-1<x<5$가 되도록 하 [정답률 87%]

❶ 해를 이용하여 이차부등식을 구한다.

는 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

❶ 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

Step ❶ 해가 $-1<x<5$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식을 구한다.

해가 $-1<x<5$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)<0$

$x^2-4x-5<0$

이므로 $a=-4$, $b=-5$이다.

따라서 $ab=20$

해검단 TALK

이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-1<x<5$이면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=5$야!

따라서 다음과 같이 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용해서 a, b의 값을 구할 수도 있어.

$a=-\{(-1)+5\}=-4$, $b=(-1)\times5=-5$

H016 이차부등식의 해를 이용하여 이차함수의 함숫값 구하기 정답 56

이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=8$이고 부등식 $f(x)\le0$의 [정답률 69%]

해가 $-3\le x\le0$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [3점] 56

❶ $f(x)$의 이차항의 계수를 a로 놓고 식을 세운 후 $f(1)=8$을 이용한다.

Step ❶ 부등식의 해를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

부등식 $f(x)\le0$의 해가 $-3\le x\le0$이므로

이차함수 $f(x)$는

$f(x)=ax(x+3)$ $(a>0)$

으로 놓을 수 있다.

Step ❷ $f(1)=8$임을 이용하여 $f(4)$의 값을 구한다.

이때 $f(1)=8$이므로

$f(1)=a(1+3)=8$

에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2x(x+3)$이므로

$f(4)=8\times7=56$

H017 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기 정답 ③

이차함수 $f(x)=x^2-x-12$에 대하여 $f(x-1)<0$을 만족 [정답률 82%]

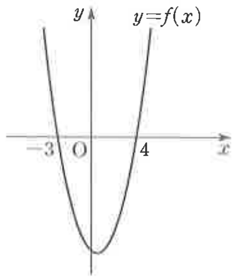
❶ $f(x)<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이면 $f(x-1)<0$의 해는 $\alpha+1<x<\beta+1$임을 이용한다.

시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 7 ② 8 ❸ 9 ④ 10 ⑤ 11

Step ❶ $f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

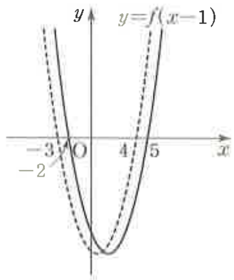
$x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로 이차함수 $f(x)=x^2-x-12$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-3<x<4$

Step ❷ $f(x-1)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.



$f(x-1)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-2<x<5$이므로 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $-1+0+1+2+3+4=9$

해검단 TALK

$f(x-1)$은 $f(x)$에 x대신 $x-1$을 대입한 거야.

$f(x)=(x+3)(x-4)$에서

$f(x-1)=(x-1+3)(x-1-4)=(x+2)(x-5)$

이므로 $f(x-1)<0$은 이차부등식 $(x+2)(x-5)<0$의 해와 같아.

H018 이차부등식의 해 구하기 정답 ①

부등식 $x^2-7x+12\le0$의 해가 $a\le x\le b$일 때, $b-a$의 값은? [정답률 92%]

❶ 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)\le0$ $(\alpha<\beta)$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$임을 이용한다.

[3점]

❶ 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 이차부등식의 해를 구한다.

$x^2-7x+12\le0$에서

$(x-3)(x-4)\le0$이므로

해는 $3\le x\le4$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로

$b-a=1$

H019 이차부등식을 이용하여 삼차방정식의 근 구하기 정답 ③

x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a-1)x^2+ax-2a=0$이 한 실근 [정답률 71%]
❶ 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 근의 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.
과 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ❸ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 식을 변형한다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax-2a$로 놓으면

$f(1)=1+(a-1)+a-2a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a-1 & a & -2a \\ & & 1 & a & 2a \\ \hline & 1 & a & 2a & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+2a)$

삼차방정식 $(x-1)(x^2+ax+2a)=0$이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

Step ❷ 이차방정식의 판별식을 이용하여 a의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$

$0<a<8$

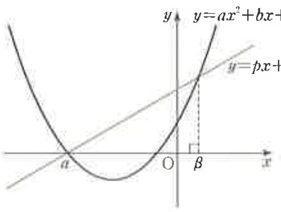
따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

해검단 TALK

이 문제는 얼핏보면 삼차방정식 문제 같지만 인수분해를 할 수 있는지, 이차방정식의 판별식과 근의 조건을 이해하고 있는지, 이차부등식의 해를 구할 수 있는지를 종합적으로 묻는 문제야. 따라서 문제에 개념을 통합적으로 적용할 수 있는 연습이 필요해.

H020 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기 정답 ⑤

직선 $y=px+q$와 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점] [정답률 69%]



〈보기〉

ㄱ. $b^2-4ac>0$ ❶ 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계로 부호를 판정한다.

ㄴ. $aq^2+bq+c>0$ ❷ 이차함수의 그래프와 직선을 이용하여 부호를 판정한다.

ㄷ. 부등식 $ax^2+(b-p)x+c-q\le0$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$
❸ 이차함수의 그래프와 직선을 이용하여 해를 구한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ❺ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 파악한다.

ㄱ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.
따라서 $b^2-4ac>0$ (참)

Step ❷ 이차함수의 그래프와 직선을 이용한다.

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$x>0$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위에 있으므로
$f(x)>0$
직선의 y절편 q가 양수이므로
$f(q)=aq^2+bq+c>0$ (참)

Step ❸ 이차함수의 그래프와 이차부등식의 관계를 이용한다.

ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 α, β이므로
$ax^2+bx+c=px+q$, 즉 $ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다. 따라서
$ax^2+(b-p)x+c-q=a(x-\alpha)(x-\beta)\le0$
$a>0$이므로 $\alpha\le x\le\beta$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

실전 솔루션

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 해와 같다.

H021 이차방정식의 판별식을 이해하고 이차부등식의 해 구하기 정답 12

x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+8k-12=0$이 허근을 갖도록 [정답률 75%]
❶ 이차방정식이 허근을 가지면 $D<0$임을 이용한다.
하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [3점] 12

Step ❶ 이차방정식이 허근을 가질 조건을 이용한다.

이차방정식 $x^2-2kx+8k-12=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(8k-12)$$
$$=k^2-8k+12$$
$$=(k-2)(k-6)$$

이차방정식이 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$2<k<6$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$3+4+5=12$

H022 절댓값을 포함한 이차부등식의 해 구하기 정답 ②

부등식 $x^2-2x-5<|x-1|$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [정답률 63%]
❶ $x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 범위를 나누어서 푼다.
[3점]

① 4 ❷ 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Step 1 절댓값 기호 안의 식을 0으로 하는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 푼다.

(i) $x\geq 1$일 때

$x-1\geq 0$이므로 $|x-1|=x-1$

$x^2-2x-5<x-1$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$에서 $-1<x<4$

따라서 $1\leq x<4$

(ii) $x<1$일 때

$x-1<0$이므로 $|x-1|=-(x-1)$

$x^2-2x-5<-(x-1)$, $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$에서

$-2<x<3$

따라서 $-2<x<1$

(i), (ii)에 의하여 $-2<x<4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

다른 풀이

$x^2-2x-5=x^2-2x+1-6=(x-1)^2-6=|x-1|^2-6$

따라서 주어진 부등식은

$|x-1|^2-6<|x-1|$

$(|x-1|-3)(|x-1|+2)<0$

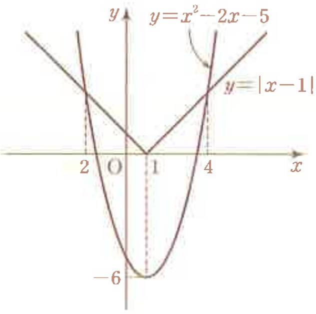
이때 $|x-1|+2>0$이므로 $|x-1|<3$

$-2<x<4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

해검단 TALK

$y=x^2-2x-5$와 $y=|x-1|$의 그래프는 다음과 같아.



H023 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식의 해 구하기 정답 ③

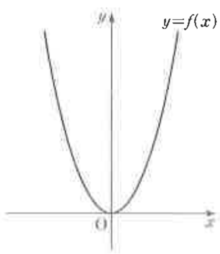
이차함수 $f(x)=x^2$의 그래프가 그림과 같을 때, [정답률 57%]

x에 대한 이차부등식 $\frac{1}{2}f(x)\leq k$를 만족시키는

❶ $f(x)=x^2$임을 이용하여 부등식을 변형한다.

정수 x의 개수가 7이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은? [3점]

❷ 부등식의 정수인 해의 개수가 7임을 이용한다.



① 12 ② 15 ❸ 18 ④ 21 ⑤ 24

Step 1 주어진 이차부등식의 해를 구한다.

이차부등식 $\frac{1}{2}f(x)\leq k$에 $f(x)=x^2$을 대입하면

$\frac{1}{2}x^2\leq k$

이때 $\frac{1}{2}x^2\leq k$를 만족시키는 정수 x의 개수가 7이므로 $k>0$

$k<0$이면 $\frac{1}{2}x^2\leq k$를 만족시키는 정수 x가 없다.

$\frac{1}{2}x^2\leq k$에서 $x^2\leq 2k$이므로

$x^2-2k\leq 0$

$(x-\sqrt{2k})(x+\sqrt{2k})\leq 0$

$-\sqrt{2k}\leq x\leq\sqrt{2k}$ ······ ㉠

Step 2 주어진 부등식의 정수인 해의 개수가 7임을 이용하여 k의 값을 구한다.

㉠을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이려면

$x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm 2$, $x=\pm 3$

이어야 하므로 $3\leq\sqrt{2k}<4$이다.

즉 $9\leq 2k<16$

따라서 $\frac{9}{2}\leq k<8$을 만족시키는 자연수 k는 5, 6, 7이므로 k의 값의 합은 18이다.

H024 이차부등식의 해 구하기 정답 18

이차부등식 $2x^2-33x-17\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수 [정답률 82%]

❶ 이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ $(\alpha<\beta)$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$임을 이용한다.

를 구하시오. [3점] 18

Step 1 이차부등식의 해를 구한다.

$2x^2-33x-17\leq 0$에서 $(2x+1)(x-17)\leq 0$

$-\frac{1}{2}\leq x\leq 17$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, $\cdots$, 17의 18개이다.

H025 삼차방정식이 세 실근을 가질 조건 이해하기 정답 ①

x에 대한 방정식 $x^3+(8-a)x^2+(a^2-8a)x-a^3=0$이 서로 [정답률 47%]

❶ 좌변을 인수분해하여 이차방정식의 판별식을 이용한다.

다른 세 실근을 갖기 위한 정수 a의 개수는? [4점]

❶ 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Step 1 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3+(8-a)x^2+(a^2-8a)x-a^3$으로 놓으면

$f(a)=a^3+(8-a)a^2+(a^2-8a)a-a^3$

$=a^3+8a^2-a^3+a^3-8a^2-a^3=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & 8-a & a^2-8a & -a^3 \\ & & a & 8a & a^3 \\ \hline & 1 & 8 & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-a)(x^2+8x+a^2)$

Step ❷ 이차방정식 $x^2+8x+a^2=0$이 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 이차방정식

$x^2+8x+a^2=0$은 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+a^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-a^2>0$

$a^2-16<0$, $(a+4)(a-4)<0$

따라서 $-4<a<4$ …… ㉠

또한 $x=a$는 $x^2+8x+a^2=0$의 근이 아니어야 하므로

$2a^2+8a\neq0$, $2a(a+4)\neq0$

따라서 $a\neq0$이고 $a\neq-4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 정수 a는 -3, -2, -1, 1, 2, 3의 6개이다.

H026 이차함수와 이차부등식의 관계를 이용하여 추론하기 정답 ④

실수 x에 대한 부등식 [정답률 33%]

$x^2-9\le2k(x-a)$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, k는 상수이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $a=3$일 때, 부등식의 해는 $x\le2k-3$이다.

ㄴ. $a=5$일 때, 부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 정수 k의 개수는 7이다.

❶ 모든 실수 x에 대하여 $x^2-9-2k(x-5)>0$일 조건을 구한다.

ㄷ. $-3\le a\le3$일 때, 모든 실수 k에 대하여 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 항상 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 부등식의 좌변을 인수분해하고 $x>3$, $x=3$, $x<3$으로 경우를 나누어 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

$x^2-9\le2k(x-a)$에서 $(x+3)(x-3)\le2k(x-a)$

ㄱ. $a=3$일 때,

$(x+3)(x-3)\le2k(x-3)$

$x>3$이면 $x+3\le2k$, $x\le2k-3$

$x=3$은 k의 값에 관계없이 해가 된다.

$x<3$이면 $x+3\ge2k$, $x\ge2k-3$

따라서 $x\le3$이면 부등식의 해가 $x\le2k-3$이 아니다. (거짓)

Step ❷ 이차함수 그래프와 이차부등식의 해 사이의 관계를 이용한다.

ㄴ. $a=5$일 때,

$(x+3)(x-3)\le2k(x-5)$

$x^2-2kx+10k-9\le0$

부등식 $x^2-2kx+10k-9\le0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+10k-9>0$이면 된다. 이차함수 $y=x^2-2kx+10k-9$의 그래프가 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 $y>0$이 되려면 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다. 즉 $x^2-2kx+10k-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$

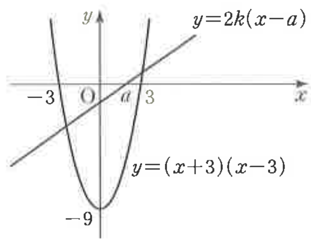
$1<k<9$

$1<k<9$를 만족시키는 정수 k는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 정수 k의 개수는 7 (참)

ㄷ. 부등식

$(x+3)(x-3)\le2k(x-a)$ …… ㉠

의 해는 함수 $y=(x+3)(x-3)$의 그래프가 직선 $y=2k(x-a)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다. 함수 $y=(x+3)(x-3)$의 그래프는 두 점 $(-3, 0)$과 $(3, 0)$을 지나는 곡선이고, 함수 $y=2k(x-a)$의 그래프는 점 $(a, 0)$을 지나고 기울기가 $2k$인 직선이다.



$-3\le a\le3$일 때,

$k>0$이면 $x=3$이 부등식 ㉠을 만족시키고

$k<0$이면 $x=-3$이 부등식 ㉠을 만족시키고

$k=0$이면 $x=3$, -3이 부등식 ㉠을 만족시키므로

k의 값에 관계없이 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x의 값은 항상 존재한다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

H027 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하여 추론하기 정답 2

함수 $f(x)=x^2+2x-8$에 대하여 부등식 [정답률 18%]

$\frac{|f(x)|}{3}-f(x)\ge m(x-2)$

❶ $f(x)\ge0$, $f(x)<0$일 때의 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

를 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 양수 m의 최솟값을 구하시오. [4점] 2

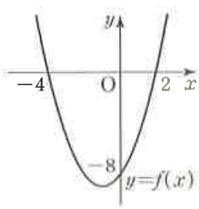
Step ❶ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점을 구하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

$f(x)=0$에서

$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)=0$이므로

$x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



Step ② 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축 위에 있을 때와 아래에 있을 때로 경우를 나누어 주어진 식을 간단히 하고 그래프를 그린다.

부등식 $\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$에서

(i) $f(x)\geq 0$, 즉 $x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$일 때

$\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$이므로

$-\dfrac{2}{3}f(x)\geq m(x-2)$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $-4<x<2$일 때

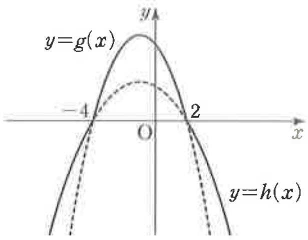
$-\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$이므로

$-\dfrac{4}{3}f(x)\geq m(x-2)$

즉 $g(x)=-\dfrac{4}{3}f(x)$, $h(x)=-\dfrac{2}{3}f(x)$라 하면

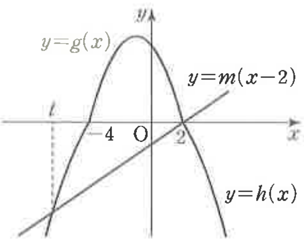
$$\frac{|f(x)|}{3}-f(x)=\begin{cases} g(x) & (-4<x<2) \\ h(x) & (x\leq -4,\ x\geq 2)\end{cases}$$

이고 그래프는 다음과 같다.



Step ③ Step ②에서 그린 그래프에 직선 $y=m(x-2)$를 그리고 부등식을 만족시키는 정수 해의 개수가 10개가 되기 위한 조건을 생각한다.

한편, 직선 $y=m(x-2)$는 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 $m\ (m>0)$인 직선이므로 함수 $y=\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



직선 $y=m(x-2)$와 함수 $y=\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 $t\ (t<-4)$라 하면 부등식

$\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$

의 해는 $t\leq x\leq 2$

$t\leq x\leq 2$인 정수 x의 개수가

$2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7$

의 10이 되려면 실수 t의 값의 범위는 $-8<t\leq -7$이어야 한다.

또한 m의 값의 범위는 직선 $y=m(x-2)$가 점 $(-7,\ h(-7))$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(-8,\ h(-8))$을 지날 때보다 작다.

$t=-7$일 때

$h(-7)=-\dfrac{2}{3}\{(-7)^2+2\times(-7)-8\}=-\dfrac{2}{3}\times 27=-18$

이므로 $m=\dfrac{0-(-18)}{2-(-7)}=2$ …… ㉠

$t=-8$일 때

$h(-8)=-\dfrac{2}{3}\{(-8)^2+2\times(-8)-8\}=-\dfrac{2}{3}\times 40=-\dfrac{80}{3}$

이므로 $m=\dfrac{1-\left(-\dfrac{80}{3}\right)}{2-(-8)}=\dfrac{8}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 m의 값의 범위는 $2\leq m<\dfrac{8}{3}$

따라서 m의 최솟값은 2이다.

H028 이차함수와 이차부등식의 관계를 활용하여 문제해결하기 정답 ⑤

다음 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점] [정답률 36%]

(가) 부등식 $f\left(\dfrac{1-x}{4}\right)\leq 0$의 해가 $-7\leq x\leq 9$이다.

❶ $f(x)=k(x+7)(x-a)\leq 0$ (단, k는 상수)

(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 2x-\dfrac{13}{3}$이 성립한다.

① $\dfrac{7}{4}$ ② $\dfrac{11}{6}$ ③ $\dfrac{23}{12}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{25}{12}$

Step ① 해가 $-7\leq x\leq 9$인 이차부등식을 구한다.

$f(x)$가 이차함수이므로 $f\left(\dfrac{1-x}{4}\right)\leq 0$은 이차부등식이다. 해가 $-7\leq x\leq 9$인 이차부등식은

$k(x+7)(x-9)\leq 0$ (단, $k>0$)

으로 놓을 수 있으므로

$f\left(\dfrac{1-x}{4}\right)=k(x+7)(x-9)$

Step ② 치환을 이용하여 $f(x)$의 식을 구한다.

$\dfrac{1-x}{4}=t$로 치환하면 $x=1-4t$이므로

$$\begin{aligned} f(t)&=k(1-4t+7)(1-4t-9) \\ &=k(-4t+8)(-4t-8) \\ &=16k(t-2)(t+2) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=a(x-2)(x+2)$ (단, $a>0$) …… ㉠

Step ③ 최고차항의 계수가 양수인 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\leq 0$이어야 한다.

조건 (나)에 의하여

$a(x-2)(x+2)\geq 2x-\dfrac{13}{3}$

이 항상 성립하므로 이차부등식

$ax^2-2x-4a+\dfrac{13}{3}\geq 0$

의 해는 모든 실수이다. 즉 이차방정식 $ax^2-2x-4a+\dfrac{13}{3}=0$의 판별식을 D라 할 때

$$\begin{aligned} \frac{D}{4}&=1-a\left(-4a+\frac{13}{3}\right) \\ &=4a^2-\frac{13}{3}a+1\leq 0 \end{aligned}$$

$12a^2-13a+3\leq 0$

$(4a-3)(3a-1)\leq 0$

$\frac{1}{3} \le a \le \frac{3}{4}$

㉠에서 $f(3)=5a$이므로

$\frac{5}{3} \le f(3) \le \frac{15}{4}$

따라서 $M=\frac{15}{4}$, $m=\frac{5}{3}$이므로 $M-m=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$

다른 풀이

0이 아닌 실수 k와 두 상수 a, b에 대하여

$f(x)=k(x-a)(x-b)$라 하자.

조건 ㈎에서 $f\left(\frac{1-x}{4}\right) \le 0$

$k\left(\frac{1-x}{4}-a\right)\left(\frac{1-x}{4}-b\right) \le 0$

$k\left(\frac{1-4a-x}{4}\right)\left(\frac{1-4b-x}{4}\right) \le 0$

부등식 $k(x+4a-1)(x+4b-1) \le 0$의 해가

$-7 \le x \le 9$이므로 $k>0$

$-4a+1=-7$, $-4b+1=9$라 하면

$a=2$, $b=-2$

따라서 $f(x)=k(x-2)(x+2)=k(x^2-4)$ …… ㉠

조건 ㈏에서 부등식

$f(x) \ge 2x-\frac{13}{3}$

이 항상 성립하므로 이차부등식

$kx^2-2x-4k+\frac{13}{3} \ge 0$

의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식

$kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}=0$

의 판별식을 D라 놓으면

$\frac{D}{4}=1-k\left(-4k+\frac{13}{3}\right)=4k^2-\frac{13}{3}k+1 \le 0$

$12k^2-13k+3 \le 0$, $(4k-3)(3k-1) \le 0$

$\frac{1}{3} \le k \le \frac{3}{4}$

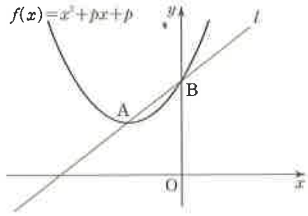
㉠에서 $f(3)=5k$이므로

$\frac{5}{3} \le f(3) \le \frac{15}{4}$

따라서 $M=\frac{15}{4}$, $m=\frac{5}{3}$이므로 $M-m=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$

H029 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기 정답 ④

0이 아닌 실수 p에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+px+p$의 그래프의 꼭짓점을 A, 이 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점을 B라 할 때, 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 하자. [정답률 40%]



직선 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 부등식 $f(x)-g(x) \le 0$을 만족시키는

❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식 l을 구한다.

정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 정수 p의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라

❷ p의 값을 기준으로 범위를 나눈 다음 $f(x)-g(x) \le 0$의 정수해의 개수가 10임을 이용한다.

할때, $M-m$의 값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

Step ❶ $y=g(x)$를 구한다.

이차함수

$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$

이므로 $A\left(-\frac{p}{2}, p-\frac{p^2}{4}\right)$, $f(0)=p$이므로 $B(0, p)$이다.

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}=\frac{p}{2}$이고 y절편은 p이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{p}{2}x+p$

즉 $g(x)=\frac{p}{2}x+p$

Step ❷ 이차부등식 $f(x)-g(x) \le 0$을 p의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

부등식 $f(x)-g(x)=x^2+\frac{p}{2}x \le 0$에 대하여

(i) $p>0$일 때

$-\frac{p}{2} \le x \le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 p의 값의 범위는

$-10<-\frac{p}{2} \le -9$

$18 \le p<20$

(ii) $p<0$일 때

$0 \le x \le -\frac{p}{2}$를 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 p의 값의 범위는

$9 \le -\frac{p}{2}<10$

$-20<p \le -18$

(i), (ii)에 의하여 정수 p의 값은

18, 19, -18, -19

따라서 $M=19$, $m=-19$이므로

$M-m=38$

H030 연립방정식의 근이 주어졌을 때 문제해결하기 정답 29

x, y에 대한 연립방정식 [정답률 13%]

$$\begin{cases} xy+3(x+y)=0 \\ xy-3(x+y)=k-9 \end{cases}$$ — ❶ x, y를 두 근으로 하는 이차방정식을 세운다.

를 만족시키는 실수인 x, y가 존재하도록 하는 100 이하의 자연수 k의 개수
❷ ❶의 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용한다.

를 구하시오. [4점] 29

Step ❶ $x+y$, xy를 구하여 x, y를 두 근으로 하는 이차방정식을 세운다.

주어진 연립방정식의 두 식을 변끼리 더하면

$2xy=k-9$

$x+y=-\dfrac{k-9}{6}$

주어진 연립방정식의 두 식을 변끼리 빼면

$6(x+y)=-k+9$

$xy=\dfrac{k-9}{2}$

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2+\dfrac{k-9}{6}t+\dfrac{k-9}{2}=0$ → $t^2-(x+y)t+xy=0$

Step ❷ 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

$6t^2+(k-9)t+3(k-9)=0$

이 이차방정식은 실근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D\ge 0$이어야 한다.

$D=(k-9)^2-72(k-9)\ge 0$, $(k-9)(k-81)\ge 0$

$k\le 9$ 또는 $k\ge 81$

따라서 100 이하의 자연수 k의 개수는 29이다.

H031 이차함수와 이차부등식의 관계를 이용하여 추론하기 정답 27

최고차항의 계수가 각각 $\dfrac{1}{2}$, 2인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 29%]

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=p$를 축으로 한다.
❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 이차함수 식을 세운다.
(나) 부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해는 $-1\le x\le 5$이다.
❷ 이차부등식의 해를 이용하여 p의 값을 구한다.

$p\times\{f(2)-g(2)\}$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.) [4점] 27

Step ❶ 조건 (가)를 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 식을 세운다.

최고차항의 계수가 각각 $\dfrac{1}{2}$, 2인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=p$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-p)^2+a$, $g(x)=2(x-p)^2+b$

로 놓을 수 있다.

Step ❷ 조건 (나)를 이용하여 p, $a-b$의 값을 구한다.

$g(x)-f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-3px+\dfrac{3}{2}p^2+b-a\le 0$ …… ㉠

해가 $-1\le x\le 5$이고 최고차항의 계수가 k인 이차부등식은

$k(x+1)(x-5)\le 0$

$kx^2-4kx-5k\le 0$ …… ㉡

조건 (나)에 의하여 두 식 ㉠, ㉡이 같아야 하므로

$k=\dfrac{3}{2}$, $3p=4k$, $\dfrac{3}{2}p^2+b-a=-5k$

따라서 $p=2$, $a-b=\dfrac{27}{2}$이므로

$$\begin{aligned} p\times\{f(2)-g(2)\}&=p\times\left[\left\{\frac{1}{2}(2-p)^2+a\right\}-\{2(2-p)^2+b\}\right] \\ &=2\times\left[\left\{\frac{1}{2}(2-2)^2+a\right\}-\{2(2-2)^2+b\}\right] \\ &=2\times(a-b) \\ &=2\times\frac{27}{2}=27 \end{aligned}$$

H032 복소수의 성질과 이차부등식의 문제해결하기 정답 8

실수 x에 대하여 복소수 z가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 42%]

(가) $z=3x+(2x-7)i$
(나) $z^2+(\bar{z})^2$은 음수이다.
— ❶ (가)를 (나)의 식에 대입한 값이 음수임을 이용하여 x의 값을 구한다.

이때, 정수 x의 개수를 구하시오.
(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점] 8

Step ❶ 조건 (가)를 $z^2+(\bar{z})^2$에 대입한다.

$z=3x+(2x-7)i$이므로

$z^2=5x^2+28x-49+6x(2x-7)i$

$\bar{z}=3x-(2x-7)i$이므로

$(\bar{z})^2=5x^2+28x-49-6x(2x-7)i$

$z^2+(\bar{z})^2=2(5x^2+28x-49)$

Step ❷ 조건 (나)에서 $z^2+(\bar{z})^2$이 음수임을 이용하여 x의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $z^2+(\bar{z})^2<0$이므로

$5x^2+28x-49<0$

$(5x-7)(x+7)<0$

$-7<x<\dfrac{7}{5}$

따라서 정수 x는 -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1이고 정수 x의 개수는 8이다.

다른 풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $z^2=(a^2-b^2)+2abi$이고 복소수의 성질에 의해 $(\bar{z})^2=\overline{z^2}$이므로 $(\bar{z})^2=a^2-b^2-2abi$이다.

따라서 $z^2+(\bar{z})^2=2(a^2-b^2)$이다.

조건 (나)에서 $z^2+(\bar{z})^2$은 음수이므로 $2(a^2-b^2)<0$

즉 $2(a+b)(a-b)<0$ …… ㉠

조건 (가)의 $z=3x+(2x-7)i$에서 $a=3x$, $b=2x-7$을 ㉠에 대입하면 $2\{3x+(2x-7)\}\{3x-(2x-7)\}=2(5x-7)(x+7)$이고 $(5x-7)(x+7)<0$이므로 $-7<x<\dfrac{7}{5}$을 만족시키는 정수 x는 -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1이고 정수 x의 개수는 8이다.

H033 이차부등식이 성립하지 않을 조건 이해하기 정답 ②

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+9a$에 대하여 이차부등식 [정답률 68%]
$f(x)<0$을 만족시키는 해가 없도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]
❶ $f(x)=0$의 판별식을 이용한다.

① 9 ❷ 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

Step ❶ 이차부등식 $f(x)<0$을 만족시키는 해가 없으려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\le 0$이어야 한다.

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+9a$의 그래프가 아래로 볼록하므로 이차부등식 $f(x)<0$을 만족시키는 해가 없으려면 이차함수 $f(x)=x^2-2ax+9a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$이므로 $0\le a\le 9$

따라서 정수 a의 개수는 10이다.

H034 이차부등식이 항상 성립할 조건 이해하기 정답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+6x+a\ge 0$이 성립하도록 [정답률 82%]
❶ 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 항상 성립할 조건은 $a>0$, $D\le 0$임을 이용한다.
하는 상수 a의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ❺ 9

Step ❶ 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용하여 a의 최솟값을 찾는다.

이차함수 $y=x^2+6x+a$의 그래프가 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 $y\ge 0$이 되려면 이차함수의 그래프가 x축과 접하거나 만나지 않아야 한다.

즉 $x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-a\le 0$, $a\ge 9$

따라서 실수 a의 최솟값은 9이다.

실전솔루션

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

❶ $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건 ⇨ $a>0$, $D<0$
❷ $ax^2+bx+c\ge 0$이 항상 성립할 조건 ⇨ $a>0$, $D\le 0$
❸ $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립할 조건 ⇨ $a<0$, $D<0$
❹ $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립할 조건 ⇨ $a<0$, $D\le 0$

H035 이차부등식이 항상 성립할 조건 이해하기 정답 ②

$3\le x\le 5$인 실수 x에 대하여 부등식 [정답률 75%]

$x^2-4x-4k+3\le 0$

이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값은? [3점]
❶ $f(x)=x^2-4x-4k+3$으로 놓고 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후, $3\le x\le 5$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립할 조건을 찾는다.

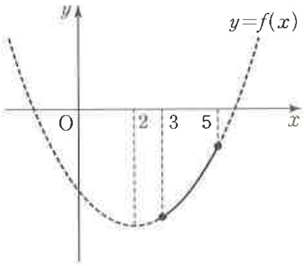
① 1 ❷ 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ $f(x)=x^2-4x-4k+3$으로 놓고 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

$f(x)=x^2-4x-4k+3$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2-4k-1$

Step ❷ 그래프를 그려 주어진 범위에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 찾는다.



그림과 같이 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식은 $x=2$이므로 $3\le x\le 5$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 $f(5)$이다.

$f(5)\le 0$에서

$f(5)=25-20-4k+3$
$\quad=8-4k\le 0$

이므로

$k\ge 2$

따라서 상수 k의 최솟값은 2이다.

H036 이차함수와 이차부등식의 관계를 이용하여 함숫값 구하기 정답 ④

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [정답률 81%]

(가) $f(0)=8$
(나) 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\ne 2$인 모든 실수이다.
❶ 이차부등식의 해를 이용하여 이차함수의 그래프를 그려 본다.

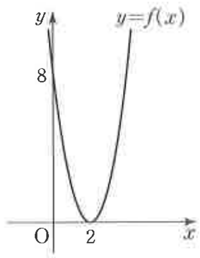
❷ ❶의 그래프를 식으로 나타내고 (가)를 이용하여 함숫값을 구한다.

$f(5)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ❹ 18 ⑤ 20

Step ❶ 조건 (나)를 이용하여 이차함수의 그래프를 그린다.

조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne 2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이고 곡선 $y=f(x)$는 x축과 점 $(2, 0)$에서 접한다. 또한 조건 (가)에서 $f(0)=8$이므로 함수 $y=f(x)$의 y절편은 8이다.



Step ❷ ❶의 그래프를 식으로 나타내고 (가)의 조건을 이용하여 함숫값을 구한다.

$f(x)=a(x-2)^2$ $(a>0)$으로 놓으면

$f(0)=a(0-2)^2=4a=8$

$a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2(5-2)^2=18$

해검단 TALK

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=p$에서 x축과 접하면 이차함수의 그래프의 식은 $y=a(x-p)^2$임을 이용해.

H037 이차부등식이 항상 성립할 조건 이해하기 정답 ③

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 [정답률 77%]

$$x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3\geq 0$$

이 성립하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [3점]

❶ 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 항상 성립할 조건은 $a>0$, $D\leq 0$임을 이용한다.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Step ❶ 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3$의 그래프는 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 $y\geq 0$이 되려면 이차함수의 그래프가 x축과 접하거나 만나지 않아야 한다.

즉 $x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(-k^2+5k-3)\leq 0$

$k^2-4k+4+k^2-5k+3\leq 0$

$2k^2-9k+7\leq 0$

$(k-1)(2k-7)\leq 0$

$1\leq k\leq \frac{7}{2}$

따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3이므로 모든 정수 k의 값의 합은 6이다.

다른 풀이

$x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3$

$=x^2-2(k-2)x+(k-2)^2-(k-2)^2-k^2+5k-3$

$=\{x-(k-2)\}^2-2k^2+9k-7\geq 0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$-2k^2+9k-7\geq 0$이므로

$2k^2-9k+7\leq 0$

$(k-1)(2k-7)\leq 0$

$1\leq k\leq \frac{7}{2}$

따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3이므로 k의 값의 합은 6이다.

H038 연립이차부등식의 해 구하기 정답 7

연립부등식 [정답률 78%]

$$\begin{cases} x-1\geq 2 \\ x^2-6x\leq -8 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

의 해가 $\alpha\leq x\leq \beta$이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점] 7

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

$x-1\geq 2$에서

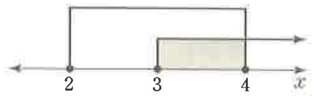
$x\geq 3$ …… ㉠

$x^2-6x\leq -8$에서

$x^2-6x+8\leq 0$

$(x-2)(x-4)\leq 0$

$2\leq x\leq 4$ …… ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $3\leq x\leq 4$이므로

$\alpha=3$, $\beta=4$

따라서 $\alpha+\beta=7$

H039 연립이차부등식의 해 구하기 정답 ⑤

연립부등식 [정답률 90%]

$$\begin{cases} 2x-7\geq 0 \\ x^2-5x-14<0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한다.

$2x-7\geq 0$에서

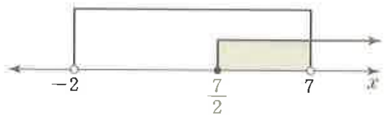
$x\geq \frac{7}{2}$ …… ㉠

$x^2-5x-14<0$에서

$(x-7)(x+2)<0$

$-2<x<7$ …… ㉡

Step ❷ 각 부등식의 해의 공통 부분에 속하는 정수 x를 구한다.



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $\frac{7}{2}\leq x<7$이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 4, 5, 6이다. 따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$4+5+6=15$

H040 연립부등식의 해 구하기 정답 ⑤

연립부등식 [정답률 75%]

$$\begin{cases} |x-1|\leq 3 \\ x^2-8x+15>0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

$|x-1|\le 3$에서

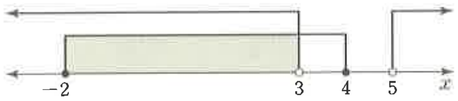
$-3\le x-1\le 3$

$-2\le x\le 4$ ······ ㉠

$x^2-8x+15>0$에서

$(x-3)(x-5)>0$

$x<3$ 또는 $x>5$ ······ ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $-2\le x<3$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.

H041 연립부등식의 해 구하기 정답 3

연립부등식 [정답률 77%]

$$\begin{cases} 2x+1<x-3 \\ x^2+6x-7<0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오. [3점]

3

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

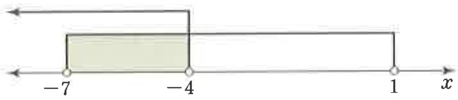
$2x+1<x-3$에서

$x<-4$ ······ ㉠

$x^2+6x-7<0$에서

$(x-1)(x+7)<0$

$-7<x<1$ ······ ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $-7<x<-4$

따라서 $\alpha=-7$, $\beta=-4$이므로

$\beta-\alpha=-4-(-7)=3$

H042 연립부등식 이해하기 정답 34

연립부등식 [정답률 82%]

$$\begin{cases} x-1\ge 2 \\ x^2-5x\le 0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

34

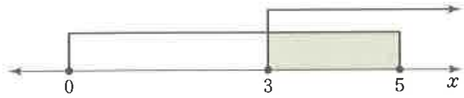
Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

$x-1\ge 2$에서

$x\ge 3$ ······ ㉠

$x^2-5x=x(x-5)\le 0$에서

$0\le x\le 5$ ······ ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $3\le x\le 5$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=5$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+5^2=34$

H043 연립이차부등식의 해 구하기 정답 ③

연립부등식 [정답률 85%]

$$\begin{cases} x^2+x\ge 6 \\ x^2+5<6x \end{cases}$$

— ❶ 각 이차부등식의 해의 공통부분을 찾는다.

를 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 각 이차부등식의 해를 구한다.

$x^2+x-6\ge 0$에서

$(x+3)(x-2)\ge 0$

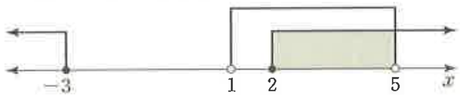
$x\le -3$ 또는 $x\ge 2$ ······ ㉠

$x^2-6x+5<0$에서

$(x-1)(x-5)<0$

$1<x<5$ ······ ㉡

Step ❷ 두 이차부등식의 해의 공통부분에 속하는 정수의 개수를 구한다.



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $2\le x<5$이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 3이다.

H044 연립부등식의 해 구하기 정답 28

연립부등식 [정답률 84%]

$$\begin{cases} 2x-1\ge 7 \\ (x-3)(x-7)\le 0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [3점]

28

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

$2x-1\ge 7$에서 $2x\ge 8$

$x\ge 4$ ······ ㉠

$(x-3)(x-7)\le 0$에서

$3\le x\le 7$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $4\le x\le 7$

따라서 최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=4$이므로

$M\times m=28$

H045 연립부등식의 해 구하기

정답 ③

연립부등식

[정답률 82%]

$$\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x^2-7x+6\le 0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

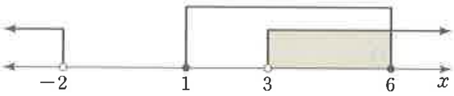
Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

$x^2-x-6>0$에서 $(x-3)(x+2)>0$

$x<-2$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$x^2-7x+6\le 0$에서 $(x-1)(x-6)\le 0$

$1\le x\le 6$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 $3<x\le 6$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 4, 5, 6의 3개이다.

H046 연립부등식의 해 구하기

정답 9

연립부등식

[정답률 75%]

$$\begin{cases} |x-1|\le 6 \\ (x-2)(x-8)\le 0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

의 해가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

9

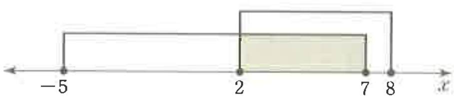
Step ❶ 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

$|x-1|\le 6$에서 $-6\le x-1\le 6$이므로

$-5\le x\le 7$ …… ㉠

$(x-2)(x-8)\le 0$에서

$2\le x\le 8$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 $2\le x\le 7$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=7$이므로

$\alpha+\beta=2+7=9$

H047 연립부등식의 해 추론하기

정답 ①

x에 대한 연립부등식

[정답률 34%]

$$\begin{cases} x^2-a^2x\ge 0 \\ x^2-4ax+4a^2-1<0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식의 해를 구한다.

을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이 되기 위한 모든 실수 a의 값의 합은?

❷ 정수인 해의 개수가 1일 때 a의 값을 구한다.

(단, $0<a<\sqrt{2}$) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{25}{16}$ ③ $\frac{13}{8}$ ④ $\frac{27}{16}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한다.

$x^2-a^2x=x(x-a^2)\ge 0$에서

$x\le 0$ 또는 $x\ge a^2$ …… ㉠

$x^2-4ax+4a^2-1<0$에서

$4a^2-1=(2a)^2-1^2$
$=(2a+1)(2a-1)$

$\{x-(2a-1)\}\{x-(2a+1)\}<0$

$2a-1<x<2a+1$ …… ㉡

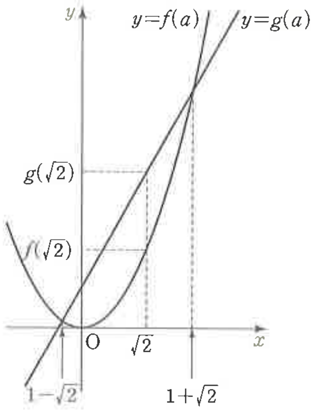
이때 $f(a)=a^2$, $g(a)=2a+1$로 놓고 두 함수 $y=f(a)$, $y=g(a)$의 그래프의 교점의 a좌표를 구하면 $f(a)=g(a)$에서

$a^2=2a+1$

$a^2-2a-1=0$

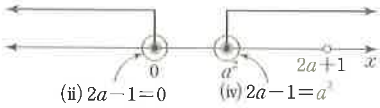
$a=1+\sqrt{2}$ 또는 $a=1-\sqrt{2}$

따라서 $0<a<\sqrt{2}$일 때 함수 $y=f(a)$의 그래프보다 함수 $y=g(a)$의 그래프가 위에 있으므로 $a^2<2a+1$ $(0<a<\sqrt{2})$이다.



Step ❷ 실수 a의 값의 범위 또는 값에 따라 정수인 해의 개수를 구한다.

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 $2a-1$을 제외한 0, a^2, $2a+1$의 위치는 다음과 같이 결정된다.



이때

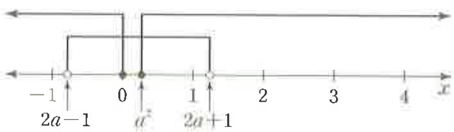
$2a-1=0$이면 $a=\frac{1}{2}$

$2a-1=a^2$이면 $(a-1)^2=0$, $a=1$

이므로 두 수 $\frac{1}{2}$, 1을 기준으로 하는 a의 값의 범위로 경우를 나누어 생각한다.

a의 값의 범위에 따라 부등식의 해를 구하면

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 연립부등식의 해는

$-1<2a-1<x\le 0$ 또는 $a^2\le x<2a+1<2$

이때 $0<a^2<\frac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로

$x=0$, $x=1$의 2개의 정수인 해가 존재한다.

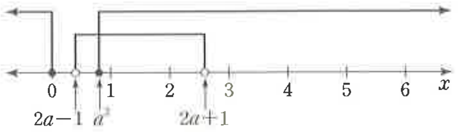
(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 연립부등식의 해는

$\frac{1}{4}=a^2\le x<2a+1=2$

따라서 $x=1$의 1개의 정수인 해가 존재한다.

(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 연립부등식의 해는

$a^2\le x<2a+1$

따라서 $\frac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로

$x=1$, $x=2$의 2개의 정수인 해가 존재한다.

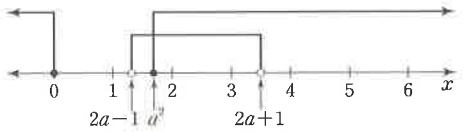
(iv) $a=1$일 때

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 연립부등식의 해는

$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$

따라서 $x=2$의 1개의 정수인 해가 존재한다.

(v) $1<a<\sqrt{2}$일 때



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 연립부등식의 해는

$a^2\le x<2a+1$

$1<a^2<2$이고 $3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$

따라서 $x=2$, $x=3$의 2개의 정수인 해가 존재한다.

Step ❸ 정수인 해의 개수가 1일 때, 실수 a의 값의 합을 구한다.

그러므로 (i)~(v)에 의하여 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개의 정수인 해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

H048 연립부등식 문제해결하기 정답 ②

모든 실수 x에 대하여 부등식 [정답률 54%]

$-x^2+3x+2\le mx+n\le x^2-x+4$

❶ 부등식 $-x^2+3x+2\le mx+n$과 $mx+n\le x^2-x+4$가 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건을 구한다.

가 성립할 때, m^2+n^2의 값은? (단, m, n은 상수이다.) [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Step ❶ 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\le mx+n$이 성립하기 위한 조건을 구한다.

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\le mx+n$이므로

$x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$

이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-3)^2-4n+8\le 0$

따라서

$4n\ge m^2-6m+17$ …… ㉠

Step ❷ 모든 실수 x에 대하여 $mx+n\le x^2-x+4$가 성립하기 위한 조건을 구한다.

모든 실수 x에 대하여 $mx+n\le x^2-x+4$이므로

$x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$

이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(m+1)^2-16+4n\le 0$

따라서

$4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉡

Step ❸ ㉠, ㉡을 만족시키는 실수 m, n의 값을 구한다.

㉠, ㉡에 의하여

$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉢

$m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$

$2m^2-4m+2\le 0$, $2(m-1)^2\le 0$

이므로 $m=1$ → (실수)$^2\ge 0$이므로 $(m-1)^2=0$

$m=1$을 ㉢에 대입하면 $12\le 4n\le 12$이므로 $n=3$

따라서 $m^2+n^2=1^2+3^2=10$

H049 연립이차부등식의 해 구하기 정답 ④

연립부등식 $0\le -x^2+5x<-x+9$를 만족시키는 모든 정수 [정답률 78%]

❶ 부등식 $f(x)\le g(x)<h(x)$의 해는 연립부등식 $f(x)\le g(x)$, $g(x)<h(x)$를 풀어 공통부분을 구한다.

x의 값의 합은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Step ❶ 연립부등식 $0\le -x^2+5x$, $-x^2+5x<-x+9$를 풀어 공통부분을 구한다.

(i) $0\le -x^2+5x$, 즉 $x^2-5x\le 0$인 경우

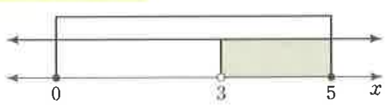
$x(x-5)\le 0$

$0\le x\le 5$

(ii) $-x^2+5x<-x+9$인 경우

$x^2-6x+9>0$, $(x-3)^2>0$ → $x<3$ 또는 $x>3$

따라서 $x\ne 3$인 모든 실수



(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 해는

$0\le x<3$, $3<x\le 5$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 4, 5이므로 구하는 합은 12이다.

실전 솔루션

$A<B<C$의 꼴의 연립부등식은 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$로 변형하여 푼다.

H050 연립부등식의 조건을 이용하여 미정계수 구하기 정답 ③

연립이차부등식 [정답률 61%]

$$\begin{cases} x^2+4x-21\le 0 \\ x^2-5kx-6k^2>0 \end{cases}$$

❶ 연립부등식의 해가 존재하므로 각 부등식의 해의 공통부분이 존재함을 이용한다.

의 해가 존재하도록 하는 양의 정수 k의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ❸ 6 ④ 7 ⑤ 8

Step ❶ 이차부등식 $x^2+4x-21\le 0$의 해를 구한다.

$x^2+4x-21\le 0$에서 $(x+7)(x-3)\le 0$

$-7\le x\le 3$ …… ㉠

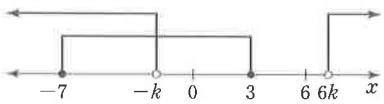
Step ❷ k가 양수임을 이용하여 이차부등식 $x^2-5kx-6k^2>0$의 해를 구한다.

$x^2-5kx-6k^2>0$에서 $(x-6k)(x+k)>0$

$k>0$이므로 $x<-k$ 또는 $x>6k$ …… ㉡

Step ❸ ㉠, ㉡을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

k는 양의 정수이므로 $k\ge 1$이다. 따라서 $6k\ge 6$이므로 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면 다음 그림과 같아야 한다.



$-7<-k<0$, $0<k<7$

따라서 부등식의 해가 존재하도록 하는 양의 정수 k의 개수는 6이다.

→ k는 양의 정수이므로 $-k<0$

H051 연립부등식 이해하기 정답 ③

x에 대한 두 다항식 $f(x)=2x^2+5x+2$, [정답률 49%]
$g(x)=(a-1)x+b$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 부등식 $x-2\le g(x)\le f(x)$가 성립하도록 하는 실수
❶ 부등식 $x-2\le g(x)$, $g(x)\le f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건을 생각해 본다.
b의 값의 범위는 $\alpha\le b\le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 최댓값은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ❸ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

→ 부등식 $f(x)\le g(x)\le h(x)$의 해는 두 부등식 $f(x)\le g(x)$, $g(x)\le h(x)$의 해의 공통부분이다.

Step ❶ 부등식이 항상 성립하도록 a, b의 값의 범위를 구한다.

부등식 $x-2\le (a-1)x+b\le 2x^2+5x+2$에서

(i) 모든 실수 x에 대하여 $(a-1)x+b\ge x-2$

즉 $(a-2)x+b+2\ge 0$이 성립하여야 하므로 $a-2=0$, $b+2\ge 0$

따라서 $a=2$, $b\ge -2$

(ii) (i)에서 $a=2$이므로 모든 실수 x에 대하여

$2x^2+4x+2-b\ge 0$이 성립하여야 하므로 $2x^2+4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-2(2-b)\le 0$

따라서 $b\le 0$

Step ❷ (i), (ii)에 의하여 공통부분을 찾고 $\beta-\alpha$의 최댓값을 구한다.

(i), (ii)에 의하여 $-2\le b\le 0$이므로 $\beta-\alpha$의 최댓값은 2이다.

실전솔루션

$ax+b\ge 0$에서 $a=0$일 때, $\begin{cases} b\ge 0 \text{이면 해는 모든 실수} \\ b<0 \text{이면 해는 없다.} \end{cases}$

H052 삼차방정식의 근의 조건을 이용하여 미정계수의 범위 구하기 정답 ③

삼차방정식 $2x^3+5x^2+(k+3)x+k=0$의 세 근이 음수가 [정답률 52%]
❶ 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 세 근이 음수가 될 조건을 생각해 본다.
되도록 하는 실수 k의 값의 범위는? [4점]

① $-1\le k\le \frac{5}{8}$ ② $-1\le k<\frac{9}{8}$ ❸ $0<k\le \frac{9}{8}$
④ $0<k<\frac{11}{8}$ ⑤ $1\le k<\frac{11}{8}$

Step ❶ 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 세 근이 음수가 되는 경우를 따져 본다.

$f(x)=2x^3+5x^2+(k+3)x+k$라 하면

$f(-1)=2\times(-1)^3+5\times(-1)^2+(k+3)\times(-1)+k=0$

이므로 인수정리에 의하여 $2x^3+5x^2+(k+3)x+k$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$2x^3+5x^2+(k+3)x+k$를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 5 & k+3 & k \\ & & -2 & -3 & -k \\ \hline & 2 & 3 & k & 0 \end{array}$$

$2x^3+5x^2+(k+3)x+k=(x+1)(2x^2+3x+k)$

따라서 주어진 방정식의 한 근은 -1로 음수이고 나머지 두 근도 음수가 되기 위해서는 이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이 음수가 되어야 한다.

Step ❷ 이차방정식의 두 근이 음수가 될 조건을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

$2x^2+3x+k=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $D=9-8k\ge 0$이므로 $k\le \frac{9}{8}$

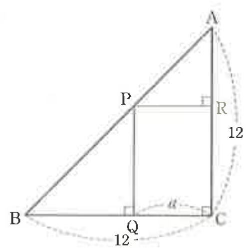
(ii) $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}<0$이므로 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

(iii) $\alpha\beta=\frac{k}{2}>0$이므로 $k>0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $0<k\le \frac{9}{8}$

H053 연립이차부등식을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 18

그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{BC}=12$인 직각이등변삼각형 ABC가 있 [정답률 37%]
다. 빗변 AB 위의 점 P에서 변 BC와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 직사각형 PQCR의 넓이는 두 삼각형 APR와 PBQ의 각각의 넓이
❶ $\overline{QC}=a$임을 이용하여 각 도형의 넓이를 구하는 식으로 나타낸다.
보다 크다. $\overline{QC}=a$일 때, 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [4점] 18



Step ❶ **직사각형 PQCR, 두 삼각형 APR, PBQ의 넓이를 구하고 연립부등식을 세운다.**

$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$이고 $\overline{BQ}=12-a$

이때 세 삼각형 ABC, APR, PBQ는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

(직사각형 PQCR의 넓이)$=a(12-a)$

$\triangle PBQ=\frac{1}{2}(12-a)^2$

$\triangle APR=\frac{1}{2}a^2$

Step ❷ **연립이차부등식의 해를 구하고 모든 자연수 a의 값의 합을 구한다.**

주어진 조건에 의하여

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 \\ a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 \end{cases}$$

$a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2$에서

$a^2-16a+48<0$, $(a-4)(a-12)<0$

$4<a<12$ …… ㉠

$a(12-a)>\frac{1}{2}a^2$에서

$a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$

$0<a<8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4<a<8$

따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 구하는 합은 18이다.

H054 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기 정답 ⑤

이차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 두 점에서 만나고 그 교점의 y좌표가 각각 3과 8이다. 이때 이차부등식 $f(x)-x-1>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [4점] [정답률 68%]

❶ $y=f(x)$와 $y=x+1$의 그래프를 그려 $f(x)>x+1$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

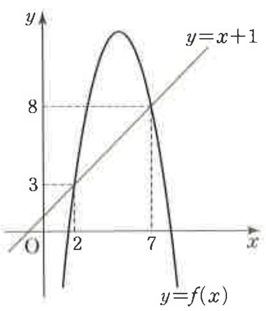
Step ❶ **이차함수의 그래프와 직선의 교점의 좌표를 구한다.**

교점의 y좌표가 각각 3과 8이므로

직선 $y=x+1$에 대입하면

$y=3$일 때 $x=2$, $y=8$일 때 $x=7$

따라서 직선 $y=x+1$과 이차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2, 3)$과 $(7, 8)$에서 만난다.



Step ❷ **이차부등식을 만족하는 x의 값의 범위를 구한다.**

이때 이차부등식 $f(x)-x-1>0$, 즉 $f(x)>x+1$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있을 때 x의 값의 범위와 같으므로

$2<x<7$

따라서 이차부등식 $f(x)-x-1>0$을 만족시키는 정수 x는 3, 4, 5, 6이므로 모든 정수 x의 값의 합은 18이다.

H055 연립이차부등식 이해하기 정답 4

연립부등식 [정답률 56%]

$$\begin{cases} |x-2|<k \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases}$$

— ❶ 각 부등식을 풀어 공통부분을 구한다.

을 만족시키는 정수 x의 개수가 5일 때, 양의 정수 k의 최솟값을 구하시오. [4점] 4

Step ❶ **각각의 부등식의 해를 구한다.**

$$\begin{cases} |x-2|<k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x-3\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

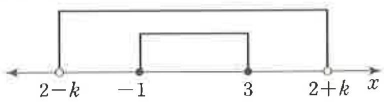
㉠의 해가 존재하므로 $k>0$

㉠에서 $-k<x-2<k$, $2-k<x<2+k$

㉡에서 $(x+1)(x-3)\le 0$, $-1\le x\le 3$

Step ❷ **두 부등식의 공통부분의 정수인 해의 개수가 5가 되도록 k의 값의 범위를 구한다.**

㉠, ㉡의 공통부분의 정수인 해의 개수가 $5(x=-1, 0, 1, 2, 3)$이려면 아래 그림과 같이 $2-k<-1$이고 $2+k>3$이어야 한다.



따라서 $k>3$이므로 양의 정수 k의 최솟값은 4이다.

H056 일차부등식을 이용하여 문제해결하기 정답 71

x에 대한 일차부등식 $|x-a[a]|<b[b]$의 해가 $8<x<30$ [정답률 24%]

❶ 부등식의 절댓값을 풀면 $a[a]-b[b]<x<a[a]+b[b]$이다.

이다. 이를 만족하는 양수 a, b에 대하여 $8a+9b$의 값을 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점] 71

Step ❶ **절댓값의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.**

$|x-a[a]|<b[b]$에서 $b[b]>0$이므로

$-b[b]<x-a[a]<b[b]$

$a[a]-b[b]<x<a[a]+b[b]$ …… ㉠

㉠의 해가 $8<x<30$이므로

$a[a]-b[b]=8$, $a[a]+b[b]=30$

두 식을 연립하여 풀면 $a[a]=19$, $b[b]=11$

$[a]=n$ (n은 양의 정수)이라 하면 $n\le a<n+1$이므로

$n^2\le a[a]<n^2+n$

즉 $n^2 \le 19 < n(n+1)$

$n^2 \le 19$이므로 $n \le 4$

$19 < n(n+1)$이므로 $n \ge 4$

따라서 $n=4$

즉 $[a]=4$이므로 $a[a]=19$에 대입하면

$a \times 4 = 19$, $a=\frac{19}{4}$

Step ❷ 가우스 기호의 정의를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

마찬가지로 $[b]=m$ (m은 양의 정수)이라 하면 $m \le b < m+1$이므로

$m^2 \le b[b] < m^2+m$

즉 $m^2 \le 11 < m(m+1)$

$m^2 \le 11$이므로 $m \le 3$

$11 < m(m+1)$이므로 $m \ge 3$

따라서 $m=3$

즉 $[b]=3$이므로 $b[b]=11$에 대입하면

$b \times 3 = 11$, $b=\frac{11}{3}$

따라서 $8a+9b=38+33=71$

해검단 TALK

이 문제는 절댓값과 가우스 기호의 뜻과 성질을 알고 있으면 해결할 수 있는 문제야.

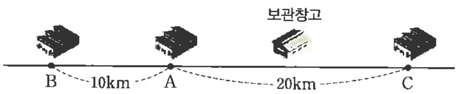
① 양수 a, b에 대하여 $|x-a|<b$이면 $a-b<x<a+b$

② $[x]$가 x보다 크지 않은 최대의 정수이면
$[x]=n \Rightarrow n \le x < n+1$ (단, n은 정수)

H057 이차부등식을 이용하여 문제해결하기 정답 ④

그림과 같이 일직선 위의 세 지점 A, B, C에 같은 제품을 생산하는 공장이 있다. A와 B 사이의 거리는 10 km, B와 C 사이의 거리는 30 km, A와 C 사이의 거리는 20 km이다. 이 일직선 위의 A와 C 사이에 보관창고를 지으려고 한다. 공장과 보관창고와의 거리가 x km일 때, 제품 한 개당 운송비는 x^2원이 든다고 하자. 세 지점 A, B, C의 공장에서 하루에 생산되는 제품이 각각 100개, 200개, 300개일 때, 하루에 드는 총 운송비가 155,000원 이하가 되도록 하는 보관창고는 A지점에서 최대 몇 km 떨어진 지점까지 지을 수 있는가? (단, 공장과 보관창고의 크기는 무시한다.) [4점] [정답률 60%]

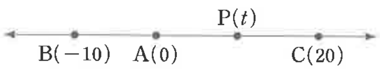
❶ 공장과 보관창고의 위치를 수직선 위에 나타낸다.



① 9 ② 11 ③ 13 ❹ 15 ⑤ 17

Step ❶ 주어진 상황을 수직선 위에 나타내어 보관창고의 위치의 범위를 구한다.

세 지점 A, B, C를 A를 원점으로 하는 수직선 위에 놓으면 A(0), B(−10), C(20)이다.



보관창고의 위치를 P(t)라 하면 점 P는 A와 C 사이에 있으므로

$0<t<20$ …… ㉠

Step ❷ 주어진 운송비를 이용하여 부등식을 세우고 해를 구한다.

총 운송비는 $100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2$이고

하루에 운송비가 155,000원 이하이므로

$100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2 \le 155000$

$t^2+2(t+10)^2+3(20-t)^2 \le 1550$

$6t^2-80t-150 \le 0$, $3t^2-40t-75 \le 0$

$(3t+5)(t-15) \le 0$

$-\frac{5}{3} \le t \le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 부분을 구하면 $0<t\le 15$

따라서 보관창고는 A지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다.

씨리얼 Special

문제편 pp.124 ~ 125

1 ④ 2 7 3 ⑤ 4 ② 5 ② 6 ①

1 삼차방정식의 해 구하기

정답 ④

정수 k에 대하여 삼차방정식 $x^3+kx^2+8x-k-9=0$이

❶ 좌변을 인수분해하고 판별식을 이용하여 k의 범위를 구한다.

한 개의 실근 α와 서로 다른 두 개의 허근 β, γ를 가질 때, $\alpha+\beta\gamma$의 최댓값

❷ $\alpha+\beta\gamma$의 최댓값을 구한다.

은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ❹ 16 ⑤ 18

Step ❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 실근 α를 구한다.

$f(x)=x^3+kx^2+8x-k-9$라 하면

$f(1)=1+k+8-k-9=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & k & 8 & -k-9 \\ & & 1 & k+1 & -k+9 \\ \hline & 1 & k+1 & k+9 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(k+1)x+k+9\}=0$

$f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2+(k+1)x+k+9=0$이므로

$\alpha=1$

Step ❷ 판별식을 이용하여 k의 범위를 구한다.

삼차방정식 $(x-1)\{x^2+(k+1)x+k+9\}=0$이 한 개의 실근과 서로 다른 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+(k+1)x+k+9=0$이 서로 다른 두 개의 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+(k+1)x+k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4(k+9)<0$

$k^2-2k-35<0$, $(k+5)(k-7)<0$

$-5<k<7$ …… ㉠

Step ❸ α, β, γ와 k의 관계를 알고 $\alpha+\beta\gamma$의 최댓값을 구한다.

β, γ는 이차방정식 $x^2+(k+1)x+k+9=0$의 서로 다른 두 허근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta\gamma=k+9$

따라서 $\alpha+\beta\gamma=1+(k+9)=k+10$ …… ㉡

k가 정수이므로 $\alpha+\beta\gamma$도 정수이다.

㉠, ㉡에서

$5<\alpha+\beta\gamma<17$

따라서 $\alpha+\beta\gamma$의 최댓값은 16이다.

2 연립이차방정식의 해 구하기

정답 7

x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-y^2=x+y \\ xy=12 \end{cases}$$

❶ 첫 번째 식을 인수분해하여 각 경우의 x, y의 값을 구한다.

을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하시오. [3점] 7

Step ❶ $x^2-y^2=x+y$를 인수분해한다.

$x^2-y^2=x+y$에서

$(x-y)(x+y)=x+y$

$(x+y)(x-y-1)=0$

$x+y=0$ 또는 $x-y-1=0$

Step ❷ ❶에서 구한 경우에 따라 $x+y$의 최댓값을 구한다.

(i) $x+y=0$일 때

$y=-x$이므로 $xy=12$에서

$x\times(-x)=12$, $x^2=-12$

$x=\pm\sqrt{-12}=\pm2\sqrt{3}i$

따라서 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x-y-1=0$일 때

$y=x-1$이므로 $xy=12$에서

$x\times(x-1)=12$, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$x=-3$ 또는 $x=4$

$x=-3$일 때 $y=-4$이고, $x=4$일 때 $y=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 $x=4$, $y=3$일 때, $x+y$의 최댓값은 7이다.

3 이차부등식을 활용하여 문제해결하기

정답 ⑤

최고차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-1)=f(3)=0$
> (나) 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $0<x<3$이다.

❶ 조건을 만족하는 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

부등식 $f(2x)+3g(x)+3<0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

❷ x의 범위를 찾아 만족하는 정수 x의 개수를 구한다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ❺ 9

Step ❶ 조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 교점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

Step ❷ 조건 (나)와 함수 $f(x)$를 이용하여 함수 $g(x)$를 구한다.

이차함수 $y=g(x)$에서 최고차항의 계수가 -1이므로

$g(x)=-x^2+ax+b$ (단, a, b는 실수)라 하자.

부등식 $f(x)<g(x)$에서

$x^2-2x-3<-x^2+ax+b$

$2x^2-(2+a)x-3-b<0$ …… ㉠

이때 최고차항의 계수가 2이고 해가 $0<x<3$인 이차부등식은

$2x(x-3)<0$

$2x^2-6x<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-(2+a)=-6$, $-3-b=0$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$g(x)=-x^2+4x-3$

Step ❸ 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

부등식 $f(2x)+3g(x)+3<0$에서

$\{(2x)^2-2(2x)-3\}+3(-x^2+4x-3)+3<0$

$x^2+8x-9<0$

$(x+9)(x-1)<0$

$-9<x<1$

따라서 정수 x는 -8, -7, -6, $\cdots$, 0이고, 그 개수는 9이다.

실전 솔루션

❶ 해가 $\alpha<x<\beta$이고 최고차항의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

❷ 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 최고차항의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

4 조건이 주어진 사차방정식 문제해결하기 — 정답 ②

두 실수 a, b에 대하여 사차다항식 $P(x)=x^4+ax^2+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(i)=0$

(나) 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -6이다.

❶ 조건을 만족하는 다항식 $P(x)$를 구한다.

사차방정식 $P(x)=0$의 모든 실근의 곱은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

❷ $P(x)=0$을 인수분해하여 모든 실근의 곱을 구한다.

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

Step ❶ 주어진 조건을 이용하여 a, b의 관계식을 구하고 그 값을 구한다.

조건 (가)에서

$P(i)=i^4+a\times i^2+b=1-a+b=0$

$a-b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -6이므로

$P(1)=1+a+b=-6$

$a+b=-7$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a=-6$, $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3-b=1$, $b=-4$

Step ❷ 방정식 $P(x)=0$의 모든 실근의 곱을 구한다.

따라서 $P(x)=x^4-3x^2-4$

사차방정식 $x^4-3x^2-4=0$에서

$(x^2+1)(x^2-4)=0$

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 사차방정식 $P(x)=0$의 모든 실근의 곱은

$2\times(-2)=-4$

5 근의 조건이 주어진 연립이차부등식 문제해결하기 — 정답 ②

정수 a에 대하여 연립이차부등식

$$\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x^2-2ax+a^2-1\le 0 \end{cases}$$

❶ 각각의 부등식을 푼다.

을 만족시키는 정수 x의 개수가 1 또는 2가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

❷ a의 범위를 나누어 x의 개수를 만족하는 a의 값을 찾는다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 각 부등식의 해를 구한다.

부등식 $x^2-x-6>0$에서

$(x+2)(x-3)>0$

$x<-2$ 또는 $x>3$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 부등식 $x^2-2ax+a^2-1\le 0$에서

$x^2-2ax+(a-1)(a+1)\le 0$

$\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}\le 0$

$a-1\le x\le a+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

Step ❷ a의 값의 범위에 따라 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

(i) $a\le -4$ 또는 $a\ge 5$일 때

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 3이다.

(ii) $a=-3$ 또는 $a=4$일 때

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 2이다.

(iii) $a=-2$ 또는 $a=3$일 때

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 1이다.

(iv) $-1\le a\le 2$일 때

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x는 없다.

Step ❸ 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구한다.

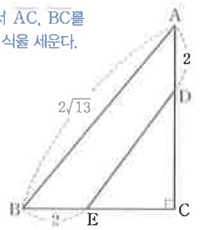
(i)~(iv)에 의하여 주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 1 또는 2가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은

$(-3)+4+(-2)+3=2$

6 연립방정식을 이용하여 도형 문제해결하기 — 정답 ①

그림과 같이 $\overline{AB}=2\sqrt{13}$, $\angle BCA=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC 위의 점 D와 변 BC 위의 점 E에 대하여 $\overline{AD}=\overline{BE}=2$이다. 삼각형 DEC의 넓이가 4일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $\overline{AC}>2$, $\overline{BC}>2$) [3점]

❶ 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$를 각각 b, a로 놓고 식을 세운다.



① 12 ② 11 ③ 10 ④ 9 ⑤ 8

Step ① 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$로 놓고 a, b의 관계식을 찾는다.

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$라 하자.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2\sqrt{13}$이므로

$a^2+b^2=52$ …… ㉠

직각삼각형 DEC에서 $\overline{AD}=\overline{BE}=2$이므로

$\overline{DC}=b-2$, $\overline{EC}=a-2$

삼각형 DEC의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times(a-2)\times(b-2)=4$

$(a-2)(b-2)=8$

$ab-2(a+b)=4$ …… ㉡

Step ② $a+b=X$, $ab=Y$로 놓고 연립방정식을 풀어 X, Y의 값을 구한다.

$a+b=X$, $ab=Y$라 하면

㉠에서

$(a+b)^2-2ab=52$

$X^2-2Y=52$ …… ㉢

㉡에서

$Y-2X=4$

$Y=2X+4$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$X^2-2(2X+4)=52$

$X^2-4X-60=0$

$(X+6)(X-10)=0$

$X=a+b>0$이므로 $X=10$

$X=10$을 ㉣에 대입하면

$Y=2X+4=24$

Step ③ 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}Y=\frac{1}{2}\times24=12$

다른 풀이

삼각형 DEC에서 $\overline{DC}=a$, $\overline{EC}=b$라 하면 삼각형 DEC의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times a\times b=4$, $ab=8$

또 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2\sqrt{13}$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$(a+2)^2+(b+2)^2=52$

$a^2+4a+4+b^2+4b+4=52$

$(a+b)^2-2ab+4(a+b)-44=0$

이때 $a+b=t$라 하면 $ab=8$이므로

$t^2+4t-60=0$

$(t+10)(t-6)=0$

$t>0$이므로 $t=a+b=6$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(a+2)\times(b+2)=\frac{1}{2}\times\{ab+2(a+b)+4\}$$
$$=\frac{1}{2}\times(8+2\times6+4)=12$$

IV 도형의 방정식

1 평면좌표

문제편 pp. 129 ~ 136

필수 기출

001 ⑤	002 ④	003 29	004 ⑤	005 ③	006 ③
007 ③	008 ⑤	009 ⑤	010 ④	011 ④	012 ①
013 16	014 ④	015 13			

플러스 기출

016 ⑤	017 116	018 18	019 ②	020 8	021 ③
022 200	023 ⑤	024 ⑤			

001 두 점 사이의 거리 구하기 정답 ⑤

좌표평면 위의 두 점 P(5, 7), Q(1, 3) 사이의 거리는? [2점] [정답률 94%]

❶ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{26}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $\sqrt{30}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

Step ① 두 점 사이의 거리를 구한다.

두 점의 좌표가 P(5, 7), Q(1, 3)이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(5-1)^2+(7-3)^2}=4\sqrt{2}$

실전솔루션

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

002 좌표평면 위의 선분의 내분점 구하기 정답 ④

좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(6, 6)에 대하여 [정답률 80%]

선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점의 x좌표는? [3점]

❶ 내분점 구하는 공식을 이용한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ① 내분점을 구하는 공식을 이용하여 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점의 x좌표를 구한다.

두 점 O(0, 0), A(6, 6)을 2 : 1로 내분하는 점의 x좌표는

$\frac{2\times6+1\times0}{2+1}=4$

003 두 점 사이의 거리 구하기 정답 29

좌표평면 위의 두 점 A(2, 0), B(0, 5)에 대하여 [정답률 81%]

선분 AB의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오. [3점] 29

❶ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

Step ❶ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

선분 AB의 길이는 두 점 A, B 사이의 거리이므로

$l=\sqrt{(0-2)^2+(5-0)^2}$

$=\sqrt{29}$

따라서 $l^2=29$

004 두 점 사이의 거리 구하기 정답 ⑤

좌표평면에서 두 점 $A(a, 3)$, $B(2, 1)$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ [정답률 87%]

❶ $\overline{AB}^2=13$임을 이용한다.

일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 양수 a의 값을 구한다.

두 점 $A(a, 3)$, $B(2, 1)$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\overline{AB}^2=(a-2)^2+(3-1)^2=13$

$a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=5$

005 선분의 중점 구하기 정답 ③

좌표평면 위의 두 점 $A(3, 4)$, $B(-3, 2)$에 대하여 [정답률 90%]

선분 AB의 중점의 y좌표는? [2점]

❶ 중점 구하는 공식을 이용한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 선분의 중점 구하는 공식을 이용한다.

두 점 $A(3, 4)$, $B(-3, 2)$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$이므로 $(0, 3)$이다.

따라서 중점의 y좌표는 3이다.

006 수직선 위의 선분의 내분점 구하기 정답 ③

수직선 위의 두 점 $A(1)$, $B(7)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 [정답률 83%]

❶ 내분점 구하는 공식을 이용한다.

내분하는 점을 $P(a)$라 할 때, a의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

Step ❶ 수직선 위의 선분의 내분점 구하는 공식을 이용하여 a의 값을 구한다.

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $P(a)$이므로

$a=\frac{1\times7+3\times1}{1+3}=\frac{5}{2}$

실전솔루션

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

❶ 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$

❷ 선분 AB를 $m:n$ $(m>0\ n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$

❸ 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

007 좌표평면 위의 선분의 내분점, 외분점 구하기 정답 ③

좌표평면 위의 두 점 $A(2, 0)$, $B(-1, 5)$에 대하여 선분 [정답률 64%]

AB를 $1:2$로 외분하는 점을 P라 할 때, 선분 OP를 $3:2$로 내분하는 점의

❶ 내분점 구하는 공식을 이용한다.

좌표는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $(2, -3)$ ② $(2, 2)$ ③ $(3, -3)$ ④ $(3, -2)$ ⑤ $(3, 2)$

Step ❶ 선분의 외분점 구하는 공식을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

두 점 $A(2, 0)$, $B(-1, 5)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점은

$\left(\frac{1\times(-1)-2\times2}{1-2}, \frac{1\times5-2\times0}{1-2}\right)=(5, -5)$

이므로 $P(5, -5)$

Step ❷ 선분의 내분점 구하는 공식을 이용한다.

선분 OP를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times5+2\times0}{3+2}, \frac{3\times(-5)+2\times0}{3+2}\right)=(3, -3)$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, -3)$

008 좌표평면 위의 선분의 외분점 구하기 정답 ⑤

좌표평면 위의 두 점 $A(0, 4)$, $B(2, 3)$에 대하여 선분 AB를 [정답률 83%]

$2:1$로 외분하는 점과 원점 사이의 거리는? [3점]

❶ 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 구한다.

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

Step ❶ 선분의 외분점 구하는 공식을 이용한다.

두 점 $A(0, 4)$, $B(2, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 C라 하면

$C\left(\frac{2\times2-1\times0}{2-1}, \frac{2\times3-1\times4}{2-1}\right)$

즉 $C(4, 2)$

Step ❷ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

따라서 원점 O와 점 C 사이의 거리는

$\overline{OC}=\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

009 좌표평면 위의 선분의 내분점 구하기 정답 ⑤

좌표평면에서 두 점 O(0, 0), A(8, 0)에 대하여 [정답률 80%]
선분 OA를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는? [3점]
❶ 내분점 구하는 공식을 이용한다.

① (2, 0) ② (3, 0) ③ (4, 0) ④ (5, 0) ⑤ (6, 0)

Step ❶ 선분 OA를 내분하는 점의 좌표를 구한다.

두 점 O(0, 0), A(8, 0)을 잇는 선분 OA를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times8+1\times0}{3+1}, \frac{3\times0+1\times0}{3+1}\right)$, 즉 (6, 0)

010 좌표평면 위의 선분의 내분점 구하기 정답 ④

두 점 A(a, 4), B(-9, 0)에 대하여 [정답률 84%]
선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, a의 값은? [3점]
❶ 선분 AB의 내분점의 x좌표가 0임을 이용한다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Step ❶ 선분 AB를 내분하는 점의 x좌표를 구한다.

선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점의 x좌표가 0이어야 하므로
└→ y축 위의 점의 x좌표는 0이다.

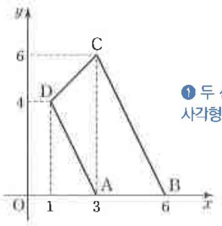
$\frac{4\times(-9)+3\times a}{4+3}=0$

$-36+3a=0$

따라서 $a=12$

011 선분의 내분점을 활용하여 문제해결하기 정답 ④

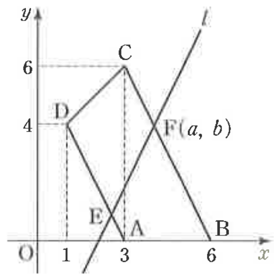
좌표평면 위의 네 점 A(3, 0), B(6, 0), C(3, 6), D(1, 4) [정답률 38%] 를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에서 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점을 지나는 직선 l이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다. 직선 l이 선분 BC와 만나는 점의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값은? [4점]



❶ 두 선분 AD, BC가 평행하므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

Step ❶ 사각형 ABCD가 사다리꼴임을 확인하고 사다리꼴의 넓이를 이등분하는 직선의 성질을 생각한다.



직선 AD의 기울기는 $\frac{4-0}{1-3}=-2$

직선 BC의 기울기는 $\frac{6-0}{3-6}=-2$

에서 두 직선 AD, BC는 평행이므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.
두 밑변의 길이가 각각 a, b이고 높이가 h인 사다리꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times(a+b)\times h$

직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분하려면 나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

Step ❷ 점 F를 선분 BC의 $m : n$ 내분점으로 놓고 m, n의 관계식을 구한다.

선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점을 E라 하고 점 E를 지나는 직선 l이 사다리꼴ABCD의 넓이를 이등분할 때, 선분 BC와 만나는 점 F에 대하여 점 F가 선분 BC를 $m : n$으로 내분한다고 하자.

$\overline{AD}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=3\sqrt{5}$이고

$\overline{AE}+\overline{BF}=\overline{DE}+\overline{CF}$이므로

$\frac{1}{4}\times2\sqrt{5}+\frac{m}{m+n}\times3\sqrt{5}=\frac{3}{4}\times2\sqrt{5}+\frac{n}{m+n}\times3\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}+\frac{3m}{m+n}=\frac{3}{2}+\frac{3n}{m+n}$

$\frac{3(m-n)}{m+n}=1$에서

$3m-3n=m+n$

$2m=4n$, $m=2n$

즉 $m : n=2 : 1$이므로 선분 CB를 2 : 1로 내분하는 점 F의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times6}{3}, \frac{2\times6+1\times0}{3}\right)=(4, 4)$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $a+b=8$

012 삼각형의 무게중심의 성질을 이해하여 문제해결하기 정답 ①

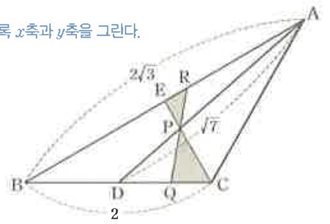
$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 D라 할 때, $\overline{AD}=\sqrt{7}$이다. 각 ACB의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 E, 선분 CE와 선분 AD가 만나는 점을 P, 각 APE의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 R, 선분 PR의 연장선이 선분 BC와 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PRE의 넓이를 S_1, 삼각형 PQC의 넓이를 S_2라 할 때, [정답률 28%]

❷ 각의 이등분선의 성질을 이용한다.

❸ 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

$\dfrac{S_2}{S_1}=a+b\sqrt{7}$이다. ab의 값은? (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

❶ 점 D가 원점이 되도록 x축과 y축을 그린다.



① -16 ② -14 ③ -12 ④ -10 ⑤ -8

Step ❶ 점 D를 좌표평면 위의 원점과 일치하도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓는다.

삼각형 ABC를 점 D가 좌표평면의 원점에 있고 두 점 B, C의 좌표가

B$(-1, 0)$, C$(1, 0)$

이 되도록 좌표평면 위에 놓는다.

Step ❷ $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$임을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.

점 A(a, b) $(a>0, b>0)$라 하면

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\{a-(-1)\}^2+b^2}=2\sqrt{3}$

따라서 $(a+1)^2+b^2=(2\sqrt{3})^2$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AD}=\sqrt{7}$이므로

$\overline{AD}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$

따라서 $a^2+b^2=(\sqrt{7})^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=\sqrt{3}$이므로

A$(2, \sqrt{3})$

Step ❸ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구하고, 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{CE}$의 길이를 구한다.

한편

$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2$

이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이므로

$\overline{AE}=\overline{BE}=\sqrt{3}$

직각삼각형 ACE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CE}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AE}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

Step ❹ 삼각형의 무게중심의 성질을 이용한다.

이때 점 P는 삼각형의 두 중선의 교점이므로 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

삼각형의 무게중심의 성질에 의하여

$\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$이므로 $\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$이므로 $\overline{CP}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{PE}=\dfrac{1}{3}$

Step ❺ 삼각형 EPA에서 각의 이등분선의 성질을 이용하여 두 변 $\overline{AR}$, $\overline{ER}$의 길이의 비를 구하고 삼각형 ABC의 넓이 S에 대하여 S_1의 식을 구한다.

삼각형 EPA에서 선분 PR가 $\angle$APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{PA}:\overline{PE}=\overline{AR}:\overline{ER}$

$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}:\dfrac{1}{3}=\overline{AR}:\overline{ER}$

즉 $\overline{AR}:\overline{ER}=2\sqrt{7}:1$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

삼각형 ECA의 넓이는 $\dfrac{1}{2}S$

삼각형 EPA의 넓이는 $\dfrac{1}{2}S\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}S$

이므로

$S_1=\dfrac{1}{6}S\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}+1}=\dfrac{1}{6(2\sqrt{7}+1)}S$

Step ❻ 삼각형 CPD에서 각의 이등분선의 성질을 이용하여 두 변 $\overline{CQ}$, $\overline{DQ}$의 길이의 비를 구하고 삼각형 ABC의 넓이 S에 대하여 S_2의 식을 구한다.

삼각형 CPD에서 선분 PQ가 $\angle$CPD의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PD}:\overline{PC}=\overline{DQ}:\overline{CQ}$

$\dfrac{\sqrt{7}}{3}:\dfrac{2}{3}=\overline{DQ}:\overline{CQ}$

즉 $\overline{DQ}:\overline{CQ}=\sqrt{7}:2$

삼각형 ACD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}S$

삼각형 CPD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}S\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}S$

이므로

$S_2=\dfrac{1}{6}S\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+2}$

$=\dfrac{1}{3(\sqrt{7}+2)}S$

따라서

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\dfrac{1}{3(\sqrt{7}+2)}S}{\dfrac{1}{6(2\sqrt{7}+1)}S}$$

$$=\frac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}$$

$$=\frac{2(2\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}$$

$$=\frac{2(12-3\sqrt{7})}{3}=8-2\sqrt{7}$$

$a=8$, $b=-2$이므로

$ab=-16$

다른 풀이

점 D가 선분 BC의 중점이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$

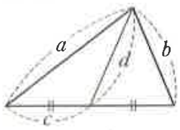
이 성립한다.

따라서 $\overline{AC}=2$이고 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

실전솔루션

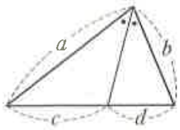
(1) 변의 이등분선이 주어질 때 : 중선정리

$a^2+b^2=2(c^2+d^2)$



(2) 각의 이등분선이 주어질 때 : 각의 이등분선의 정리

$a:b=c:d$



013 선분의 내분과 외분을 이용하여 문제해결하기 정답 16

삼각형 ABC에서 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 D, [정답률 18%]
선분 BC를 2 : 3으로 외분하는 점을 E, 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점을 F
❶ $\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$, $\overline{EB}=2\overline{BC}$, $\overline{BF}=2\overline{AB}$임을 이용한다.
라 하자. 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 k배이다.
❷ $\overline{BD}=t$로 놓고 ❶의 길이의 비를 이용하여 삼각형의 넓이의 비를 구한다.
이때, 상수 k의 값을 구하시오. [4점] 16

Step ❶ 주어진 조건을 이용하여 길이의 비를 구한다.

삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 1 : 3으로 내분하므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$ …… ㉠

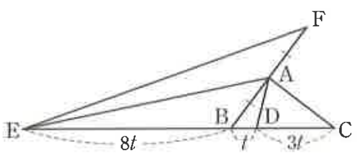
점 E는 선분 BC를 2 : 3으로 외분하므로

$\overline{EB}=2\overline{BC}$ …… ㉡

점 F는 선분 AB를 1 : 2로 외분하므로

$\overline{BF}=2\overline{AB}$ …… ㉢

Step ❷ ❶의 길이의 비를 이용하여 그림으로 나타낸다.



Step ❸ 높이가 같은 삼각형은 밑변의 길이의 비가 넓이의 비와 같음을 이용하여 k의 값을 구한다.

이때 $\overline{BD}=t$ (단, t는 실수)로 놓으면

㉠에서 $\overline{DC}=3t$, $\overline{BC}=4t$이고

㉡에서 $\overline{EB}=8t$이므로

$\triangle AEB=8\triangle ABD$

또 ㉢에서 $\overline{BF}=2\overline{AB}$이므로

$\triangle FEB=2\triangle AEB$

$\quad=16\triangle ABD$

따라서 $k=16$

014 선분의 외분점을 활용하여 문제해결하기 정답 ④

좌표평면 위의 두 점 A(2, 3), B(0, 4)에 대하여 선분 AB를 [정답률 56%]
$m:n(m>n>0)$으로 외분하는 점을 Q라 하자.
❶ 점 Q의 좌표를 m, n을 이용하여 표현하고 △OAQ를 좌표평면에 나타낸다.
삼각형 OAQ의 넓이가 16일 때, $\dfrac{n}{m}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]
❷ △OBQ=△OAQ−△OAB임을 이용하여 점 Q의 x좌표를 구한다.

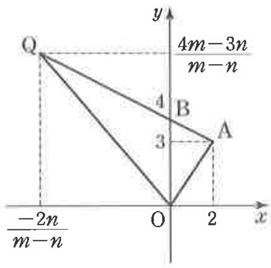
① $\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{5}{8}$ ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{7}{8}$

Step ❶ 삼각형 OAQ를 좌표평면에 나타낸다.

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{-2n}{m-n}, \dfrac{4m-3n}{m-n}\right)$

이므로 삼각형 OAQ를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



Step ❷ 삼각형 OAQ의 넓이를 이용하여 삼각형 OBQ의 높이를 구한다.

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$

이므로

$\triangle OBQ=\triangle OAQ-\triangle OAB$

$\quad=16-4=12$

따라서 삼각형 OBQ의 밑변을 선분 OB로 하면 $\overline{OB}=4$이므로 높이는 6이다.

Step ❸ $\dfrac{n}{m}$의 값을 구한다.

점 Q의 x좌표는 $\dfrac{-2n}{m-n}$이므로 $\left|\dfrac{-2n}{m-n}\right|=6$

이때 $m>n>0$이므로

$\dfrac{2n}{m-n}=6$

따라서 $4n=3m$이므로 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{3}{4}$

다른 풀이

삼각형 OAQ의 넓이가 16이고, 삼각형 OAB의 넓이는 4이므로 삼각형 OBQ의 넓이는 12이다.

삼각형 OAB와 삼각형 OBQ는 각각 선분 AB와 선분 BQ를 밑변으로 할 때 높이가 같으므로 두 삼각형의 밑변의 길이의 비는 두 삼각형의 넓이의 비와 같다.

즉 $\overline{AB}:\overline{BQ}=4:12=1:3$이므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=4:3=m:n$

따라서 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{3}{4}$

015 각의 이등분선과 선분의 내분점 활용하여 문제해결하기 정답 13

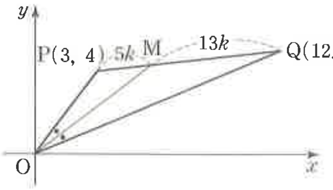
좌표평면 위의 두 점 $P(3,\ 4)$, $Q(12,\ 5)$에 대하여 [정답률 23%]
❶ $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$의 길이를 구한 후, 각의 이등분선의 성질을 이용한다.
$\angle POQ$의 이등분선과 선분 PQ와의 교점의 x좌표를 $\frac{b}{a}$라 할 때, $a+b$의 값
❷ 점 M이 선분 PQ의 내분점임을 안다.
을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, a와 b는 서로소인 자연수이다.) [4점] 13

Step ❶ $\angle POQ$의 이등분선과 선분 PQ와의 교점을 M으로 놓고 $\overline{PM}:\overline{MQ}$를 구한다.

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

$\angle POQ$의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PM}:\overline{MQ}=5:13$



Step ❷ 점 M이 $\overline{PQ}$의 내분점임을 이용하여 점 M의 좌표를 구한다.

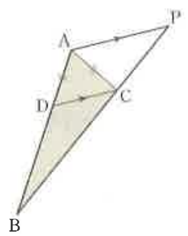
점 M은 선분 PQ를 $5:13$으로 내분하므로 점 M의 x좌표는

$\frac{b}{a}=\frac{5\times12+13\times3}{5+13}=\frac{11}{2}$

따라서 $a=2$, $b=11$이므로 $a+b=13$

016 선분의 외분점을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 ⑤

세 꼭짓점의 좌표가 $A(0,\ 3)$, $B(-5,\ -9)$, $C(4,\ 0)$인 [정답률 43%]
삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이
$\overline{AC}=\overline{AD}$가 되도록 점 D를 선분 AB 위에 잡는다.
❶ $\overline{AC}=\overline{AD}$, 평행선의 성질을 이용하여 $\overline{PB}:\overline{PC}$를 구한다.
점 A를 지나면서 선분 DC와 평행인 직선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점
❷ $\overline{PB}:\overline{PC}$에서 점 P가 $\overline{BC}$의 외분점임을 알고 점 P의 좌표를 구한다.
을 P라 하자.
이때, 점 P의 좌표는? [4점]



① $\left(\frac{61}{8},\ \frac{29}{8}\right)$ ② $\left(\frac{65}{8},\ \frac{33}{8}\right)$ ③ $\left(\frac{69}{8},\ \frac{37}{8}\right)$
④ $\left(\frac{73}{8},\ \frac{41}{8}\right)$ ⑤ $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

Step ❶ $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

$\overline{AC}=\sqrt{16+9}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{25+144}=13$

Step ❷ 평행선의 성질을 이용하여 $\overline{PB}:\overline{PC}$를 구한다.

선분 AP와 선분 DC가 평행하므로 평행선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

그런데 $\overline{AC}=\overline{AD}$이므로 $\overline{AD}=5$

따라서 $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AD}=13:5$

Step ❸ $\overline{PB}:\overline{PC}=13:5$임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

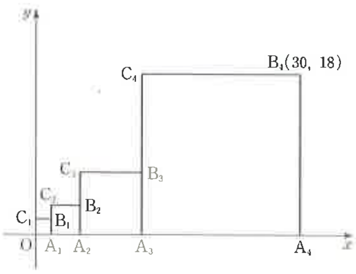
점 P는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{13\times4-5\times(-5)}{13-5},\ \frac{13\times0-5\times(-9)}{13-5}\right)$

즉 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

017 좌표평면 위의 도형 문제해결하기 정답 116

그림과 같이 x축 위의 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4에 대하여 $\overline{OA_1}$, [정답률 42%]
$\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$를 각각 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$,
$A_2A_3B_3C_3$, $A_3A_4B_4C_4$가 있다. 점 B_4의 좌표가 $(30,\ 18)$이고
❶ $\overline{B_4A_4}=\overline{A_3A_4}$임을 이용하여 점 A_3의 좌표를 구한다.
정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$일 때,
❷ $\overline{OA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2:3$임을 이용한다.
$\overline{B_1B_3}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 116



Step ❶ 정사각형 $A_3A_4B_4C_4$의 한 변의 길이를 이용하여 점 A_3의 좌표를 구한다.

정사각형 $A_3A_4B_4C_4$는 한 변의 길이가 18이므로

$\overline{A_3A_4}=18$

따라서 점 A_3의 좌표는 $(12,\ 0)$이다.

Step ❷ 정사각형의 한 변의 길이의 비를 이용하여 두 점 B_1과 B_3의 좌표를 구한다.

정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 정사각형의 한 변의 길이의 비는

$\overline{OA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=1:2:3$

$\overline{OA_3}=12$이므로

$\overline{OA_1}=12\times\frac{1}{6}=2$

$\overline{A_1A_2}=12\times\frac{1}{3}=4$

$\overline{A_2A_3}=12\times\frac{1}{2}=6$

$B_1(2,\ 2)$, $B_3(12,\ 6)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{B_1B_3}^2&=(12-2)^2+(6-2)^2\\&=100+16\\&=116\end{aligned}$$

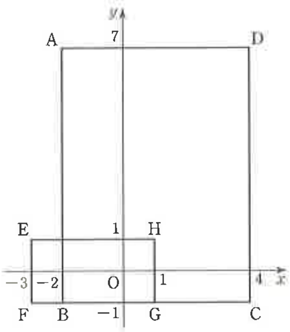
실전 솔루션

닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

018 선분의 중점을 활용하여 도형 문제해결하기 정답 18

그림과 같이 좌표평면 위에 모든 변이 x축 또는 y축에 평행한 두 직사각형 ABCD, EFGH가 있다. [정답률 43%]
기울기가 m인 한 직선이 두 직사각형 ABCD, EFGH의 넓이를 각각 이등분할 때, $12m$의 값을 구하시오. [4점] 18

❶ 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 그 직사각형의 넓이를 이등분함을 이용한다.



Step ❶ 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 지나는 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분함을 알고 대각선의 교점의 좌표를 구한다.

직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 그 직사각형의 넓이를 이등분한다.

직사각형 ABCD의 대각선의 교점은 선분 AC의 중점이므로

└→ A$(-2, 7)$, C$(4, -1)$이다.

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right)$

즉 $(1, 3)$ ⋯⋯ ㉠

Step ❷ 직사각형 EFGH의 대각선의 교점을 지나는 직선이 직사각형 EFGH의 넓이를 이등분함을 알고 대각선의 교점의 좌표를 구하여 두 교점을 지나는 직선의 기울기를 구한다.

직사각형 EFGH의 대각선의 교점은 선분 EG의 중점이므로

└→ E$(-3, 1)$, G$(1, -1)$이다.

$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right)$

즉 $(-1, 0)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 두 점을 지나는 직선의 기울기가 m이므로

$$m=\frac{3-0}{1-(-1)}=\frac{3}{2}$$

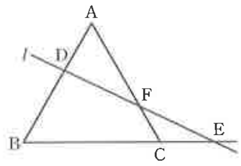
따라서 $12m=18$

해검단 TALK

직사각형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표와 직사각형 EFGH의 대각선 FH의 중점의 좌표를 구하여 m의 값을 구해도 결과는 같아.

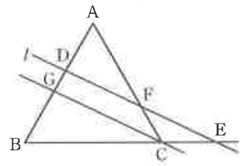
019 선분의 내분점, 외분점을 이용하여 선분의 길이의 비 추론하기 정답 ②

그림과 같이 △ABC에서 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $5:2$로 외분하는 점을 E라 하고, 두 점 D와 E를 지나는 직선 l과 선분 AC가 만나는 점을 F라 하자. [정답률 63%]



다음은 $\overline{AF}:\overline{FC}=m:n$일 때, mn의 값을 구하는 과정의 일부이다.
(단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

그림과 같이 점 C를 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 G라 하자.



△ADF와 △AGC는 서로 닮은 도형이므로

$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DG}}$ ⋯⋯ ㉠

△BCG와 △BED는 서로 닮은 도형이므로

$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DG}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡으로부터

$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}=\boxed{(가)}$ ⋯⋯ ㉢

❶ ㉠, ㉡을 ㉢의 식에 대입한 후 길이의 비를 이용한다.

한편, $\overline{AD}:\overline{BD}=2:3$, $\overline{BE}:\overline{EC}=5:2$, $\overline{AF}:\overline{FC}=m:n$이므로

㉢으로부터 $\frac{m}{n}=\boxed{(나)}$

따라서 $mn=\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+bc$의 값은? [4점]

① 17 ❷ 26 ③ 37 ④ 50 ⑤ 65

Step ❶ ㉠, ㉡을 ㉢의 식에 대입하여 a, b, c의 값을 구한다.

㉠과 ㉡으로부터

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DG}}\times\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}=\boxed{1} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

한편 $\overline{AD}:\overline{BD}=2:3$, $\overline{BE}:\overline{EC}=5:2$, $\overline{AF}:\overline{FC}=m:n$이므로

㉢으로부터

└→ $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{2}{3}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{5}{2}$, $\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}=\frac{n}{m}$이다.

$\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}\times\frac{n}{m}=1$에서 $\frac{m}{n}=\boxed{\frac{5}{3}}$

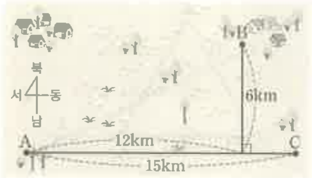
m, n은 서로소인 자연수이므로 $mn=\boxed{15}$

따라서 $a=1$, $b=\frac{5}{3}$, $c=15$이므로

$$a+bc=1+\frac{5}{3}\times15$$
$$=26$$

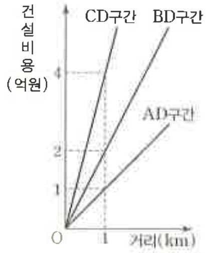
020 두 점 사이의 거리를 이용하여 실생활 문제해결하기 정답 8

그림과 같이 A, B, C 세 지점이 있다. B는 A로부터 동쪽으로 12 km만큼, 북쪽으로 6 km만큼 떨어진 곳에 있으며, C는 A로부터 동쪽으로 15 km만큼 떨어진 곳에 있다. [정답률 13%]



어떤 건설회사가 A, B, C 각 지점에서 어느 D지점까지 도로를 건설하려고 한다. 각 구간별 건설예정인 도로의 건설비용은 아래 그림과 같이 거리에 정비례 한다.

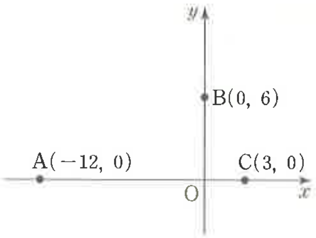
❶ 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 원점으로 하고 세 점 A, B, C의 좌표가 각각 $(-12, 0)$, $(0, 6)$, $(3, 0)$이 되도록 좌표평면을 설정한다.



A, B, C 각 지점에서 D지점까지의 각각의 도로 건설비용이 모두 같은 D지점은 두 곳이다. 이 두 지점 사이의 거리를 x(km)라 할 때, x의 값을 구하시오. (단, 네 지점 A, B, C, D는 동일 평면에 위치하며 모든 도로는 두 지점을 직선으로 연결한 평면상의 도로이다.) [4점] 8

❷ 총 건설비용이 같으려면 1 km당 건설비용이 클수록 D지점과 가까워야 한다.

Step ❶ 문제상황을 좌표평면 위로 옮겨서 생각한다.



두 지점 A, C를 지나는 직선을 x축으로 하고, 지점 B를 지나면서 x축에 수직인 직선을 y축이라 하면 각 지점 A, B, C의 좌표는

$A(-12, 0)$, $B(0, 6)$, $C(3, 0)$

D지점의 좌표를 $D(a, b)$라 하자.

Step ❷ A, B, C 각 지점에서 D지점까지의 1 km 당 도로의 건설비용의 비가 1 : 2 : 4이므로 도로의 건설비용이 같으려면 A, B, C 각 지점에서 D지점까지의 거리의 비는 4 : 2 : 1이어야 한다.

동일 평면 위의 A, B, C 각 지점에서 D지점까지의 1 km당 도로의 건설비용은 차례대로 1억원, 2억원, 4억원이고 각각의 직선 도로 건설비용이 모두 같다고 하였으므로

$\overline{AD} : \overline{BD} : \overline{CD} = 4 : 2 : 1$

이어야 한다.

Step ❸ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

(i) $\overline{AD} : \overline{BD} = 4 : 2 = 2 : 1$에서 $2\overline{BD} = \overline{AD}$

$4\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$

$4\{a^2+(b-6)^2\} = (a+12)^2+b^2$

$a^2-8a+b^2-16b=0$ …… ㉠

(ii) $\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 1$에서 $2\overline{CD} = \overline{BD}$

$4\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2$

$4\{(a-3)^2+b^2\} = a^2+(b-6)^2$

$a^2-8a+b^2+4b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=0$ 또는 $a=8$, $b=0$이다.

그러므로 두 지점의 좌표는 $(0, 0)$, $(8, 0)$이다.

따라서 두 지점 사이의 거리는 8 km이므로 $x=8$

021 선분의 내분점과 외분점을 이용하여 추론하기 정답 ③

수직선 위의 서로 다른 세 점 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$에 대하여 선분 AC를 $m : n$으로 내분하는 점 $P(p)$가 선분 BC를 $m : n$으로 외분하는 점이 될 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [정답률 40%]

(단, $m \neq n$, $m>0$, $n>0$) [4점]

❶ 선분 AC를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표와 선분 BC를 $m : n$으로 외분하는 점의 좌표가 같음을 이용한다.

〈보기〉

ㄱ. $a=1$, $b=5$, $m=1$, $n=2$이면 $c=7$이다.

ㄴ. $m>n$이면 $a<p<b<c$이다.

ㄷ. $p=\dfrac{a+b}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ❸ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점 구하는 공식을 이용하여 점 P의 좌표를 m, n에 대한 식으로 나타내고 〈보기〉의 참, 거짓을 판별한다.

선분 AC를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$p=\dfrac{mc+na}{m+n}$ …… ㉠

선분 BC를 $m : n$으로 외분하는 점 P의 좌표는

$p=\dfrac{mc-nb}{m-n}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{mc+na}{m+n}=\dfrac{mc-nb}{m-n}$ …… ㉢

ㄱ. $a=1$, $b=5$, $m=1$, $n=2$를 ㉢에 대입하면

$\dfrac{c+2}{3}=\dfrac{c-10}{-1}$에서 $c=7$ (참)

ㄴ. $a=0$, $c=3$, $m=2$, $n=1$을 ㉢에 대입하면

$\dfrac{6+0}{3}=\dfrac{6-b}{1}$에서 $p=2$, $b=4$가 되어 $a<p<c<b$이다. (거짓)

ㄷ. ㉠의 양변에 $m+n$을 곱하면

$(m+n)p=mc+na$ …… ㉣

㉡의 양변에 $m-n$을 곱하면

$(m-n)p=mc-nb$ …… ㉤

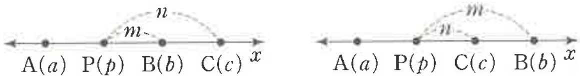
㉣−㉤을 하면

$2np=(a+b)n$, $p=\dfrac{a+b}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. 점 P는 선분 AC의 내분점이므로 두 점 A, C 사이에 위치한다. 또한 점 P는 선분 BC의 $m:n$ 외분점이므로 네 점 A, P, B, C의 위치는 다음의 두 가지 경우 중 하나이다.



이때 $m>n$이면 $a<p<c<b$이다. (거짓)

022 선분의 내분점과 외분점 이해하기 　　정답 200

좌표평면 위의 점 A, B, C, D, E가 한 직선 위에 있고, 다음 조건을 만족한다. [정답률 45%]

② 세 점 A, C, E가 ①에서 구한 직선 위의 점임을 이용한다.

- B의 좌표는 $(-1, 3)$이고, D의 좌표는 $(3, -1)$이다.
  ① 두 점 B, D를 지나는 직선의 방정식을 구한다.
- B는 선분 AC의 중점이다.
- C는 선분 AD를 $2:1$로 내분한다.
- E는 선분 CD를 $3:2$로 외분한다.

③ 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점 구하는 공식을 이용한다.

이때, $\overline{AE}^2$의 값을 구하시오. [4점] 　　200

Step ① 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$임을 이용한다.

두 점 $B(-1, 3)$, $D(3, -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=-x+2$

Step ② 세 점 A, C, E의 x좌표를 각각 a, c, e라 하고 ①에서 구한 직선의 방정식을 이용하여 세 점의 y좌표를 구한다.

점 A, B, C, D, E가 한 직선 위에 있으므로 $A(a, -a+2)$, $C(c, -c+2)$, $E(e, -e+2)$라 하자.

Step ③ 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점 구하는 공식을 이용한다.

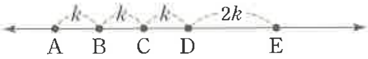
B는 선분 AC의 중점이고 C는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점이므로 C는 선분 BD의 중점이다.
따라서 $C(1, 1)$
B는 선분 AC의 중점이므로 $\dfrac{a+1}{2}=-1$, $a=-3$
따라서 $A(-3, 5)$
E는 선분 CD를 $3:2$로 외분하는 점이므로
$e=\dfrac{3\times3-2\times1}{3-2}=7$
따라서 $E(7, -5)$이므로
$\overline{AE}^2=\{7-(-3)\}^2+(-5-5)^2=200$

다른 풀이

점 B는 선분 AC의 중점이므로 $\overline{AB}=k$라 하면 $\overline{BC}=k$이다.

점 C는 선분 AD를 $2:1$로 내분하고 $\overline{AC}=2k$이므로 $\overline{CD}=k$이다.

점 E는 선분 CD를 $3:2$로 외분하고 $\overline{CD}=k$이므로 $\overline{DE}=2k$이다.

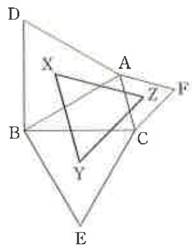


$B(-1, 3)$, $D(3, -1)$이므로
$\overline{BD}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-1-3)^2}$
$=4\sqrt{2}=2k$
따라서 $k=2\sqrt{2}$이므로
$\overline{AE}^2=(5k)^2$
$=(5\times2\sqrt{2})^2=200$

023 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 문제해결하기 　　정답 ⑤

다음은 나폴레옹 삼각형에 대한 설명이다. [정답률 33%]

임의의 삼각형 ABC에 대하여 변 AB, BC, CA를 한 변으로 하는 세 개의 정삼각형 ADB, BEC, CFA를 삼각형 ABC의 외부에 그린다.
세 정삼각형 ADB, BEC, CFA의 무게중심을 각각 X, Y, Z라 하면 삼각형 XYZ는 정삼각형이 되고 이 삼각형을 '나폴레옹 삼각형'이라 한다.
(단, 모든 점은 같은 평면 위에 있다.)

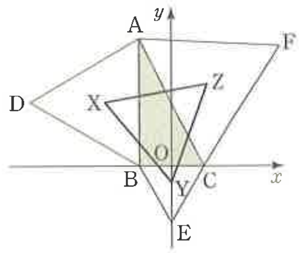


좌표평면 위의 점 $A(-1, 2\sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 얻어지는 나폴레옹 삼각형 XYZ의 넓이는? [4점]

① 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 그린다.

① $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ 　② $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 　③ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ 　④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$ 　⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

Step ① 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 그리면 직선 AB가 y축과 평행하므로 점 D의 좌표를 구할 수 있다. 또한 직선 BC가 x축에 평행하므로 점 E의 좌표를 구할 수 있다.



정삼각형 ADB에서 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로 $D(-4, \sqrt{3})$

Step ② 삼각형의 무게중심 구하는 공식을 이용하여 두 점 X, Y의 좌표를 구한다.

정삼각형 BEC에서 $\overline{BC}=2$이므로 $E(0, -\sqrt{3})$
점 X가 △ADB의 무게중심이므로
$X(-2, \sqrt{3}) \rightarrow \left(\dfrac{-1-4-1}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}+0}{3}\right)$
점 Y가 △BEC의 무게중심이므로
$Y\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \left(\dfrac{-1+0+1}{3}, \dfrac{0-\sqrt{3}+0}{3}\right)$

Step ❸ 정삼각형의 한 변의 길이가 a일 때 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 임을 이용한다.

정삼각형 XYZ의 한 변의 길이는

$$\overline{XY}=\sqrt{2^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{28}{3}}$$

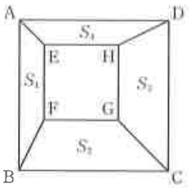
따라서 구하는 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{28}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

해검단 TALK 정삼각형의 높이와 넓이

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$임을 기억하자.

1024 평면좌표를 이용하여 도형의 길이와 넓이 추론하기 정답 ⑤

그림은 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH를 $\overline{AB}$와 $\overline{EF}$가 평행하도록 그린 것이다. 네 사다리꼴 ABFE, BCGF, CDHG, DAEH의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. [정답률 68%]



❶ 정사각형 ABCD를 점 B를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓는다.

〈보기〉에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\overline{BF}^2+\overline{DH}^2$

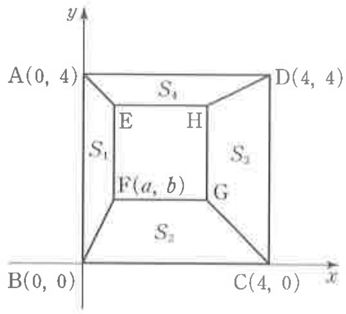
❷ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

ㄴ. $\overline{AE}=\overline{BF}$이면 $\overline{CG}=\overline{DH}$이다.

ㄷ. $S_1+S_3=S_2+S_4$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 설정하고 점 F의 좌표를 F(a, b)라 하자.



정사각형 ABCD를 점 B를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면

A(0, 4), C(4, 0), D(4, 4)

점 F의 좌표를 (a, b)라 하면 (단, $0<a<2$, $0<b<2$)

E$(a, b+2)$, G$(a+2, b)$, H$(a+2, b+2)$

Step ❷ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

ㄱ. $\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\{a^2+(b-2)^2\}+\{(a-2)^2+b^2\}$

$\overline{BF}^2+\overline{DH}^2=(a^2+b^2)+\{(a-2)^2+(b-2)^2\}$

따라서 $\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\overline{BF}^2+\overline{DH}^2$ (참)

ㄴ. $\overline{AE}=\overline{BF}$에서 $\overline{AE}^2=\overline{BF}^2$이므로

$\overline{CG}^2=\overline{DH}^2$ (ㄱ에 의하여)

따라서 $\overline{CG}=\overline{DH}$ (참)

Step ❸ 사다리꼴의 윗변의 길이가 a, 밑변의 길이가 b, 높이가 h일 때 넓이는 $\frac{1}{2}\times(a+b)\times h$임을 이용한다.

ㄷ. $S_1+S_3=\frac{1}{2}\times(4+2)\times\{a+(2-a)\}=6$

$S_2+S_4=\frac{1}{2}\times(4+2)\times\{b+(2-b)\}=6$

따라서 $S_1+S_3=S_2+S_4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

해검단 TALK

(사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$ {(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)} × (높이)에서

사다리꼴 CDHG, DAEH의 높이는 각각 $4-(a+2)=2-a$

$4-(b+2)=2-b$야.

J 직선의 방정식

문제편 pp. 137 ~ 151

필수 기출

001 ④	002 ④	003 3	004 ②	005 ④	006 ⑤
007 ⑤	008 6	009 ②	010 ③	011 ②	012 ④
013 ④	014 ②	015 ④	016 ⑤	017 ⑤	018 ③
019 150	020 ③	021 ⑤	022 ③	023 ①	024 ②
025 ①	026 ⑤	027 15			

플러스 기출

028 ⑤	029 ①	030 8	031 9	032 ②	033 15
034 ①	035 28	036 ③			

J001 두 점을 지나는 직선의 방정식 이해하기 　정답 ④

좌표평면 위의 두 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$를 지나는 직선이 [정답률 83%]
❶ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.
y축과 점 $(0, 5)$에서 만날 때, 상수 a의 값은? [3점]
❷ ❶에서 구한 직선의 방정식에 $x=0$, $y=5$를 대입한다.

① 5　② 7　③ 9　❹ 11　⑤ 13

Step ❶ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{a-2}{2+1}(x+1)$

즉 $y=\dfrac{a-2}{3}x+\dfrac{a+4}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

Step ❷ 직선의 방정식에 $(0, 5)$를 대입하여 a의 값을 구한다.

y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 5)$이므로 ㉠의 식에 $x=0$, $y=5$를 대입하면

$5=\dfrac{a-2}{3}\times 0+\dfrac{a+4}{3}$

$5=\dfrac{a+4}{3}$

따라서 $a=11$

J002 두 점을 지나는 직선의 y절편 이해하기 　정답 ④

좌표평면에서 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$이 만나는 [정답률 81%]
❶ 두 직선이 만나는 점을 구한 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.
점과 점 $(4, 0)$을 지나는 직선의 y절편은? [3점]

① $\dfrac{5}{2}$　② 3　③ $\dfrac{7}{2}$　❹ 4　⑤ $\dfrac{9}{2}$

Step ❶ 두 직선이 만나는 점을 구한다.

$x-2y+2=0$에서

$x-2y=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2x+y-6=0$에서

$2x+y=6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면

$5x=10$에서 $x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(2, 2)$이다.

Step ❷ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 $(2, 2)$, $(4, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{0-2}{4-2}=-1$

이므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-4)$

즉 $y=-x+4$

따라서 y절편은 4이다.

다른 풀이

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$이 만나는 점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$4+2+k(8-6)=0$

$k=-3$

구하는 직선의 방정식은 $x+y-4=0$이므로 y절편은 4이다.

J003 직선의 방정식 이해하기 　정답 3

좌표평면에서 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$를 지나는 직선이 [정답률 86%]
점 $(a, 7)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]　3
❶ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여 점 $(a, 7)$의 좌표를 대입한다.

Step ❶ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은 기울기가

$\dfrac{5-(-3)}{2-(-2)}=2$이므로

$y-5=2(x-2)$

$y=2x+1$

Step ❷ ❶의 직선이 점 $(a, 7)$을 지남을 이용한다.

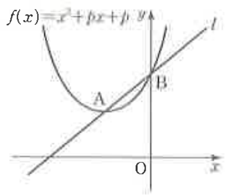
이 직선이 점 $(a, 7)$을 지나므로 $7=2a+1$

따라서 $a=3$

J004 직선의 방정식 이해하기 정답 ②

0이 아닌 실수 p에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+px+p$의 [정답률 57%]
그래프의 꼭짓점을 A, 이 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l의 x절편은? [3점]

❶ $f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$임을 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.



① $-\frac{5}{2}$ ❷ -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

Step ❶ 이차함수의 식을 변형하여 점 A, 점 B의 좌표를 구한다.

이차함수

$$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$$

이므로

함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 $\mathrm{A}\left(-\frac{p}{2},\ p-\frac{p^2}{4}\right)$이고, y축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0,\ p)$이다.

Step ❷ 두 점 A, B를 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기는

$$\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}=\frac{p}{2}$$이고 y절편은 p이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{p}{2}x+p$

따라서 $0=\frac{p}{2}x+p$에서 $x=-2$이므로 x절편은 -2이다.

J005 직선의 기울기를 이용하여 문제해결하기 정답 ④

좌표평면에서 원점 O를 지나고 꼭짓점이 A$(2,\ -4)$인 [정답률 70%]
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 B라 하자. 직선 $y=mx$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하도록 하는 실수 m의 값은? [4점]

❶ 점 B의 좌표를 구한 다음 직선 $y=mx$가 선분 AB의 중점을 지남을 이용한다.

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ❹ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

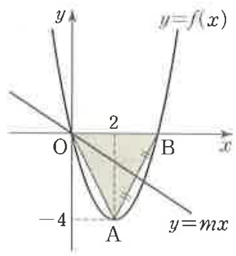
Step ❶ 점 B의 좌표를 구한다.

점 B의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면 점 A$(2,\ -4)$는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이므로

$2=\frac{0+\alpha}{2}$, 즉 $\alpha=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(4,\ 0)$

Step ❷ 직선 $y=mx$가 선분 AB의 중점을 지남을 이용한다.



직선 $y=mx$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-4+0}{2}\right)$$

즉 $(3,\ -2)$이므로 $y=mx$에 대입하면

$-2=3m$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$

J006 정점을 지나는 직선의 방정식 추론하기 정답 ⑤

이차함수 $f(x)=k(x-1)^2-4k+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 [정답률 40%]
꼭짓점을 A라 하고, 이 곡선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $k=1$일 때, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$이다.
❶ $k=1$일 때 이차함수 $f(x)=(x-1)^2-2$임을 이용한다.

ㄴ. 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 곡선 $y=f(x)$가 항상 지나는 점은 2개이다. ❷ $k\{(x-1)^2-4\}+2-y=0\ (k\neq0)$이 항등식임을 이용한다.

ㄷ. 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 직선 AB는 항상 점 $(-3,\ 2)$를 지난다. ❸ 직선 AB의 방정식을 구한 후 항등식의 성질을 이용한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ❺ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ $k=1$일 때 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

ㄱ. $k=1$일 때 $f(x)=(x-1)^2-2$이므로 A$(1,\ -2)$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ (참)

Step ❷ 함수 $f(x)$를 k에 대하여 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

ㄴ. $y=k(x-1)^2-4k+2$를 k에 대하여 정리하면

$k\{(x-1)^2-4\}+2-y=0$ …… ㉠

㉠이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$(x-1)^2=4$, $2-y=0$이어야 하므로

$x=3$, $y=2$ 또는 $x=-1$, $y=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 점 $(3,\ 2)$, $(-1,\ 2)$를 지난다. (참)

Step ❸ 점 A와 점 B의 좌표를 구한 후 직선 AB의 방정식을 구한다.

ㄷ. A$(1,\ -4k+2)$, B$(0,\ -3k+2)$이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{(-4k+2)-(-3k+2)}{1-0}=-k$$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=-kx-3k+2$

이 등식을 k에 대하여 정리하면

$k(x+3)+y-2=0$ …… ㉡

㉡이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

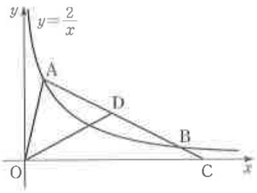
$x+3=0$, $y-2=0$이어야 하므로 $x=-3$, $y=2$

따라서 직선 AB는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 2)$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

J007 직선의 방정식 추론하기 정답 ⑤

그림과 같이 제1사분면에 있는 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위의 서로 다른 [정답률 39%]
두 점 $A\left(a, \frac{2}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{2}{b}\right)$에 대하여 직선 AB가 x축과 만나는 점을 C, 선분 AB의 중점을 D라 하자.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $a<b$이고, O는 원점이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. 점 C의 x좌표는 $a+b$이다. ❶ 직선 AB의 방정식을 구한다.
ㄴ. 두 직선 AB와 OD의 기울기의 합은 0이다.
❷ 점 D는 선분 AB의 중점임을 이용한다.
ㄷ. $\overline{AB}=2\overline{OA}$일 때, $\angle AOC=\frac{3}{2}\angle AOD$이다.
❸ $\overline{AO}=\overline{AD}$이므로 $\angle AOD=\angle ADO$임을 이용한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ❺ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 직선 AB의 방정식을 구한 후 $y=0$을 대입하여 x의 값을 구한다.

ㄱ. 직선 AB의 방정식은

$$y-\frac{2}{a}=\frac{\frac{2}{b}-\frac{2}{a}}{b-a}(x-a)$$

$$y=-\frac{2}{ab}(x-a)+\frac{2}{a}$$

$y=0$을 대입하면

$$0=-\frac{2}{ab}(x-a)+\frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{ab}(x-a)=\frac{2}{a}$$

$x-a=b$, $x=a+b$

따라서 점 C의 x좌표는 $a+b$이다. (참)

Step ❷ 점 D의 좌표와 직선 OD의 기울기를 구한다.

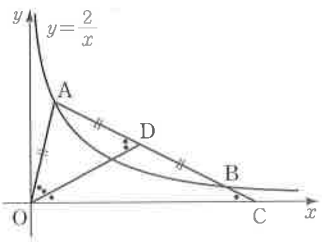
ㄴ. 점 D는 선분 AB의 중점이므로 $D\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{ab}\right)$

직선 OD의 기울기는 $\dfrac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{ab}$

따라서 두 직선 AB와 OD의 기울기의 합은

$-\frac{2}{ab}+\frac{2}{ab}=0$ (참)

Step ❸ $\overline{AB}=2\overline{OA}$와 ㄴ을 이용한다.



ㄷ. $\overline{AB}=2\overline{OA}$에서 $\overline{AO}=\overline{AD}$이므로

$\angle AOD=\angle ADO$

ㄴ에서 두 직선 AB와 OD의 기울기의 합은 0이므로

$\angle DOC=\angle DCO$

$\angle ADO=\angle DOC+\angle DCO$이므로

$\angle ADO=2\angle DOC$

따라서

$$\begin{aligned}\angle AOC&=\angle AOD+\angle DOC\\&=\angle AOD+\frac{1}{2}\angle AOD\\&=\frac{3}{2}\angle AOD\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

J008 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 6

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$에 대하여 복소수 z를 [정답률 48%]

$z=(x+y-2)+(4x+y-8)i$

라 하자. z^2이 실수가 되도록 하는 점 P가 나타내는 도형과 y축으로 둘러싸인
❶ z^2이 실수이려면 $x+y-2=0$ 또는 $4x+y-8=0$임을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.
부분의 넓이를 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점] 6

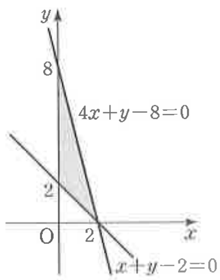
Step ❶ z^2이 실수가 되는 조건을 이용하여 점 P가 나타내는 도형을 구한다.

z^2이 실수이려면 z는 실수이거나 순허수이어야 하므로

$z=(x+y-2)+(4x+y-8)i$에서

$x+y-2=0$ 또는 $4x+y-8=0$

Step ❷ 점 P가 나타내는 도형과 y축으로 둘러싸인 부분을 좌표평면 위에 나타낸다.



따라서 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형은 그림과 같이 두 직선 $x+y-2=0$, $4x+y-8=0$이고, 이 두 직선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$$

실전솔루션

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$

따라서 z^2이 실수이려면 $2ab=0$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$

J009 두 직선의 수직 조건 이해하기

정답 ②

두 직선 $x+y+2=0$, $(a+2)x-3y+1=0$이 서로 수직일 [정답률 87%]
❶ 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.
때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Step ❶ 두 직선의 수직 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

직선 $x+y+2=0$에서 $y=-x-2$이므로

직선 $x+y+2=0$의 기울기는 -1이고,

직선 $(a+2)x-3y+1=0$에서 $y=\frac{a+2}{3}x+\frac{1}{3}$이므로

직선 $(a+2)x-3y+1=0$의 기울기는 $\frac{a+2}{3}$이다.

두 직선 $x+y+2=0$, $(a+2)x-3y+1=0$이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 $(-1)\times\frac{a+2}{3}=-1$

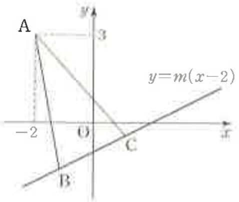
$\frac{a+2}{3}=1$, $a+2=3$

따라서 $a=1$

J010 두 직선의 평행과 수직 이해하기

정답 ③

그림과 같이 좌표평면에서 점 $A(-2, 3)$과 직선 [정답률 53%]
$y=m(x-2)$ 위의 서로 다른 두 점 B, C가 $\overline{AB}=\overline{AC}$를 만족시킨다. 선분 BC의 중점이 y축 위에 있을 때, 양수 m의 값은? [3점]
❶ 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$임을 이용한다.



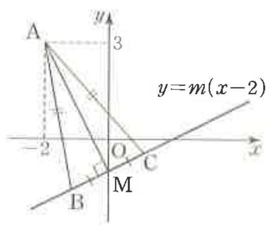
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

Step ❶ 선분 BC의 중점을 M이라 하면 두 선분 AM, BC는 서로 수직임을 이용하여 양수 m의 값을 구한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하자.

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고 밑변 BC의 중점이 M이므로 두 선분 AM, BC는 서로 수직이다.

점 M은 직선 $y=m(x-2)$와 y축이 만나는 점이므로 $M(0, -2m)$이다.



두 점 $A(-2, 3)$, $M(0, -2m)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-2m-3}{0-(-2)}=\frac{-2m-3}{2}$

이고 직선 BC의 기울기는 m이므로

$m\times\frac{-2m-3}{2}=-1$

$2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

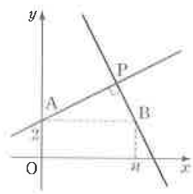
$m>0$이므로

$m=\frac{1}{2}$

J011 두 직선의 수직 조건을 이용한 삼각형의 무게중심 구하기

정답 ②

자연수 n에 대하여 좌표평면에서 점 $A(0, 2)$를 지나는 직선 [정답률 73%]
과 점 $B(n, 2)$를 지나는 직선이 서로 수직으로 만나는 점을 P라 하자. 점 P
❶ 직선 AP와 BP의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.
의 좌표가 $(4, 4)$일 때, 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표를 (a, b)라 하자.
❷ △ABP의 무게중심의 좌표를 구한다.
$a+b$의 값은? [3점]



① 5 ② $\frac{17}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$ ④ 7 ⑤ $\frac{23}{3}$

Step ❶ 두 직선의 수직 조건을 이용하여 n의 값을 구한다.

직선 AP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-0}=\frac{1}{2}$

직선 BP의 기울기는 $\frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$

직선 AP와 직선 BP가 서로 수직이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{4-n}=-1$에서 $n=5$

Step ❷ 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표를 구한다.

세 점 $A(0, 2)$, $B(5, 2)$, $P(4, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

따라서 $a=3$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$a+b=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

J012 두 직선의 수직 조건 이해하기

정답 ④

좌표평면 위의 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 [정답률 77%]
❶ 두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 구한다.
지나고 직선 $x-3y+6=0$에 수직인 직선의 y절편은? [3점]
❷ 직선 $x-3y+6=0$에 수직이므로 기울기는 -3임을 이용한다.

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

Step ❶ 두 직선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

$x-2y+2=0$에서 $x-2y=-2$ …… ㉠

$2x+y-6=0$에서 $2x+y=6$ …… ㉡

㉠$+2\times$㉡을 하면

$5x=10$에서 $x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

Step ❷ 수직인 직선의 기울기를 구하여 점 $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구한다.

직선 $x-3y+6=0$은 $y=\frac{1}{3}x+2$이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$이다.

그러므로 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

Step ❸ 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식을 이용한다.

따라서 기울기가 -3이고 점 $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-3(x-2)$, 즉 $y=-3x+8$이므로 y절편은 8이다.

다른 풀이

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (단, k는 실수)

즉 $(1+2k)x+(-2+k)y+2-6k=0$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 $x-3y+6=0$이 수직이므로

$(1+2k)-3(-2+k)=0$에서 $k=7$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $3x+y-8=0$이므로 y절편은 8이다.

실전솔루션

두 직선이 수직일 조건

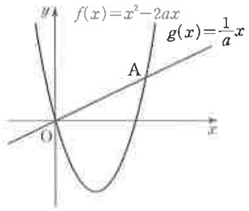
❶ 두 직선 $\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases}$이 수직이면 $mm'=-1$

❷ 두 직선 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$이 수직이면 $aa'+bb'=0$

J013 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

정답 ④

그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 [정답률 75%]
그래프와 직선 $g(x)=\frac{1}{a}x$가 두 점 O, A에서 만난다. $a=2$일 때,
직선 l은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하고 직선 $y=g(x)$와 수직이다.
❶ 직선 l과 직선 $y=g(x)$가 수직임을 이용하여 기울기를 구하고 $y=f(x)$와 연립하여 $D=0$임을 이용한다.
직선 l의 y절편은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

Step ❶ 직선 l이 직선 $y=g(x)$와 수직임을 이용하여 기울기를 구한다.

$a=2$일 때, $g(x)=\frac{1}{2}x$, $f(x)=x^2-4x$

직선 l의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면

직선 $g(x)=\frac{1}{2}x$와 수직이므로

$\frac{1}{2}\times m=-1$에서 $m=-2$

Step ❷ 직선 l이 $f(x)$의 그래프와 접함을 이용하여 y절편을 구한다.

직선 $l:y=-2x+n$이 이차함수 $f(x)=x^2-4x$의 그래프와 접하려면 이차방정식 $x^2-4x=-2x+n$, 즉 $x^2-2x-n=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-n)=1+n=0$

따라서 직선 l의 y절편은 $n=-1$

J014 두 직선의 수직 조건 이해하기

정답 ②

점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선과 [정답률 62%]
직선 $(3k+2)x-y+2=0$이 y축에서 수직으로 만날 때, 상수 k의 값은? [3점]
❶ 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{3k+2}$이고 y절편이 2임을 이용한다.

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

Step ❶ 기울기와 y절편을 이용하여 주어진 직선과 수직으로 만나는 직선의 방정식을 구한다.

직선 $(3k+2)x-y+2=0$의 기울기가 $3k+2$, y절편이 2이므로

직선 $(3k+2)x-y+2=0$과 y축에서 수직으로 만나는 직선은

$y=-\frac{1}{3k+2}x+2$ …… ㉠

Step ❷ ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지남을 이용하여 상수 k의 값을 구한다.

직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$-\frac{1}{3k+2}+2=0$$

따라서 $k=-\frac{1}{2}$

실전 솔루션

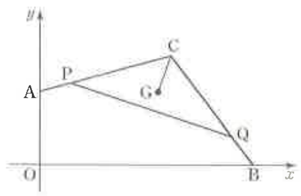
두 직선의 위치 관계

❶ 두 직선이 평행할 조건 ⇨ 두 직선의 기울기가 같고 y절편이 다르다.
❷ 두 직선이 일치할 조건 ⇨ 두 직선의 기울기와 y절편이 각각 같다.
❸ 두 직선이 수직일 조건 ⇨ (두 직선의 기울기의 곱)$=-1$
❹ 두 직선이 한 점에서 만날 조건 ⇨ 두 직선의 기울기가 다르다.

J015 두 직선의 수직을 이용하여 문제해결하기 정답 ④

그림과 같이 좌표평면에서 두 점 A$(0, 6)$, B$(18, 0)$과 [정답률 57%] 제1사분면 위의 점 C(a, b)가 $\overline{AC}=\overline{BC}$를 만족시킨다. 두 선분 AC, BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 CPQ의 무게중심을 G라 하자. 선분 CG의 길이가 $\sqrt{10}$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

❶ 삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 선분 AB와 직선 CG는 서로 수직임을 이용한다.
❷ 평행선의 성질을 이용하여 MN : NC를 구한다.
❸ 삼각형의 무게중심의 성질을 이용한다.



① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

Step ❶ 수직선 위의 선분의 중점을 구하는 공식을 이용하여 선분 AB의 중점의 좌표를 구한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{0+18}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$, 즉 M$(9, 3)$

Step ❷ 두 직선이 수직임을 이용하여 직선 CM의 직선의 방정식을 구한다.

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 $\overline{AB}\perp\overline{CM}$

따라서 두 직선 AB, CM의 기울기의 곱은 -1이다.

이때 직선 AB의 기울기가

$\frac{0-6}{18-0}=-\frac{1}{3}$

이므로 직선 CM의 기울기는 3이다.

직선 CM이 점 M$(9, 3)$을 지나므로 그 방정식은

$y=3(x-9)+3$, 즉 $y=3x-24$

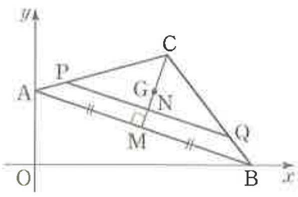
이때 점 C(a, b)는 직선 $y=3x-24$ 위의 점이므로

$b=3a-24$ ······ ㉠

Step ❸ 삼각형의 무게중심의 성질을 이용한다.

두 선분 CM, PQ의 교점을 N이라 하자.

점 G는 삼각형 CPQ의 무게중심이므로



$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CN}$

$\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AB}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\overline{MN}:\overline{NC}=\overline{AP}:\overline{PC}=1:3$

즉 $\overline{CN}=\frac{3}{4}\overline{CM}$이므로

$\overline{CG}=\frac{2}{3}\times\overline{CN}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\overline{CM}=\frac{1}{2}\times\overline{CM}$

$\overline{CM}=2\overline{CG}=2\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(a-9)^2+(b-3)^2}=2\sqrt{10}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(a-9)^2+(3a-24-3)^2=40$, $(a-9)^2=4$

$a=7$ 또는 $a=11$

따라서 점 (a, b)는 $(7, -3)$ 또는 $(11, 9)$

점 C는 제1사분면 위의 점이므로 C$(11, 9)$

$a+b=11+9=20$

J016 두 직선이 수직일 조건을 이용하여 추론하기 정답 ⑤

좌표평면에서 점 A$(0, 1)$과 x축 위의 점 P$(t, 0)$에 대하여 [정답률 41%] 점 P를 지나고 직선 AP에 수직인 직선을 l이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, t는 0이 아닌 실수이다.) [4점]

❶ 직선 AP의 기울기를 구한다.

<보기>

ㄱ. $t=1$일 때, 직선 l의 기울기는 1이다.
ㄴ. 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 l의 개수는 2이다.
ㄷ. 직선 l 위의 모든 점 (x, y)에 대하여 부등식 $y\le ax^2$이 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다. ❷ 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 직선 AP의 기울기를 구하여 수직인 조건을 이용한다.

ㄱ. $t=1$일 때, 직선 AP의 기울기는 $\frac{1-0}{0-1}=-1$이므로 직선 AP에 수직인 직선 l의 기울기는 1이다. (참)

Step ❷ 직선 l의 방정식을 t를 이용하여 나타내고, $x=3$, $y=2$를 대입하여 t의 값을 구한다.

ㄴ. 직선 AP의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이므로 직선 l의 기울기는 t이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y=t(x-t)$ ······ ㉠

㉠이 점 $(3, 2)$를 지나므로 $x=3$, $y=2$를 대입하여 정리하면

$t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=2$

따라서 직선 l의 개수는 2이다. (참)

Step ❸ 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

ㄷ. 주어진 부등식에 ㉠을 대입하면

$t(x-t)\le ax^2$

즉 $ax^2-tx+t^2\ge0$ ······ ㉡

㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a>0$이고

$ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=t^2-4at^2=t^2(1-4a)\le 0$

$t^2>0$이므로 $1-4a\le 0$

즉 $a\ge\frac{1}{4}$

그러므로 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

J017 두 직선의 평행과 수직을 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

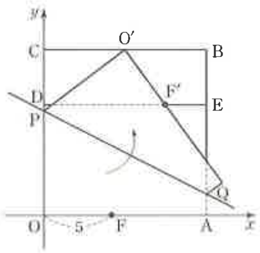
그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정사각형 OABC 모양의 [정답률 22%] 종이를 점 O가 원점에, 두 점 A, C가 각각 x축, y축 위에 있도록 좌표평면 위에 놓았다. 두 점 D, E는 각각 두 선분 OC, AB를 2 : 1로 내분하는 점이고, 선분 OA 위의 점 F에 대하여 $\overline{OF}=5$이다. 선분 OC 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 접는 선으로 하여 종이를 접었더니 점 O는 선분 BC 위의 점 O′으로, 점 F는 선분 DE 위의 점 F′으로 옮겨졌다.

❶ $\overline{OO'}\perp\overline{PQ}$, $\overline{FF'}\perp\overline{PQ}$이므로 두 직선 OO′과 FF′의 직선의 기울기는 서로 같고, $\overline{O'F'}=\overline{OF}$임을 이용한다.

이때 좌표평면에서 직선 PQ의 방정식은 $y=mx+n$이다. $m+n$의 값은?

❷ OO′, FF′의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

(단, m, n은 상수이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ❺ 7

Step ❶ 직선 OO′과 직선 FF′의 기울기가 같음을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(12, 0)$, $(12, 12)$, $(0, 12)$, $(5, 0)$이다.

점 O′은 선분 BC 위의 점이므로 점 O′의 좌표를 $(a, 12)$로 놓을 수 있다.

또 점 F′은 선분 DE 위의 점이고, 두 점 D, E는 각각 두 선분 OC, AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 F′의 좌표를 $(b, 8)$로 놓을 수 있다.

직선 OO′과 직선 FF′은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 OO′과 직선 FF′은 서로 평행하다.

따라서 두 직선의 기울기가 같으므로

$\frac{12-0}{a-0}=\frac{8-0}{b-5}$

$2a=3b-15$ …… ㉠

Step ❷ 선분 O′F′의 길이와 선분 OF의 길이가 같음을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$\overline{O'F'}=\overline{OF}=5$이므로

$\sqrt{(b-a)^2+(8-12)^2}=5$

$(b-a)^2=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $0\le a\le 12$, $0\le b\le 12$의 범위에서 해를 구하면

$a=6$, $b=9$

Step ❸ 직선 PQ의 방정식을 구하고 $m+n$의 값을 구한다.

직선 PQ는 선분 OO′의 중점 $(3, 6)$과 선분 FF′의 중점 $(7, 4)$를 지나는 직선이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=\frac{6-4}{3-7}(x-3)+6=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

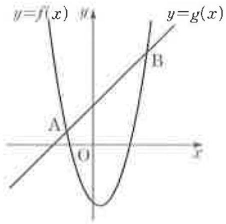
따라서 $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{15}{2}$이므로

$m+n=-\frac{1}{2}+\frac{15}{2}=7$

J018 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ③

그림과 같이 함수 $f(x)=x^2-x-5$와 $g(x)=x+3$의 그래프 [정답률 66%] 가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

❶ $f(x)=g(x)$임을 이용하여 두 점 A와 B의 좌표를 구한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, 점 P의 x좌표

❷ 선분 AB의 중점을 M으로 놓으면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 직선 MP는 선분 AB를 수직이등분함을 이용한다.

는? (단, 점 P의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ❸ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

Step ❶ 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 A, B의 좌표를 구한다.

함수 $y=f(x)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $x^2-x-5=x+3$의 근이므로

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$

Step ❷ 선분 AB의 중점을 M으로 놓고 $\overline{AP}=\overline{BP}$를 만족시키는 직선 MP의 방정식을 구한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$M(1, 4)$ $\to M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 직선 MP는 선분 AB를 수직이등분한다.

직선 AB의 기울기가 1이므로 선분 AB를 수직이등분하는 직선은 기울기가 -1이고 점 $M(1, 4)$를 지난다.

$g(x)=x+3$의 그래프 기울기는 1

따라서 $y=-x+5$

Step ❸ 직선 MP와 함수 $y=x^2-x-5$의 그래프가 만나는 점 P의 x좌표를 구한다.

점 P의 x좌표는 함수 $y=x^2-x-5$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점의 x좌표이므로

$x^2-x-5=-x+5$

$x^2=10$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{10}$

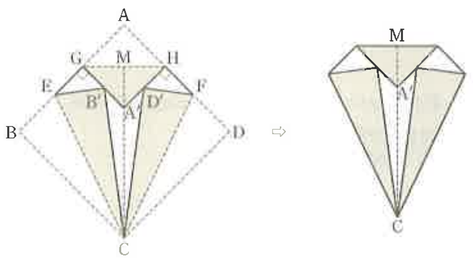
J019 두 직선의 수직 조건을 활용하여 문제해결하기 정답 150

그림과 같이 한 변의 길이가 $6\sqrt{2}$인 정사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB와 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 E, F라 하자. 선분 EC를 접는 선으로 하여 삼각형 EBC를 접었을 때, 점 B가 옮겨지는 점을 B′, 선분 FC를 접는 선으로 하여 삼각형 FDC를 접었을 때, 점 D가 옮겨지는 점을 D′이라 하자. [정답률 26%]

❶ 점 C를 좌표평면의 원점으로 놓고 직선 CF와 선분 DD′의 관계를 이용하여 점 D′의 좌표를 구한다.

점 B′에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 G, 점 D′에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H, 선분 GH의 중점을 M이라 하자. 선분 GH를 접는 선으로 하여 삼각형 AGH를 접었을 때, 점 A가 옮겨지는 점을 A′이라 하면 점 A′이 선분 MC를 1 : k로 내분한다. $50k$의 값을 구하시오. [4점] 150

❷ 직선 A′H의 방정식과 직선 AD의 방정식을 이용하여 점 M의 좌표를 구한 후, 점 A′이 선분 MC를 1 : k로 내분하는 점임을 이용한다.

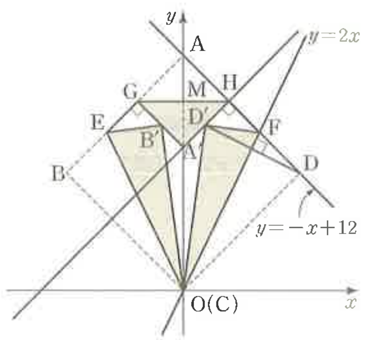


Step ❶ 점 C를 좌표평면의 원점으로 놓고 점 A, B, C, D, F의 좌표를 구한다.

좌표평면 위에 점 C가 원점, 점 A가 y축 위에 놓이도록 정사각형 ABCD를 놓으면 A$(0,\ 12)$, B$(-6,\ 6)$, C$(0,\ 0)$, D$(6,\ 6)$

점 F는 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점이므로 F$(4,\ 8)$

Step ❷ 직선 CF와 선분 DD′의 관계를 이용하여 점 D′의 좌표를 구한다.



두 점 C, F를 지나는 직선은 $y=2x$

점 D′$(a,\ b)$라 하면 선분 DD′의 중점 $\left(\dfrac{a+6}{2},\ \dfrac{b+6}{2}\right)$이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+6}{2}=a+6$$

$b=2a+6$ …… ㉠

두 점 D, D′을 지나는 직선은 직선 $y=2x$와 수직이므로

$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b-6}{a-6}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\dfrac{6}{5}$, $b=\dfrac{42}{5}$

따라서 D′$\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{42}{5}\right)$

Step ❸ 직선 A′H의 방정식과 직선 AD의 방정식을 이용하여 점 A′, H, M의 좌표를 구한다.

직선 A′H는 직선 CD와 평행하므로 기울기가 1이고 점 D′을 지나므로

$y=x+\dfrac{36}{5}$ …… ㉢

$y-\dfrac{42}{5}=x-\dfrac{6}{5}$

따라서 A′$\left(0,\ \dfrac{36}{5}\right)$

직선 AD의 방정식은

$y=-x+12$ …… ㉣

두 직선 A′H와 AD의 교점의 좌표가 점 H이므로

㉢, ㉣에서 H$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{48}{5}\right)$

이때 점 M은 점 H와 y좌표가 같으므로

M$\left(0,\ \dfrac{48}{5}\right)$

Step ❹ 점 A′이 선분 MC를 1 : k로 내분하는 점임을 이용하여 k의 값을 구한다.

점 A′이 선분 MC를 1 : k로 내분하는 점이므로

A′$\left(0,\ \dfrac{48k}{5(1+k)}\right)$

$\dfrac{48k}{5(1+k)}=\dfrac{36}{5}$이므로 $k=3$

따라서 $50k=150$

J020 두 직선의 위치 관계 추론하기 정답 ③

두 직선 [정답률 58%]

$l : ax-y+a+2=0$

$m : 4x+ay+3a+8=0$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $a=0$일 때 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.

❶ $a=0$일 때 $l : y=2$, $m : x=-2$

ㄴ. 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

❷ 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리한다.

ㄷ. 두 직선 l과 m이 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다.

❸ $a\neq0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기를 각각 구한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 두 직선 l과 m의 방정식에 $a=0$을 대입하여 직선의 방정식을 구한다.

ㄱ. $a=0$일 때, $l : y=2$, $m : x=-2$

따라서 두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

Step ❷ 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

ㄴ. $ax-y+a+2=0$을 a에 대하여 정리하면

$a(x+1)-y+2=0$ …… ㉠

㉠이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0$, $-y+2=0$

이어야 하므로

$x=-1$, $y=2$

따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다. (거짓)

Step ❸ 평행한 두 직선은 기울기가 같음을 이용한다.

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직이다.

$a\neq0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\dfrac{4}{a}$이다.

$a=-\dfrac{4}{a}$에서 $a^2=-4$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

J021 두 직선의 수직 조건을 활용하여 문제해결하기 정답 ⑤

좌표평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC [정답률 38%] 의 무게중심을 G라 하고, 변 AB, 변 BC, 변 CA의 중점의 좌표를 각각 L$(2,\ 1)$, M$(4,\ -1)$, N$(a,\ b)$라 하자.

❶ 직선 BN과 직선 LM의 교점을 P로 놓고 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 선분 NP의 길이를 구한다.

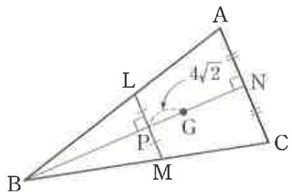
직선 BN과 직선 LM이 서로 수직이고, 점 G에서 직선 LM까지의 거리가

❷ 직선 LM과 직선 NP는 서로 수직임을 이용한다.

$4\sqrt{2}$일 때, ab의 값은? (단, 무게중심 G는 제1사분면에 있다.) [4점]

① 60 ② 90 ③ 120 ④ 150 ⑤ 180

Step ❶ 직선 BN과 직선 LM의 교점을 P로 놓고 점 P의 좌표를 구한다.



삼각형의 중점 연결 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{LM}}$과 $\overline{\mathrm{AC}}$는 평행하다.

이때 $\overline{\mathrm{BN}}\perp\overline{\mathrm{LM}}$이므로 $\overline{\mathrm{BN}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$

따라서 직선 BN과 직선 LM의 교점을 P라 할 때 직선 BN이 선분 AC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{1-1}{2}\right)$, 즉 P$(3,\ 0)$

Step ❷ 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 선분 NP의 길이를 구한다.

$\triangle$ABC의 무게중심 G에 대하여

$\overline{\mathrm{BG}}:\overline{\mathrm{GN}}=2:1$이고 $\overline{\mathrm{NP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이다.

$\overline{\mathrm{BG}}=\overline{\mathrm{NP}}+4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{GN}}=\overline{\mathrm{NP}}-4\sqrt{2}$이므로

$(\overline{\mathrm{NP}}+4\sqrt{2}):(\overline{\mathrm{NP}}-4\sqrt{2})=2:1$

$\overline{\mathrm{NP}}=12\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{NP}}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$ …… ㉠

Step ❸ 직선 LM과 직선 NP는 서로 수직임을 이용하여 ab의 값을 구한다.

직선 LM의 기울기는 $\dfrac{-1-1}{4-2}=-1$

직선 NP의 기울기는 $\dfrac{b}{a-3}$

직선 LM과 직선 NP는 서로 수직이므로

$\dfrac{b}{a-3}=1$, $b=a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(a-3)^2+(a-3)^2=288$

$(a-3)^2=144$

$a=15$ 또는 $a=-9$

이때 무게중심 G가 제1사분면에 있으므로

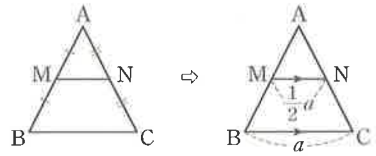
$a=15$, $b=12$

따라서 $ab=180$

실전 솔루션

삼각형의 중점 연결 정리

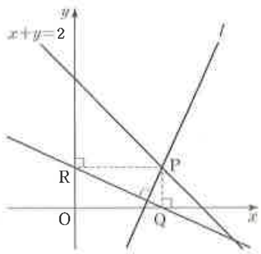
삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 한 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 한 변의 길이의 $\dfrac{1}{2}$이다.



$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$, $\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{CN}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{MN}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$

J022 정점을 지나는 직선의 방정식 추론하기 정답 ③

그림과 같이 직선 $x+y=2$ 위의 점 P$(a,\ b)$ $(ab\neq0)$에서 x축, [정답률 40%] y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하고, 점 P를 지나고 직선 QR에 수직인 직선을 l이라 하자.



다음은 직선 l이 점 P의 위치에 관계없이 항상 일정한 점을 지남을 보이는 과정이다.

> 점 P$(a,\ b)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로
>
> $b=2-a$
>
> 이때 직선 l의 기울기는 $\boxed{(가)}$이므로 직선 l의 방정식은
>
> ❶ 직선 l이 직선 QR와 수직임을 이용한다.
>
> $y-(2-a)=\boxed{(가)}(x-a)$ …… ㉠
>
> 한편, ㉠이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면
>
> $x=\boxed{(나)}$, $y=\boxed{(다)}$
>
> ❷ 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하고 항등식의 성질을 이용한다.
>
> 따라서 직선 l은 점 P의 위치에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식을 $f(a)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 α, β라 할 때, $f\left(\dfrac{4}{3}\right)+\alpha+\beta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Step ❶ 직선 l이 직선 QR와 수직임을 이용하여 직선 l의 기울기를 구한다.

점 P$(a,\ b)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로

$a+b=2$

$b=2-a$

점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발은 각각

Q$(a,\ 0)$, R$(0,\ b)$

직선 l은 직선 QR와 수직이고, 직선 QR의 기울기는 $-\dfrac{b}{a}$이므로

직선 l의 기울기는

$$\frac{a}{b}=\boxed{\frac{a}{2-a}}$$

Step ❷ **직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 이용한다.**

따라서 직선 l은 점 $(a,\ 2-a)$를 지나고 기울기가 $\dfrac{a}{2-a}$이므로

$$y-(2-a)=\boxed{\frac{a}{2-a}}(x-a)$$

$$(2-a)y-(2-a)^2=a(x-a)$$

$$2y-ay-4+4a-a^2=ax-a^2$$

a에 대하여 정리하면

$$(x+y-4)a+(4-2y)=0$$

위의 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+y-4=0,\ 4-2y=0$$

이어야 하므로

$$x=\boxed{2},\ y=\boxed{2}$$

따라서 $f(a)=\dfrac{a}{2-a}$, $\alpha=2$, $\beta=2$이므로

$$f\left(\frac{4}{3}\right)+\alpha+\beta=\frac{\frac{4}{3}}{2-\frac{4}{3}}+2+2=6$$

J023 점과 직선 사이의 거리를 이해하기 정답 ①

좌표평면에서 $3<a<7$인 실수 a에 대하여 이차함수 [정답률 29%]
$y=x^2-2ax-20$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리의 최솟값을 $f(a)$라 하자. $f(a)$의 최댓값은? [4점]

❶ 직선 $y=2x-12a$와 평행하면서 이차함수 $y=x^2-2ax-20$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 구한다.

① $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

Step ❶ **점 P와 직선 $y=2x-12a$의 거리가 최소인 경우를 찾는다.**

$3<a<7$일 때, 이차함수 $y=x^2-2ax-20$의 그래프와 직선 $y=2x-12a$가 만나지 않으므로 기울기가 2인 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax-20$에 접할 때의 접점이 점 P일 때, 점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리가 최소가 된다.

Step ❷ **이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 접선의 방정식을 a에 대한 식으로 나타낸다.**

$y=x^2-2ax-20$에 접하고 기울기가 2인 직선을

$$y=2x+b$$

라 하자.

$$x^2-2ax-20=2x+b$$

$$x^2-2(a+1)x-20-b=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 직선과 곡선이 접하므로 $D=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2+(20+b)=0$$

$$b=-(a+1)^2-20=-a^2-2a-21$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=2x-a^2-2a-21$$

Step ❸ **점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.**

$f(a)$는 두 직선 $y=2x-12a$와 $y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리와 같으므로 직선 $y=2x-12a$ 위의 점 $(6a,\ 0)$과 직선 $y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리를 구하면

$$f(a)=\frac{|12a-a^2-2a-21|}{\sqrt{5}}=\frac{|-a^2+10a-21|}{\sqrt{5}}=\frac{|-(a-5)^2+4|}{\sqrt{5}}\ (3<a<7)$$

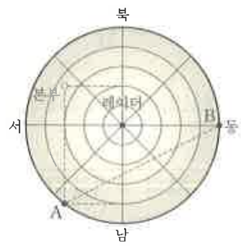
따라서 $f(a)$의 최댓값은

$$f(5)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

J024 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 ②

일정 거리 안에 있는 물체를 감지할 수 있는 레이더의 화면이 [정답률 58%]
그림과 같다. 레이더 화면의 중심에 레이더의 위치가 표시되고 있으며 레이더 화면의 중심에서 서쪽으로 30 cm, 북쪽으로 20 cm 떨어진 지점에 본부의 위치가 표시되고 있다.

❷ 본부의 좌표는 $(-30,\ 20)$이다.



❶ 레이더를 원점으로 하는 좌표평면을 도입한다.

레이더 화면의 중심에서 서쪽으로 30 cm, 남쪽으로 40 cm 떨어진 지점을 A, 레이더 화면의 중심에서 동쪽으로 50 cm 떨어진 지점을 B라 하자. 어떤 물체가 레이더 화면의 A지점에서 나타나서 B지점을 향해 일직선으로 지나갔다. 이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 레이더 화면상의 거리가 a cm이다. a의 값은? (단, 레이더 화면은 평면에 원으로 표시되며 본부와 물체의 크기는 무시한다.) [4점]

❸ A지점의 좌표는 $(-30,\ -40)$이다.

❹ B지점의 좌표는 $(50,\ 0)$이다.

❺ 두 지점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구한다.

① $\dfrac{71\sqrt{5}}{3}$ ② $24\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{73\sqrt{5}}{3}$ ④ $\dfrac{74\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $25\sqrt{5}$

Step ❶ **레이더의 위치를 원점으로 하는 좌표평면을 도입한다.**

레이더의 위치를 원점으로 하고 동서를 x축, 남북을 y축으로 하면 본부의 좌표는 $(-30,\ 20)$, A지점의 좌표는 $(-30,\ -40)$, B지점의 좌표는 $(50,\ 0)$이다.

Step ❷ **물체가 지나간 경로의 직선의 방정식을 구하고 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.**

물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 거리는 본부와 물체가 지나간 경로 사이의 거리와 같다.

물체가 지나간 경로 위의 두 점 A$(-30,\ -40)$, B$(50,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-(-40)}{50-(-30)}(x-50)+0$$

$$x-2y-50=0$$

따라서 본부와 물체가 지나간 경로 사이의 거리는

$$\frac{|-30-2\times20-50|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=24\sqrt{5}$$

이므로 이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 거리는 $24\sqrt{5}$이다.

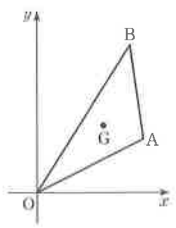
J025 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표 구하기 정답 ①

그림과 같이 좌표평면에 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(8,\ 4)$, B$(7,\ a)$와 삼각형 OAB의 무게중심 G$(5,\ b)$가 있다. [정답률 59%]

❶ △OAB의 무게중심을 이용하여 a, b의 관계식을 구한다.

점 G와 직선 OA 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a는 양수이다.) [4점]

❷ 직선 OA의 방정식을 구하고 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.



❶ 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

Step ❶ 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표를 구한다.

세 점 O$(0,\ 0)$, A$(8,\ 4)$, B$(7,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0+8+7}{3},\ \frac{0+4+a}{3}\right),\ 즉\ \left(5,\ \frac{4+a}{3}\right)$$

이므로

$$b=\frac{4+a}{3}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

Step ❷ 직선 OA의 방정식을 구한다.

한편 직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x,\ 즉\ x-2y=0$$

Step ❸ 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

점 G$(5,\ b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

$|5-2b|=5$

$5-2b=5$ 또는 $5-2b=-5$

$b=0$ 또는 $b=5$

$a>0$이므로 ㉠에서 $b>0$

따라서 $b=5$, $a=11$이므로

$a+b=16$

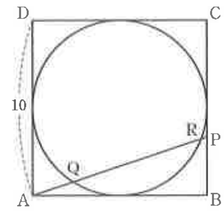
J026 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD에 내접하는 원이 있다. 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 P라 하자. [정답률 56%]

❶ 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡고 직선 AP의 방정식을 구한다.

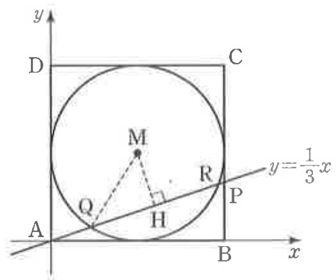
선분 AP가 정사각형 ABCD에 내접하는 원과 만나는 두 점을 Q, R라 할 때, 선분 QR의 길이는? [4점]

❷ 원의 중심과 직선 AP 사이의 거리를 구하고 피타고라스 정리를 이용한다.



① $2\sqrt{11}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{13}$ ④ $2\sqrt{14}$ ❺ $2\sqrt{15}$

Step ❶ 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타내고 직선 AP의 방정식을 구한다.



그림과 같이 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡는다.

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:1$이므로 직선 AP는 기울기가 $\frac{1}{3}$이다.

또 직선 AP는 원점을 지나므로 직선 AP의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x$$

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 선분 QR의 길이를 구한다.

원의 중심을 M이라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로 M$(5,\ 5)$이고, $\overline{MQ}=5$

점 M$(5,\ 5)$에서 직선 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH}=\frac{|5-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

따라서 $\overline{QH}=\sqrt{25-10}=\sqrt{15}$이므로

$\overline{QR}=2\overline{QH}=2\sqrt{15}$

J027 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 15

곡선 $y=-x^2+4$ 위의 점과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리의 최솟값이 $2\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점] [정답률 56%] 15

❶ 직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식을 구하여 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

Step ❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식을 구한다.

직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+k'$이라 하자.

곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x+k'$이 접하므로

$-x^2+4=2x+k'$

$x^2+2x+k'-4=0$

이 이차방정식이 중근을 갖는다. 이차방정식의 판별식을 D라 하면

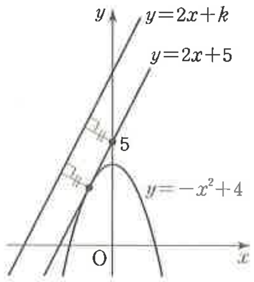
$\frac{D}{4}=1-(k'-4)=0$

$k'=5$

따라서 직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식은

$y=2x+5$ ······ ㉠

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 상수 k의 값을 구한다.



직선 ㉠ 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리가 곡선 $y=-x^2+4$ 위의 점과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리의 최솟값과 같으므로

$\frac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$

$|k-5|=10$

따라서 $k=15$ 또는 $k=-5$

이때 $k=-5$이면 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x-5$가 만나므로 거리의 최솟값은 0이다.

따라서 $k=15$

실전 솔루션

❶ 직선과 곡선이 만나는 경우 :
곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 0이다.

❷ 직선과 곡선이 만나지 않는 경우 :
직선 l에 평행하고 곡선 위의 한 점 P에서 접하는 직선을 m이라 하면 곡선 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 l 사이의 거리와 같다.
이때 두 직선 l, m이 평행하므로 직선 m 위의 임의의 점과 직선 l 사이의 거리는 항상 같다.

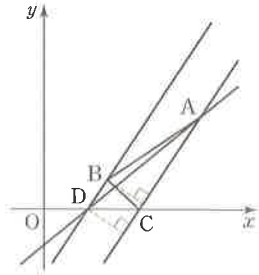
J028 두 직선의 위치 관계 이해하기 정답 ⑤

좌표평면 위에 세 점 $A(5, 3)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 OC 위를 움직이는 점 D에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같을 때, 직선 AD의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점] [정답률 59%]

❶ 두 삼각형의 넓이가 같으면 ($\overline{BD}$의 기울기)=($\overline{AC}$의 기울기)임을 이용한다.

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

Step ❶ 직선 AC와 직선 BD의 위치 관계를 구한다.



점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 $D(a, 0)$이라 하면 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같으므로 직선 BD와 직선 AC는 평행하다.

Step ❷ 직선 BD와 직선 AC의 기울기가 같음을 이용한다.

(직선 BD의 기울기)$=\frac{1-0}{2-a}=\frac{1}{2-a}$

(직선 AC의 기울기)$=\frac{3-0}{5-3}=\frac{3}{2}$

직선 BD의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1}{2-a}=\frac{3}{2}$, $a=\frac{4}{3}$

따라서 직선 AD의 기울기는

$\frac{3-0}{5-\frac{4}{3}}=\frac{9}{11}$

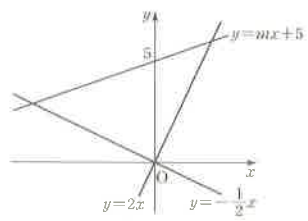
J029 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기 정답 ①

좌표평면에서 세 직선

$y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+5$ $(m>0)$

로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형일 때, m의 값은? [4점] [정답률 62%]

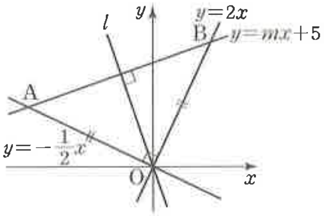
❶ 삼각형의 모양을 알아내고, 직선 $y=mx+5$가 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$가 이루는 각을 이등분하는 직선 l과 수직임을 이용하여 m의 값을 구한다.



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

Step ❶ 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$의 위치 관계로 삼각형의 모양을 알아낸다.

두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$의 기울기의 곱이 -1이므로 서로 수직이다.



따라서 그림에서 세 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

Step ❷ 직선 $y=mx+5$와 ∠AOB를 이등분하는 직선 l과의 관계를 구한다.

직선 $y=mx+5$는 ∠AOB를 이등분하는 직선 l과 수직이다.

Step ❸ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0$, $x+2y=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은

$\frac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\frac{|x+2y|}{\sqrt{5}}$에서

└ 직선 l 위의 점을 (x, y)라고 하면 두 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$ 까지의 거리는 같다.

$y=\frac{1}{3}x$, $y=-3x$

$m>0$이므로 직선 l의 방정식은 $y=-3x$

따라서 $m=\frac{1}{3}$

J030 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기 정답 8

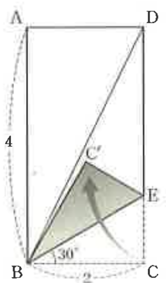
그림과 같이 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 각 꼭짓점을 A, B, C, D라 하면 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$이다. [정답률 36%]

∠EBC$=30°$가 되도록 변 CD 위에 점 E를 정하고 선분 BE를 따라 이 종이를 접으면 점 C는 점 C′으로 옮겨진다.

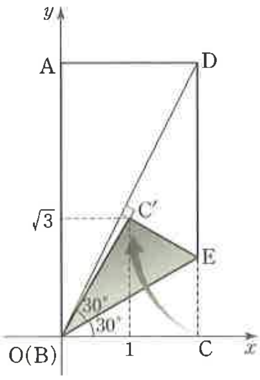
❶ 점 B가 좌표평면의 원점이면 ∠C′BC$=60°$임을 이용하여 점 C′의 좌표와 직선 BD의 방정식을 구한다.

점 C′과 대각선 BD 사이의 거리가 $a\sqrt{5}-b\sqrt{15}$일 때, $100ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점] 8

❷ 직선 BD의 방정식이 $y=2x$임을 이용한다.



Step ❶ 점 B가 좌표평면의 원점이 되게 하여 점 C′의 좌표와 직선 BD의 방정식을 구한다.



좌표평면 위에 점 B가 원점, 점 A는 y축, 점 C는 x축 위에 놓이도록 직사각형 모양의 종이를 놓으면 ∠EBC$=$∠C′BE이므로

∠C′BC$=60°$

$\overline{BC'}=\overline{BC}=2$이므로 C′$(1, \sqrt{3})$

D$(2, 4)$이므로 직선 BD의 방정식은 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$이다.

Step ❷ 점 C′과 직선 BD 사이의 거리를 구한다.

따라서 점 C′과 직선 BD 사이의 거리는

$\frac{|2-\sqrt{3}|}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{15}$

$a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{1}{5}$이므로

$100ab=100\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=8$

J031 두 직선의 평행 조건을 이용하여 문제해결하기 정답 9

그림과 같이 일차함수 $y=x$의 그래프와 이차함수 $y=x^2$의 그래프로 둘러싸인 도형이 있다. [정답률 7%]

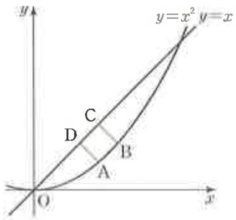
곡선 $y=x^2$ 위에 두 점 A, B를 잡고, 직선 $y=x$ 위에 두 점 C, D를 잡아

❶ 점 A의 좌표를 (α, α^2), 점 B의 좌표를 (β, β^2)으로 놓고 점 C와 점 D를 구한다.

이 도형 위에 정사각형 ABCD를 그린다.

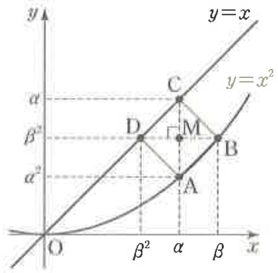
❷ 직선 AB와 직선 CD의 기울기가 같고, 두 대각선 BD와 AC의 교점을 M이라 할 때 BD$=2$BM임을 이용한다.

이 정사각형 ABCD의 대각선의 길이가 $2\sqrt{a}+b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점] 9



Step ❶ 점 A의 좌표를 (α, α^2), 점 B의 좌표를 (β, β^2)으로 놓고 직선 $y=x$를 이용하여 점 C와 점 D의 좌표를 구한다.

사각형 ABCD의 점 A의 좌표를 (α, α^2), 점 B의 좌표를 (β, β^2)으로 놓으면 점 C의 좌표는 (α, α), 점 D의 좌표는 (β^2, β^2)이다.



Step ❷ **직선 AB와 직선 CD의 기울기가 같고 두 대각선 BD와 AC의 교점을 이용하여 a, b의 값을 구한다.**

직선 AB와 직선 CD의 기울기가 같으므로

$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=1$

$\alpha+\beta=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 사각형의 두 대각선 BD와 AC의 교점을 점 M이라 하면 사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{BD}=2\overline{BM}$

즉 $\beta-\beta^2=2(\beta-\alpha)$이므로

$\beta^2+\beta-2\alpha=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\beta^2+3\beta-2=0$

$\beta>0$이므로 $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

따라서 대각선 BD의 길이는

$\beta-\beta^2=\beta(1-\beta)=\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\times\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

$\qquad=2\sqrt{17}-8=2\sqrt{a}+b$

따라서 $a=17$, $b=-8$이므로

$a+b=9$

해검단 TALK

정사각형은 두 대각선의 길이가 같으므로 $\overline{BD}=\overline{AC}$

$\overline{AC}=\alpha-\alpha^2$이므로 ㉠, ㉡에서 α에 대한 이차방정식을 세워 $\overline{AC}$의 길이를 구해도 돼.

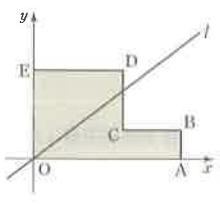
J032 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ②

그림과 같이 원점을 지나는 직선 l이 원점 O와 다섯 개의 점 [정답률 68%] A(5, 0), B(5, 1), C(3, 1), D(3, 3), E(0, 3)을 선분으로 이은 도형 OABCDE의 넓이를 이등분한다.

❶ 직선 l과 선분 CD의 교점을 P라 하고 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 직선 l에 의하여 나뉘어진 도형의 넓이가 같음을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

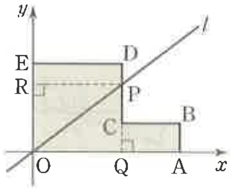
이때, 직선 l의 기울기는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은?

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



① 15 ❷ 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

Step ❶ **직선 l과 선분 CD의 교점을 P로 놓고 직선 l에 의하여 나뉘어진 도형의 넓이가 같음을 이용한다.**



직선 l과 선분 CD의 교점을 P라 하고 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 삼각형 OQP의 넓이와 삼각형 OPR의 넓이가 서로 같으므로 사각형 ABCQ와 사각형 DERP의 넓이가 서로 같다.

Step ❷ **점 P의 좌표를 구한 후, 직선 l의 기울기를 구한다.**

따라서 $3\times\overline{ER}=2\times1$에서 $\overline{ER}=\dfrac{2}{3}$

$\overline{PQ}=\overline{DQ}-\overline{ER}=3-\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}$이므로 $P\left(3, \dfrac{7}{3}\right)$

직선 l의 기울기는 $\dfrac{7}{9}$이므로

$p+q=16$

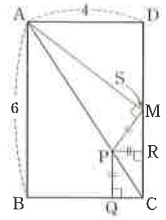
J033 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 15

그림과 같이 가로의 길이가 4, 세로의 길이가 6인 직사각형 [정답률 10%] ABCD가 있다. 선분 DC의 중점을 M이라 하고, 대각선 AC 위의 임의의 한 점 P에서 세 직선 BC, DC, AM에 내린 수선의 발을 각각 Q, R, S라 하자.

❷ 직선 AC의 직선의 방정식을 구하고 이를 이용하여 점 P의 좌표를 나타낸다.

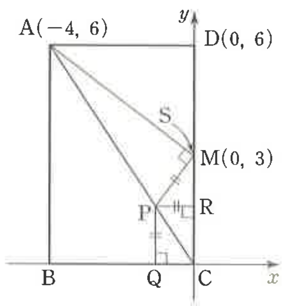
점 P가 $\overline{PQ}=\overline{PS}$를 만족시킬 때, 선분 PR의 길이는 $\dfrac{q}{p}$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 15

❸ 선분 PS의 길이는 점 P와 직선 AM 사이의 거리와 같다.



❶ 점 C를 원점으로 하는 좌표평면을 설정한다.

Step ❶ **점 C를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 CD를 y축이 되도록 좌표평면을 설정한다.**



사각형 ABCD를 점 C를 원점으로 하고, 선분 BC를 x축, 선분 DC를 y축으로 하는 좌표평면에 놓으면

A$(-4, 6)$, M$(0, 3)$

Step ❷ 직선 AC의 방정식을 구하고 이를 이용하여 직선 AC의 위의 점 P의 좌표를 구한다.

이때 선분 PR의 길이를 $a(0<a<4)$라 하면 직선 AC의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x$이므로 점 Q, P의 좌표는 $Q(-a,\ 0)$, $P\left(-a,\ \frac{3}{2}a\right)$

Step ❸ 직선 AM의 방정식을 구하고 점 P와 직선 AM 사이의 거리가 선분 PS의 길이와 동일함을 이용하여 $\overline{PQ}=\overline{PS}$를 등식으로 나타낸다.

한편 직선 AM의 방정식은 $3x+4y-12=0$이므로 점 $P\left(-a,\ \frac{3}{2}a\right)$에서 직선 $3x+4y-12=0$까지의 거리는

$\frac{|3a-12|}{5}$

또 $\overline{PQ}=\overline{PS}$이므로

$\frac{3}{2}a=\frac{|3a-12|}{5}$

$5a=2|a-4|$

Step ❹ $\overline{BC}=4$이므로 점 P의 x좌표는 -4와 0 사이임에 주의하여 절댓값 기호를 푼다.

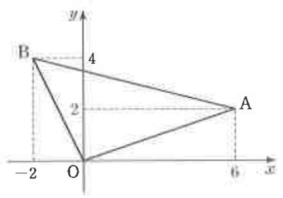
이때 $0<a<4$이므로 $5a=-2a+8$에서 $a=\frac{8}{7}$

따라서 $p=7$, $q=8$이므로

$p+q=15$

J034 넓이의 비를 이용하여 직선의 방정식 구하기 정답 ①

좌표평면에 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(6,\ 2)$, $B(-2,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 있다. [정답률 36%]



직선 OA 위의 점 P와 직선 OB 위의 점 Q가 다음 조건을 만족한다.

(가) 점 P는 제1사분면, 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.
(나) (△OPB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(△OAB의 넓이)
(다) (△OPQ의 넓이)$=\frac{3}{2}\times$(△OPB의 넓이)
❶ 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

이때, 직선 PQ의 방정식은 $mx+ny=21$이다. 두 실수 m, n의 합 $m+n$의 값은? [4점]
❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구하여 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구한다.

❶ 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

Step ❶ 조건 (나)에 의하여 △OPB=△APB이고 두 삼각형 OPB, APB의 높이가 같으므로 $\overline{OP}=\overline{AP}$임을 이용한다.

(△OPB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(△OAB의 넓이)이고, 점 P가 제1사분면 위의 점이므로 점 P는 선분 OA의 중점이다.

따라서 $P(3,\ 1)$

Step ❷ 조건 (다)에 의하여 △OPQ : △OPB=3 : 2이고 두 삼각형 OPQ, OPB의 높이가 같으므로 $\overline{OQ}:\overline{OB}=3:2$임을 이용한다.

(△OPQ의 넓이)$=\frac{3}{2}\times$(△OPB의 넓이)이고,

점 Q가 제2사분면 위의 점이므로 점 Q는 선분 OB를 3 : 1로 외분하는 점이다.

$Q\left(\frac{3\times(-2)-0}{3-1},\ \frac{3\times4-0}{3-1}\right)$

따라서 $Q(-3,\ 6)$

Step ❸ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$임을 이용한다.

직선 PQ의 방정식은

$y-1=-\frac{5}{6}(x-3)$

$5x+6y=21$

따라서 $m=5$, $n=6$이므로 $m+n=11$

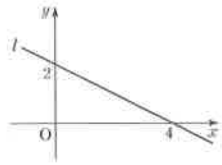
J035 넓이의 비를 이용하여 직선의 방정식 구하기 정답 28

그림과 같이 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선 l이 있다. [정답률 26%]
❶ 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

직선 l 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 대하여 등식
❷ 항등식의 성질을 이용한다.

$x^2+ay^2+bx+c=0$

이 성립하도록 실수 a, b, c를 정할 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오. [4점] 28



Step ❶ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다.

직선 l의 x절편, y절편이 각각 4, 2이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$

$y=-\frac{1}{2}x+2$

Step ❷ ❶에서 구한 식을 $x^2+ay^2+bx+c=0$에 대입하여 문자의 개수가 1인 식으로 변형한다.

위 식을 $x^2+ay^2+bx+c=0$에 대입하면

$x^2+a\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2+bx+c=0$

Step ❸ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식일 때 $a=b=c=0$임을 이용한다.

$\left(1+\frac{a}{4}\right)x^2-(2a-b)x+(4a+c)=0$

위 식이 x에 대한 항등식이므로

$1+\frac{a}{4}=0$, $2a-b=0$, $4a+c=0$

따라서 $a=-4$, $b=-8$, $c=16$이므로

$|a|+|b|+|c|=28$

다른 풀이

직선 위의 어떤 점을 대입하여도 등식이 성립하므로 직선 위의 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(4,\ 0)$을 대입하여 정리하면

$4a+c=0$ …… ㉠

$a+2b+c=-4$ ⋯⋯ ㉡

$4b+c=-16$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-8$, $c=16$

따라서 $|a|+|b|+|c|=28$

J036 직선의 방정식에서 도형 문제해결하기 정답 ③

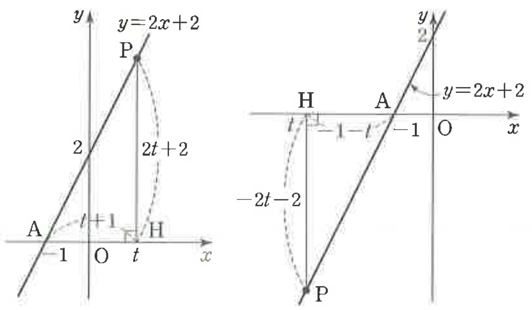
좌표평면 위에서 직선 $y=2x+2$가 x축과 만나는 점을 A라 [정답률 57%] 하고 이 직선 위의 임의의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이때, 삼각형 PAH의 넓이가 5가 되도록 하는 점 P는 두 개가 있다. 이 두 점의

❶ 점 P가 제1사분면에 있는 경우와 제3사분면에 있는 경우를 모두 생각한다.

x좌표를 각각 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

Step ❶ 점 P가 제1사분면에 있는 경우와 제3사분면에 있는 경우로 나누어 그래프를 그린다.



$(t>-1)$ $(t<-1)$

Step ❷ 각 경우의 △PAH를 식으로 나타낸다.

그림과 같이 점 P의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $2t+2$이므로 삼각형 PAH의 넓이는

$t>-1$일 때 $\frac{1}{2}(t+1)(2t+2)=(t+1)^2$

$t<-1$일 때 $\frac{1}{2}(-1-t)(-2t-2)=(t+1)^2$

즉 삼각형 PAH의 넓이는 $t\neq-1$일 때 $(t+1)^2$

삼각형 PAH의 넓이는 5이므로

$(t+1)^2=5$, $t^2+2t-4=0$

t에 대한 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha\beta=-4$

K 원의 방정식 문제편 pp. 152 ~ 164

필수 기출

001 ①	002 ⑤	003 ①	004 ②	005 2	006 10
007 240	008 25	009 180	010 ③	011 ④	012 18
013 18	014 ⑤	015 ⑤	016 22	017 ③	018 25
019 ⑤	020 ②	021 200	022 ④	023 ①	024 ④
025 ⑤					

플러스 기출

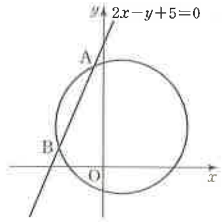
026 ②	027 ⑤	028 20	029 ②	030 ⑤	031 70
032 7	033 64	034 100	035 20		

K001 원의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ①

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$과 [정답률 51%]

❶ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 식을 변형한다.

직선 $2x-y+5=0$이 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=4$일 때, 상수 k의 값은? [3점]



① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

Step ❶ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하기 위해 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴로 변형한다.

$x^2+y^2-2x-4y+k=0$에서

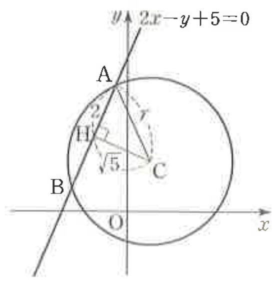
$\{x^2-2x+(-1)^2\}+\{y^2-4y+(-2)^2\}=-k+(-1)^2+(-2)^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$

이므로 원의 중심을 C, 반지름을 r라 하면

$C(1, 2)$, $r^2=5-k$ ⋯⋯ ㉠

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 $\overline{CH}$의 길이를 구한다.



그림과 같이 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2$

점 $C(1, 2)$와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|2\times1-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

Step ❸ 직각삼각형 CAH에서 피타고라스 정리를 이용하여 r^2의 값을 구한다.

직각삼각형 CAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$r^2=(\sqrt{5})^2+2^2=9$

㉠에 의하여 $9=5-k$

따라서 $k=-4$

K002 세 점을 지나는 원의 방정식 구하기

정답 ⑤

좌표평면 위의 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(1,\ 2)$를 지나 [정답률 67%]

❶ $x^2+y^2+ax+by+c=0$에 세 점을 대입하여 a, b, c의 값을 구한다.

는 원이 있다. 이 원의 중심의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은? [3점]

❷ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 식을 변형한다.

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

Step ❶ 주어진 세 점을 원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$에 대입하여 a, b, c의 값을 구한다.

원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$에 주어진 세 점의 좌표를 대입하면

$$\begin{cases} 4-2a+c=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 16+4a+c=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 5+a+2b+c=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

$2\times$㉠$+$㉡을 하면 $24+3c=0$

따라서 $c=-8$

$c=-8$을 ㉠에 대입하면 $4-2a-8=0$

따라서 $a=-2$

$a=-2$, $c=-8$을 ㉢에 대입하면

$5+(-2)+2b+(-8)=0$

$-5+2b=0$

따라서 $b=\frac{5}{2}$

즉 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+\frac{5}{2}y-8=0$

Step ❷ 원의 중심의 좌표를 구하려면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한다.

$(x^2-2x+1)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=8+1+\frac{25}{16}$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{5}{4}\right)$이므로

$p+q=1+\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

K003 원의 방정식 이해하기

정답 ①

좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 1)$, $B(3,\ a)$에 대하여 선분 AB [정답률 57%]

❶ 선분 AB의 중점을 지나고 선분 AB에 수직이다.

의 수직이등분선이 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=4$의 넓이를 이등분할 때, 상수 a

❷ 원의 중심 $(-2,\ 5)$를 지난다.

의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 선분 AB의 수직이등분선이 선분 AB의 중점과 원의 중심을 지남을 이용하여 수직이등분선의 기울기를 구한다.

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면 직선 l은 선분 AB의 중점 $\left(2,\ \frac{a+1}{2}\right)$을 지나고, 주어진 원의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-2,\ 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는

$$\frac{\frac{a+1}{2}-5}{2-(-2)}=\frac{\frac{a-9}{2}}{4}=\frac{a-9}{8}$$

Step ❷ 선분 AB와 선분 AB의 수직이등분선이 서로 수직임을 이용한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{a-1}{3-1}=\frac{a-1}{2}$

직선 l과 직선 AB가 서로 수직이므로

$\frac{a-9}{8}\times\frac{a-1}{2}=-1$

$(a-9)(a-1)=-16$

$a^2-10a+25=0$

$(a-5)^2=0$

따라서 $a=5$

K004 원의 방정식 이해하기

정답 ②

좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 [정답률 69%]

$3:2$로 외분하는 점을 C라 하자. 선분 BC를 지름으로 하는 원의 중심의 좌표

❶ 점 C의 좌표를 구한다. ❷ 선분 BC의 중점의 좌표를 구한다.

를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step ❶ 점 C의 좌표를 구한다.

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 C의 좌표는

$C\left(\frac{3\times2-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times1-2\times3}{3-2}\right)$, 즉 $C(4,\ -3)$

Step ❷ 선분 BC의 중점의 좌표를 구한다.

원의 중심은 선분 BC의 중점과 같으므로

$a=\frac{2+4}{2}=3$

$b=\frac{1+(-3)}{2}=-1$

따라서 $a+b=3+(-1)=2$

K005 원의 방정식에서 미지수 구하기 정답 2

원 $x^2+y^2-4x-2y-2k+8=0$의 반지름의 길이가 1일 때, [정답률 78%]
❶ 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한다.
상수 k의 값을 구하시오. [3점] 2

Step ❶ 원의 방정식을 변형한 후, 반지름의 길이가 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

주어진 원의 방정식 $x^2+y^2-4x-2y-2k+8=0$을 변형하면

$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)-2k+3=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=2k-3$

원의 반지름의 길이가 1이므로

$2k-3=1^2$

따라서 $k=2$

K006 원의 방정식 이해하기 정답 10

좌표평면에서 기울기가 $a(0<a<3)$인 직선 l과 기울기가 b인 [정답률 18%]
직선 m이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$의 넓이를 4등분 한다. 직선 l과 x축, y축
❶ 두 직선은 모두 원의 중심 (1, 3)을 지나고 두 직선은 수직이므로 $a\times b=-1$이다.
으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S_1, 직선 m과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 최솟값을 구하시오. [4점] 10

Step ❶ 두 직선 l, m이 원의 넓이를 4등분함을 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

두 직선 l, m이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$의 넓이를 4등분하므로 두 직선 l, m은 원의 중심 (1, 3)을 지나고 서로 수직인 직선이다.

직선 l의 기울기가 $a(0<a<3)$이고 점 (1, 3)을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=a(x-1)+3$ ······ ㉠

직선 m은 직선 l과 수직이므로 직선 m의 기울기 b는 $b=-\dfrac{1}{a}$

이때 직선 m 또한 점 (1, 3)을 지나므로 직선 m의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a}(x-1)+3$ ······ ㉡

Step ❷ x절편과 y절편을 이용하여 S_1, S_2의 식을 구한다.

직선 l의 x절편은 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=a(x-1)+3$

$x=1-\dfrac{3}{a}$

직선 l의 y절편은 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=a(0-1)+3$

$=3-a$

이므로 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\left|1-\dfrac{3}{a}\right|\times|3-a|$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{a}-1\right)(3-a)$ $(0<a<3$이므로$)$

직선 m의 x절편은 ㉡에 $y=0$을 대입하면

$0=-\dfrac{1}{a}(x-1)+3$

$x=1+3a$

직선 m의 y절편은 ㉡에 $x=0$을 대입하면

$y=-\dfrac{1}{a}(0-1)+3$

$y=3+\dfrac{1}{a}$

이므로 직선 m과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_2는

$S_2=\dfrac{1}{2}\times|1+3a|\times\left|3+\dfrac{1}{a}\right|=\dfrac{1}{2}(1+3a)\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$

Step ❸ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 S_1+S_2의 최솟값을 구한다.

$S_1+S_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{a}-1\right)(3-a)+\dfrac{1}{2}(1+3a)\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(a-6+\dfrac{9}{a}\right)+\dfrac{1}{2}\left(9a+6+\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(10a+\dfrac{10}{a}\right)$

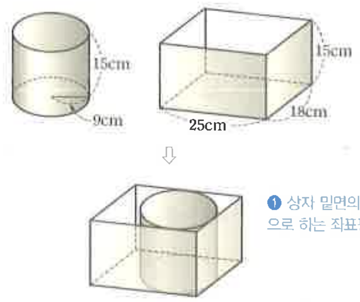
$\geq\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{10a\times\dfrac{10}{a}}=10$ (단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)

└ $10a=\dfrac{10}{a}$에서 $a=1$

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 10이다.

K007 원의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 240

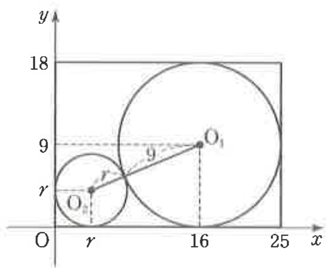
밑면의 반지름의 길이가 9 cm이고 높이가 15 cm인 원기둥 [정답률 18%]
모양의 통조림통이 있다. 이 통조림통을 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 25 cm, 18 cm이고 높이가 15 cm인 직육면체 모양의 상자에 담고, 상자의 남은 공간에 높이가 15 cm인 원기둥 모양의 통조림통을 한 개만 더 담으려고
❷ 두 통조림통의 밑면은 원이고, 두 원이 외접해야 한다.
한다. 더 담으려고 하는 통조림통의 부피의 최댓값이 $a\pi$ cm³일 때, a의 값을 구하시오. (단, 통조림통과 상자의 두께는 무시하고 통조림통의 일부가 상자 밖으로 벗어나지 않게 담는다.) [4점] 240



❶ 상자 밑면의 한 꼭짓점을 원점으로 하는 좌표평면을 그린다.

Step ❶ 상자 밑면의 한 꼭짓점을 원점으로 하는 좌표평면을 도입하여 상자에 들어갈 수 있는 원기둥 모양의 통조림이 최대 부피를 갖는 경우를 나타낸다.

처음 상자에 담은 통조림통의 밑면의 중심을 O_1이라 하고 상자의 남은 공간에 담을 수 있는 원기둥 모양 통조림통 밑면의 중심을 O_2라 하자. 상자의 밑면의 한 꼭짓점이 원점에 오도록 그림과 같이 좌표평면에 두자.



Step ❷ 두 원이 외접할 때 두 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

두 원의 중심은 각각

$O_1(16, 9)$, $O_2(r, r)$

이므로

두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(16-r)^2+(9-r)^2}$

이때 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 9이고 두 원이 외접하므로

$\sqrt{(16-r)^2+(9-r)^2}=r+9$

양변을 제곱하여 정리하면

$(16-r)^2+(9-r)^2=(9+r)^2$

$r^2-68r+256=0$

$(r-4)(r-64)=0$

$r=4$ 또는 $r=64$

이때 $r\le 9$이므로 $r=4$

따라서 더 담으려고 하는 통조림통의 부피의 최댓값은

$\pi\times 4^2\times 15=240\pi$

K008 원의 성질을 활용하여 문제해결하기 정답 25

좌표평면 위에 두 원 [정답률 6%]

$C_1: x^2+(y-4)^2=4$
❷ 점 $P(x_1, y_1)$을 대입하면 식이 성립한다.

$C_2: (x-6)^2+(y-4+6\sqrt{3})^2=16$
❸ 점 $Q(x_2, y_2)$를 대입하면 식이 성립한다.

이 있다. 원 C_1 위를 움직이는 점 $P(x_1, y_1)$과 원 C_2 위를 움직이는 점 $Q(x_2, y_2)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x_1\le 1$, $\dfrac{2x_1+x_2}{3}=2$ ❶ 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 x좌표는 2이다.

(나) $y_1\le 4$, $y_2\ge 4-6\sqrt{3}$

선분 PQ가 그리는 도형의 넓이가 $a-b\pi$일 때, $a+9b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.) [4점] 25

Step ❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 구한다.

주어진 조건 (가)에 의하여

$\dfrac{2x_1+x_2}{3}=2$ ······ ㉠

$x_2=-2x_1+6$

이므로 점 $Q(x_2, y_2)$는 $Q(-2x_1+6, y_2)$이다.

점 Q는 원 C_2 위의 점이므로

$(-2x_1+6-6)^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$

$4x_1^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$

$x_1^2=4-\dfrac{1}{4}(y_2-4+6\sqrt{3})^2$ ······ ㉡

점 $P(x_1, y_1)$는 원 C_1 위의 점이므로

$x_1^2+(y_1-4)^2=4$

$x_1^2=4-(y_1-4)^2$ ······ ㉢

㉡, ㉢에 의하여

$(y_1-4)^2=\dfrac{1}{4}(y_2-4+6\sqrt{3})^2$

$|y_1-4|=\dfrac{1}{2}|y_2-4+6\sqrt{3}|$

조건 (나)에서 $y_1\le 4$이므로 $y_1-4\le 0$

또 조건 (나)에서 $y_2\ge 4-6\sqrt{3}$이므로 $y_2-4+6\sqrt{3}\ge 0$

따라서

$-(y_1-4)=\dfrac{1}{2}(y_2-4+6\sqrt{3})$

$-y_1+4=\dfrac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}$

$2y_1+y_2=12-6\sqrt{3}$

$\dfrac{2y_1+y_2}{3}=4-2\sqrt{3}$ ······ ㉣

㉠, ㉣에 의하여 선분 PQ를 1 : 2로 내분한 점의 좌표는

$(2,\ 4-2\sqrt{3})$

Step ❷ $x_1=0$, $x_1=1$일 때의 두 점 P, Q의 좌표를 구하고 문제에서 묻는 도형을 그려본다.

조건 (가)에서 $0\le x_1\le 1$이므로 $x_1=0$, $x_1=1$의 두 가지로 경우를 나누어 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

(i) $x_1=0$일 때 → 점 $P(x_1, y_1)$는 원 C_1 위의 점이다.

$x_1^2+(y_1-4)^2=4$에서

$0^2+(y_1-4)^2=4$

이때 $y_1\le 4$이므로 $y_1=2$

따라서 $P(0, 2)$

㉠에 $x_1=0$을 대입하면 $x_2=6$ → 점 $Q(x_2, y_2)$는 원 C_2 위의 점이다.

$(x_2-6)^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$에서

$(6-6)^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$

$(y_2-4+6\sqrt{3})^2=4^2$

$|y_2-4+6\sqrt{3}|=4$

이때 $y_2\ge 4-6\sqrt{3}$에서 $y_2-4+6\sqrt{3}\ge 0$이므로

$y_2-4+6\sqrt{3}=4$

$y_2=8-6\sqrt{3}$

따라서 $Q(6,\ 8-6\sqrt{3})$

(ii) $x_1=1$일 때 → 점 $P(x_1, y_1)$은 원 C_1 위의 점이다.

$x_1^2+(y_1-4)^2=4$에서

$1^2+(y_1-4)^2=4$

$(y_1-4)^2=(\sqrt{3})^2$

$|y_1-4|=\sqrt{3}$

이때 $y_1\le 4$에서 $y_1-4\le 0$이므로

$y_1-4=-\sqrt{3}$

$y_1=4-\sqrt{3}$

따라서 $P(1,\ 4-\sqrt{3})$

㉠에 $x_1=1$을 대입하면 $x_2=4$ → 점 $Q(x_2, y_2)$는 원 C_2 위의 점이다.

$(x_2-6)^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$에서

$(4-6)^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$

$(y_2-4+6\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3})^2$

$|y_2-4+6\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

이때 $y_2\ge 4-6\sqrt{3}$에서 $y_2-4+6\sqrt{3}\ge 0$이므로

$y_2-4+6\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, $y_2=4-4\sqrt{3}$

따라서 Q$(4,\ 4-4\sqrt{3})$

이때 직선 PQ의 방정식은

$$y-(4-\sqrt{3})=\frac{(4-4\sqrt{3})-(4-\sqrt{3})}{4-1}(x-1)$$

$y=-\sqrt{3}x+4$ ...... ㉤

이때 원 C_1의 중심은 $(0,\ 4)$이고 ㉤에 대입하면

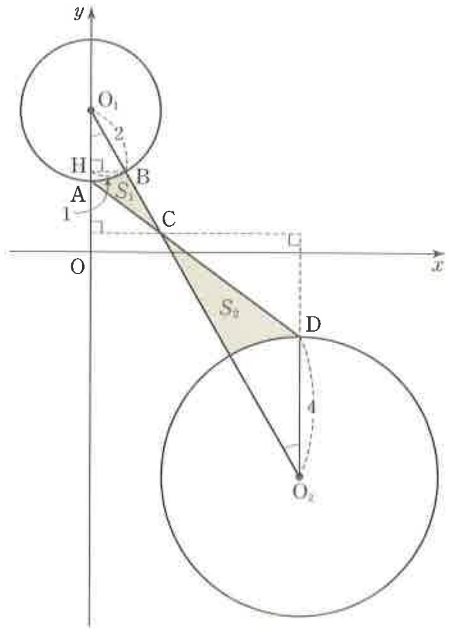
$4=-\sqrt{3}\times0+4$

이므로 등호가 성립한다. 또 원 C_2의 중심은 $(6,\ 4-6\sqrt{3})$이고 ㉤에 대입하면

$4-6\sqrt{3}=-\sqrt{3}\times6+4$

이므로 등호가 성립한다. 따라서 직선 PQ는 두 원 C_1, C_2의 중심을 지난다.

(i), (ii)에 의하여 선분 PQ가 그리는 도형의 넓이는 그림의 두 어두운 부분 S_1과 S_2의 넓이의 합과 같다.



Step ❸ 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 O_1HB의 세 변의 길이의 비가 $1:2:\sqrt{3}$임을 이용하여 $\angle BO_1H$의 크기를 구한다.

원 C_1의 중심을 $O_1(0,\ 4)$,

원 C_2의 중심을 $O_2(6,\ 4-6\sqrt{3})$,

$A(0,\ 2)$, $B(1,\ 4-\sqrt{3})$, $C(2,\ 4-2\sqrt{3})$, $D(6,\ 8-6\sqrt{3})$

이라 하자.

점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 점 H라 하면 삼각형 O_1HB는 직각삼각형이고

$\overline{BH}=1$, $\overline{O_1H}=\sqrt{3}$

따라서 $\angle HO_1B=30°$

Step ❹ S_1의 넓이를 구한다.

S_1의 넓이는 삼각형 O_1AC의 넓이에서 부채꼴 O_1AB의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$(S_1\text{의 넓이})=\triangle O_1AC-(\text{부채꼴 } O_1AB\text{의 넓이})$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)-\left(\pi\times2^2\times\frac{30°}{360°}\right)=2-\frac{\pi}{3}$$

Step ❺ 닮음비를 이용하여 S_2의 넓이를 구한다.

$\overline{O_1A}:\overline{O_2D}=1:2$이므로

삼각형 O_1AC와 삼각형 O_2DC는 닮음비가 $1:2$인 닮음삼각형이다.

즉 S_1과 S_2의 넓이의 비는 $1:4$이므로

닮음비가 $1:2$이면 넓이의 비는 $1:2^2$이고 부피의 비는 $1:2^3$이다.

$$(S_2\text{의 넓이})=4\times S_1=4\times\left(2-\frac{\pi}{3}\right)=8-\frac{4}{3}\pi$$

선분 PQ가 그리는 도형의 넓이는

$$(S_1\text{의 넓이})+(S_2\text{의 넓이})=\left(2-\frac{\pi}{3}\right)+\left(8-\frac{4}{3}\pi\right)=10-\frac{5}{3}\pi$$

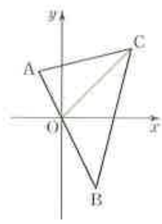
따라서 $a=10$, $b=\frac{5}{3}$이므로 $a+9b=25$

K009 각의 이등분선의 성질을 활용하여 문제해결하기 정답 180

그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(-2,\ 4)$, $B(3,\ -6)$, $C(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 각 ACB의 이등분선이 원점 O를 지날 때, 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오. [4점] [정답률 16%]

❶ $\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AO}:\overline{BO}$ 임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

180



Step ❶ 각의 이등분선의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 세우고 점 $C(a,\ b)$가 그리는 도형을 구한다.

$\overline{AO}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BO}=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AO}:\overline{BO}=2:3$

$3\overline{AC}=2\overline{BC}$

$3\sqrt{(a+2)^2+(b-4)^2}=2\sqrt{(a-3)^2+(b+6)^2}$

$5a^2+60a+5b^2-120b=0$

$(a+6)^2+(b-12)^2=180$

즉 점 $C(a,\ b)$는 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$ 위의 점이다.

(단, 점 $C(a,\ b)$는 직선 AB 위에 있지 않다.)

Step ❷ 원의 반지름의 길이를 이용하여 m^2의 값을 구한다.

이때 직선 AB의 방정식은

$$y-4=\frac{-6-4}{3-(-2)}(x+2)$$

$y=-2x$

이므로 원의 중심 $(-6,\ 12)$는 직선 AB 위의 점이다.

따라서 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값 m은 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$의 반지름의 길이와 같으므로

$m^2=180$

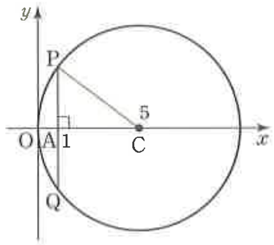
K010 원과 현의 성질을 활용하여 문제해결하기 　　정답 ③

좌표평면에 원 $x^2+y^2-10x=0$이 있다. 이 원의 현 중에서 　[정답률 59%]
❶ 원 $x^2+y^2-10x=0$의 현 중에서 점 A$(1, 0)$을 지나는 현을 그려 본다.
점 A$(1, 0)$을 지나고 그 길이가 자연수인 현의 개수는? [4점]
❷ 현의 길이가 자연수가 되는 경우를 찾는다.

① 6 　② 7 　❸ 8 　④ 9 　⑤ 10

Step ❶ 원과 점 A를 지나는 현을 그린다.

$x^2+y^2-10x=0$에서
$(x-5)^2+y^2=5^2$
그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 A$(1, 0)$을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

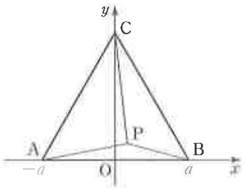


Step ❷ 현의 길이의 최솟값과 최댓값을 구한 후, 조건을 만족시키는 개수를 찾는다.

현 PQ의 길이가 최소일 때에는 $\overline{CA}\perp\overline{PQ}$일 때이고, 이때 $\overline{AP}=\overline{AQ}$이다.
직각삼각형 ACP에서 $\overline{CA}=4$, $\overline{CP}=5$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AP}=\sqrt{5^2-4^2}=3$
$\overline{PQ}=2\overline{AP}=6$
따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.
현 PQ의 길이가 최대일 때에는 현 PQ가 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.
따라서 현의 길이가 자연수인 경우는 6, 7, 8, 9, 10이다.
이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재한다.
따라서 구하는 현의 개수는
$3\times2+2\times1=8$

K011 원의 방정식을 이용하여 원의 성질 추론하기 　　정답 ④

다음은 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형 ABC의 내부의 점 P가 　[정답률 63%]
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$을 만족할 때, $\angle APB=150°$임을 보이는 과정이다.

> 그림과 같이 변 AB를 x축 위에 놓고 변 AB의 중점을 원점 O라 하면 점 A의 좌표는 $(-a, 0)$, 점 B의 좌표는 $(a, 0)$, 점 C의 좌표는 $(0, \boxed{\text{(가)}})$이다.
>
> 
>
>
> 정삼각형 ABC의 내부의 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
> $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$을 만족하므로
> $\{(x+a)^2+y^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}=x^2+(y-\boxed{\text{(가)}})^2$이다.
> 위 식을 정리하면 점 P는 중심이 점 $(0, \boxed{\text{(나)}})$이고, 반지름의 길이가 $\boxed{\text{(다)}}$인 원 위의 점이다.
> 점 $(0, \boxed{\text{(나)}})$에서 두 점 A, B까지의 거리가 각각 반지름의 길이 $\boxed{\text{(다)}}$로 같다.
> 따라서 점 P가 호 AB 위의 점이므로 $\angle APB=150°$이다.

❶ 점 P가 그리는 도형을 알아본다.
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$, $h(a)$라 할 때,
❷ $f(a)$, $g(a)$, $h(a)$의 식을 구하여 식의 값을 구한다.
$f(3)+g(3)+h(7)$의 값은? [4점]

① 11 　② 12 　③ 13 　❹ 14 　⑤ 15

Step ❶ 주어진 과정에 따라 □ 안에 알맞은 것을 구한다.

그림과 같이 변 AB를 x축 위에 놓고 변 AB의 중점을 원점 O라 하면 점 A의 좌표는 $(-a, 0)$, 점 B의 좌표는 $(a, 0)$, 점 C의 좌표는 $(0, \boxed{\sqrt{3}a})$이다. $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\times2a=\sqrt{3}a$
정삼각형 ABC의 내부의 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$을 만족하므로
$\{(x+a)^2+y^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}=x^2+(y-\boxed{\sqrt{3}a})^2$이다.
위 식을 정리하면
$x^2+(y+\sqrt{3}a)^2=4a^2$
점 P는 중심이 점 $(0, \boxed{-\sqrt{3}a})$이고 반지름의 길이가 $\boxed{2a}$인 원 위의 점이다.
점 $(0, \boxed{-\sqrt{3}a})$에서 두 점 A, B까지의 거리가 각각 반지름의 길이 $\boxed{2a}$로 같다.
따라서 점 P가 호 AB 위의 점이므로 $\angle APB=150°$이다.

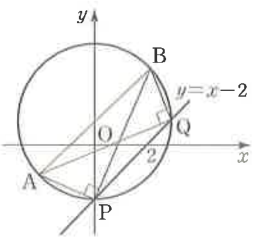
Step ❷ $f(a)$, $g(a)$, $h(a)$를 구하고 $f(3)+g(3)+h(7)$의 값을 구한다.

$f(a)=\sqrt{3}a$, $g(a)=-\sqrt{3}a$, $h(a)=2a$이므로
$f(3)+g(3)+h(7)=\sqrt{3}\times3+(-\sqrt{3})\times3+2\times7=14$

K012 원의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 18

좌표평면 위의 두 점 $A(-\sqrt{5}, -1)$, $B(\sqrt{5}, 3)$과 직선 [정답률 20%]
$y=x-2$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여
$\angle APB=\angle AQB=90°$일 때, 선분 PQ의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구
❶ 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 두 점 P, Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있음을 이용한다.
하시오. [4점] 18

Step ❶ 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타낸다.



$\angle APB=\angle AQB=90°$이므로 두 점 P, Q는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다. → 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

Step ❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구한 후 선분 PQ의 길이를 구한다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(0, 1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6$

따라서 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=9$

직선 $y=x-2$와 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 교점의 x좌표는

$x^2+(x-3)^2=9$에서 $2x^2-6x=0$, $2x(x-3)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=3$

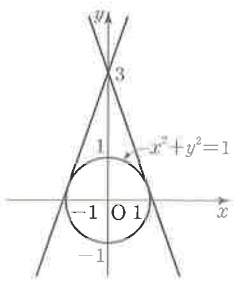
따라서 $P(0, -2)$, $Q(3, 1)$이므로

$l^2=\overline{PQ}^2=3^2+3^2=18$

K013 원과 직선의 위치 관계 이해하기 정답 18

점 $(0, 3)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 [정답률 48%]
점의 x좌표를 k라 할 때, $16k^2$의 값을 구하시오. [3점] 18
❶ 문제상황을 좌표평면에 그림으로 나타내어 본다.

Step ❶ 점 $(0, 3)$을 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+3$로 놓고 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.



점 $(0, 3)$을 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|m\times0-0+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$3=\sqrt{m^2+1}$, $m^2=8$

따라서 $m=2\sqrt{2}$ 또는 $m=-2\sqrt{2}$

Step ❷ 경우를 나누어 k^2의 값을 구한다.

(i) $m=2\sqrt{2}$일 때

접선의 방정식은 $y=2\sqrt{2}x+3$

x축과 만나는 점의 좌표는 $(k, 0)$이므로

$0=2\sqrt{2}k+3$, $k=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$

따라서 $k^2=\frac{9}{8}$

(ii) $m=-2\sqrt{2}$일 때

접선의 방정식은 $y=-2\sqrt{2}x+3$

x축과 만나는 점의 좌표는 $(k, 0)$이므로

$0=-2\sqrt{2}k+3$, $k=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

따라서 $k^2=\frac{9}{8}$

(i), (ii)에 의하여 $16k^2=16\times\frac{9}{8}=18$

K014 원과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 ⑤

좌표평면 위에 원 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=4$와 두 점 [정답률 33%]
$A(4, 3)$, $B(1, 7)$이 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심과 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은? [4점]
❶ $P(a, b)$로 놓으면 삼각형 PAB의 무게중심은 $\left(\frac{a+4+1}{3}, \frac{b+3+7}{3}\right)$이다.

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

Step ❶ 삼각형 PAB의 무게중심이 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

원 C 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a+4+1}{3}$, $y=\frac{b+3+7}{3}$

$a=3x-5$, $b=3y-10$ …… ㉠

점 P는 원 C 위의 점이므로

$(a-1)^2+(b-2)^2=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(x-2)^2+(y-4)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Step ❷ 직선 AB의 방정식을 구한다.

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{3-7}{4-1}(x-1)+7$, $3y=-4(x-1)+21$

따라서 $4x+3y-25=0$

Step ③ 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 원의 중심과 직선 사이의 거리에서 반지름의 길이를 뺀 것임을 이용한다.

삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원의 중심 $(2,\ 4)$와 직선 AB 사이의 거리는

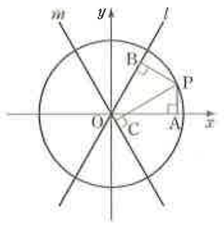
$$\frac{|4\times2+3\times4-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

구하고자 하는 거리의 최솟값은 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원과 직선 AB 사이의 최단거리이므로

$$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

K015 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기 정답 ⑤

그림과 같이 좌표평면에서 원점을 지나는 직선 l이 x축과 이루는 각의 크기가 $60°$이고, 직선 l을 y축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m이 있다. 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하자. 다음은 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\boxed{(다)}$를 구하는 과정이다. (단, 점 P는 직선 l 위에 있지 않다.) [정답률 58%]



직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고 ❶ 직선 l에서 x 대신 $-x$를 대입한다.
직선 m의 방정식은 $y=\boxed{(가)}x$이다.
원 위의 제1사분면에 있는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면
$a>0$, $b>0$이고 $a^2+b^2=r^2$이다.
점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로
$\overline{PA}=b$
$\overline{PB}=\dfrac{|\sqrt{3}a-b|}{\boxed{(나)}}$ ❷ 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.
$\overline{PC}=\dfrac{|\sqrt{3}a+b|}{\boxed{(나)}}$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 s, t라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(r)$라 할 때, $f(s\times t)$의 값은? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

Step ① 직선 m의 방정식을 구한다.

직선 l이 x축과 이루는 각의 크기가 $60°$이므로 직선 l의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-y=0$이고

직선 l을 y축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m의 방정식은

$y=\boxed{-\sqrt{3}}x$, 즉 $\sqrt{3}x+y=0$이다.

Step ② 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 (나)에 알맞은 수를 구한다.

원 위의 제1사분면에 있는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $a>0$, $b>0$이고 $a^2+b^2=r^2$이다.

점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로

$\overline{PA}=b$

$\overline{PB}=\dfrac{|\sqrt{3}a-b|}{\boxed{2}}$

$\overline{PC}=\dfrac{|\sqrt{3}a+b|}{\boxed{2}}$

따라서

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=b^2+\dfrac{3a^2-2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+\dfrac{3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{3}{2}(a^2+b^2)$

$=\boxed{\dfrac{3}{2}r^2}$

즉 $s=-\sqrt{3}$, $t=2$, $f(r)=\dfrac{3}{2}r^2$이므로

$f(s\times t)=f(-2\sqrt{3})=18$

K016 원과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 22

좌표평면 위의 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대인 직선을 l이라 하자. [정답률 26%]
❶ 직선 l의 방정식을 구한다.
원 $(x-7)^2+(y-5)^2=1$ 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값을 m이
❷ 원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 l 사이의 거리를 이용한다.
라 할 때, $10m$의 값을 구하시오. [4점] 22

Step ① 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선과 수직임을 이용한다.

원점에서의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선과 수직으로 만나야 한다.

점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식을

$y=a(x-3)+4$라 하면

원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이므로

$a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-\dfrac{3}{4}(x-3)+4$, 즉 $3x+4y-25=0$

Step ② 원의 중심과 직선 l 사이의 거리를 이용하여 m의 값을 구한다.

원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

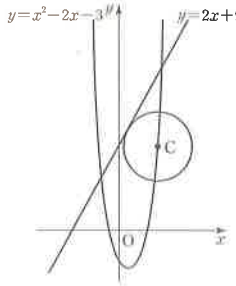
이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

따라서 $10m=22$

K017 이차함수의 그래프와 원과 직선의 위치 관계 문제해결하기 정답 ③

이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프 위의 점 C의 좌표를 [정답률 44%]
❶ 점 C의 좌표를 구하고 점 C에서 직선까지의 거리를 구한다.
C$(a,\ b)$라 하자. $2a-b+9>0$을 만족시키는 점 C를 중심으로 하고 직선 $y=2x+9$에 접하는 원의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값은?
❷ 원의 반지름의 길이의 최댓값을 구한다.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



① 257 ② 259 ③ 261 ④ 263 ⑤ 265

Step ❶ 원의 중심의 좌표와 원의 중심에서 직선까지의 거리를 구한다.

점 C는 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프 위의 점이므로 원의 중심은 C$(a,\ a^2-2a-3)$이다.
구하는 원은 직선 $y=2x+9$에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같다.

$$r=\frac{|2a-(a^2-2a-3)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|-a^2+4a+12|}{\sqrt{5}}$$

Step ❷ 원의 반지름의 길이의 최댓값을 구하고 그 넓이를 구한다.

이때 점 C$(a,\ b)$는 주어진 조건 $2a-b+9>0$에 의하여 이차함수 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=2x+9$의 두 교점 사이에 있으므로
$-2<a<6$
→ $x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=6$
$-a^2+4a+12>0$이므로

$$r=\frac{-a^2+4a+12}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a-2)^2+\frac{16}{\sqrt{5}}$$

그러므로 $a=2$일 때 반지름의 길이 r의 최댓값은 $\frac{16}{\sqrt{5}}$이므로 원의 넓이의 최댓값은 $\frac{256}{5}\pi$이다.
따라서 $p+q=5+256=261$

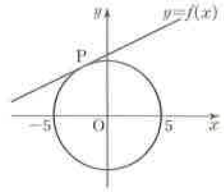
다른 풀이

원의 반지름의 길이는 원의 중심 C와 직선 $y=2x+9$ 사이의 거리와 같다.
점 C를 지나는 직선 $y=2x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프와 접할 때 원의 반지름의 길이가 최대가 되고 원의 넓이도 최대이다.
따라서 $x^2-2x-3=2x+k$가 중근을 가져야 하므로
$x^2-4x-3-k=0$에서 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=2^2+3+k=0$$
따라서 $k=-7$

넓이가 최대인 원의 반지름의 길이는 두 직선 $y=2x-7$과 $y=2x+9$ 사이의 거리이다.
두 직선 사이의 거리는 $y=2x-7$ 위의 점 $(0,\ -7)$에서 직선 $y=2x+9$까지의 거리와 같다.
$$\frac{|0+7+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{16}{\sqrt{5}}$$
따라서 원의 넓이의 최댓값은 $\frac{256}{5}\pi$이다.
따라서 $p+q=5+256=261$

K018 원과 직선의 위치 관계 이해하기 정답 25

그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$와 직선 $y=f(x)$가 제2사분면에 있는 원 위의 점 P에서 접할 때, $f(-5)f(5)$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 41%] 25
❶ 원과 직선이 접하므로 두 식을 연립한 이차방정식의 판별식 $D=0$임을 이용한다.



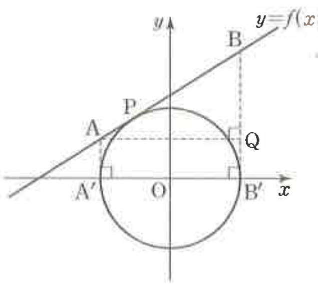
Step ❶ 직선을 $y=ax+b$로 놓고 원과 직선을 연립하여 판별식 D를 이용한다.

$f(x)=ax+b$라 하면 직선 $y=ax+b$와 원 $x^2+y^2=25$가 접하므로 이차방정식 $x^2+(ax+b)^2=25$는 중근을 가진다.
$(a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=a^2b^2-(a^2+1)(b^2-25)$$
$$=25a^2-b^2+25=0$$
이므로 $b^2=25a^2+25$
따라서
$$f(-5)f(5)=(-5a+b)(5a+b)$$
$$=b^2-25a^2=25$$

해검단 TALK

원과 직선의 위치 관계를 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구할 수도 있어.
직선 $y=ax+b$와 원 $x^2+y^2=25$가 접하므로 원점에서 직선 $ax-y+b=0$까지의 거리는 반지름의 길이 5이다. 즉
$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=5$$
$5\sqrt{a^2+1}=|b|$
$25(a^2+1)=b^2$
$b^2-25a^2=25$

다른 풀이



두 점 $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$을 각각 A', B'이라 하고 두 직선 $x=-5$, $x=5$와 직선 $y=f(x)$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(-5,\ f(-5))$, $B(5,\ f(5))$이고

$\overline{AA'}=f(-5)$, $\overline{BB'}=f(5)$

점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 BB'과 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{AB}=\overline{AA'}+\overline{BB'}=f(-5)+f(5)$, $\overline{BQ}=f(5)-f(-5)$, $\overline{AQ}=10$

이므로 직각삼각형 AQB에서

$\{f(-5)+f(5)\}^2=\{f(5)-f(-5)\}^2+10^2$

$\{f(-5)\}^2+2f(-5)f(5)+\{f(5)\}^2$

$=\{f(-5)\}^2-2f(-5)f(5)+\{f(5)\}^2+100$

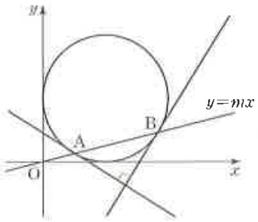
$4f(-5)f(5)=100$

따라서 $f(-5)f(5)=25$

K019 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 원의 방정식 문제해결하기 정답 ⑤

좌표평면에서 중심이 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원과 [정답률 53%]
직선 $y=mx$ $(m>0)$가 두 점 A, B에서 만난다.
두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합은? [4점]

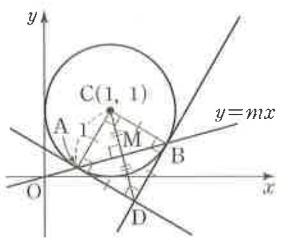
❶ 원의 중심과 AB의 중점 사이의 거리는 원의 중심과 직선 $y=mx$ 사이의 거리와 같음을 이용한다.



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

Step ❶ 원의 중심과 $\overline{AB}$의 중점 사이의 거리를 구한다.

원의 중심을 C, $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하고, 두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선의 교점을 D라 하자.



원의 중심과 접점을 연결한 선분은 접선에 수직이고

$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{CA}=\overline{CB}=1$이므로 사각형 ADBC는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

$\overline{CD}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 m의 값을 구한다.

점 C와 직선 $y=mx$ 사이의 거리가 $\overline{CM}$의 길이와 같으므로

$\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-4m+1=0$

$4^2-4\times1\times1>0$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 m의 값의 합은 4이다.

다른 풀이

중심이 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha,\ m\alpha)$, $(\beta,\ m\beta)$라 하자.

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$과 $y=mx$를 연립하면

$(x-1)^2+(mx-1)^2=1$

$(1+m^2)x^2-2(1+m)x+1=0$ …… ㉠

㉠의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2(1+m)}{1+m^2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{1+m^2}$ …… ㉡

원의 중심을 C라 하고, 두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선의 교점을 D라 하자.

원의 중심과 접점을 연결한 선분은 접선에 수직이다.

또 접선의 길이는 서로 같으므로 사각형 ADBC는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

따라서 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$이므로

$\frac{m\alpha-1}{\alpha-1}\times\frac{m\beta-1}{\beta-1}=-1$

$(1+m^2)\alpha\beta-(1+m)(\alpha+\beta)+2=0$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1-\frac{2(1+m)^2}{1+m^2}+2=0$

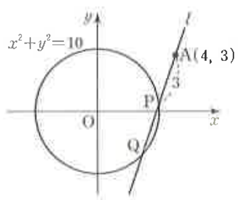
$m^2-4m+1=0$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 m의 값의 합은 4이다.

K020 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기 정답 ②

그림과 같이 점 $A(4,\ 3)$을 지나고 기울기가 양수인 [정답률 45%]
직선 l이 원 $x^2+y^2=10$과 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{AP}=3$일 때, 직선 l의 기울기는? [4점]

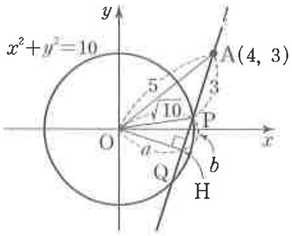
❶ 원의 중심과 직선 l 사이의 거리를 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.



① $\frac{23}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{25}{7}$ ④ $\frac{26}{7}$ ⑤ $\frac{27}{7}$

Step ❶ 도형의 성질을 이용하여 원의 중심에서 직선 l 사이의 거리를 구한다.

원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\text{OH}}=a$, $\overline{\text{HP}}=b$라 하면 두 삼각형 OHP, OHA는 모두 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=10$ …… ㉠

$a^2+(b+3)^2=25$ …… ㉡

$a>0$이므로 ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 직선 l의 기울기를 구한다.

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-4)+3$

원의 중심 O와 직선 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$, $|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16m^2-24m+9=9m^2+9$

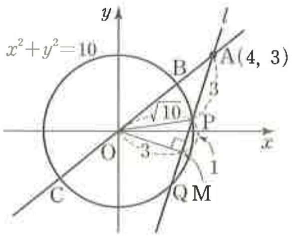
$7m^2-24m=0$, $m(7m-24)=0$

$m=0$ 또는 $m=\dfrac{24}{7}$

직선 l의 기울기는 양수이므로 $m=\dfrac{24}{7}$

다른 풀이 1

직선 AO와 원의 교점을 그림과 같이 각각 B, C라 하면



$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AO}}-\overline{\text{OB}}=5-\sqrt{10}$

$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{AO}}+\overline{\text{OC}}=5+\sqrt{10}$

원의 성질에 의하여 $\overline{\text{AP}}\times\overline{\text{AQ}}=\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{AC}}$

$3\times\overline{\text{AQ}}=(5-\sqrt{10})(5+\sqrt{10})$

$\overline{\text{AQ}}=5$

$\overline{\text{PQ}}=5-3=2$이고 현 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{\text{PM}}=1$

직각삼각형 OMP에서

$\overline{\text{OM}}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-4)+3$

원의 중심 O와 직선 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$m=0$ 또는 $m=\dfrac{24}{7}$

직선 l의 기울기는 양수이므로 $m=\dfrac{24}{7}$

다른 풀이 2

점 P의 좌표를 P(a, b)라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=10$ …… ㉠

선분 AP의 길이는 3이므로

$(a-4)^2+(b-3)^2=9$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{79}{25}$, $b=\dfrac{3}{25}$ 또는 $a=1$, $b=3$

직선 l의 기울기는 양수이므로 $a=\dfrac{79}{25}$, $b=\dfrac{3}{25}$

따라서 직선 l의 기울기는

$\dfrac{3-b}{4-a}=\dfrac{3-\frac{3}{25}}{4-\frac{79}{25}}=\dfrac{72}{21}=\dfrac{24}{7}$

K021 원과 직선의 위치 관계 이용하기

정답 200

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 중에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원은 2개이다. 두 원의 반지름의 길이를 각각 a, b라 할 때, $100ab$의 값을 구하시오. [4점] [정답률 29%]

❶ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 정한다.

❷ (원의 중심과 직선 사이의 거리)=(반지름의 길이) 임을 이용한다.

200

Step ❶ 조건을 만족시키는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 정한다.

원의 중심이 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (n, n^2)이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다.

Step ❷ 원이 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접함을 이용하여 식을 세운다.

원의 중심에서 직선 $\sqrt{3}x-y-2=0$까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{3+1}}=|n|$

$n^2-\sqrt{3}n+2=\pm 2n$

이때 실근을 갖는 이차방정식은

$n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$ ↳ 판별식 $D\geq 0$인 경우이다.

이 이차방정식의 두 근이 a, b이므로 $ab=2$

따라서 $100ab=200$

실전 솔루션

원의 중심이 (a, b)이고

❶ x축에 접하면 ⇨ (반지름의 길이)$=|b|$이므로 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

❷ y축에 접하면 ⇨ (반지름의 길이)$=|a|$이므로 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

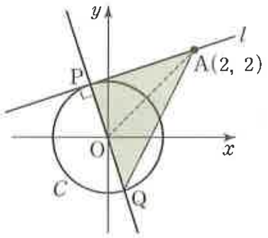
❸ x축과 y축에 동시에 접하면 ⇨ (반지름의 길이)$=|a|=|b|$이므로 $(x\pm a)^2+(y\pm a)^2=a^2$

K022 원의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ④

좌표평면 위에 원 $C: x^2+y^2=r^2$ $(0<r<2\sqrt{2})$와 [정답률 27%]
점 A(2, 2)가 있다. 점 A에서 원 C에 그은 접선 l이 원 C와 만나는 접점을 P라 하고, 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 원 C와 만나는 다른 한 점
❶ 선분 PQ는 원의 중심을 지나므로 $\overline{PQ}=2r$이다.
을 Q라 하자. 삼각형 APQ가 이등변삼각형이 되도록 하는 점 P의 좌표를
❷ 삼각형 APQ는 $\angle APQ=90°$인 직각이등변삼각형이다.
(a, b)라 할 때, $a\times b$의 값은? [4점]

① $-\frac{18}{25}$ ② $-\frac{16}{25}$ ③ $-\frac{14}{25}$ ④ $-\frac{12}{25}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

Step ❶ 문제 상황을 그림으로 그려보면 삼각형 APQ가 $\overline{AQ}$를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형이어야 함을 알 수 있다. 이를 이용하여 삼각형 APQ의 각 변의 길이를 반지름 r에 대한 식으로 나타낸다.



원 C의 반지름의 길이가 r이고 선분 PQ가 원 C의 지름이므로
$\overline{PQ}=2r$, $\overline{OP}=r$
삼각형 APQ가 이등변삼각형이고 $\angle APQ=90°$이므로
$\overline{PA}=2r$

Step ❷ 삼각형 APO에서 피타고라스 정리를 이용하여 r^2의 값을 구한다.

두 점 사이의 거리 구하는 공식에 의하여
$\overline{OA}=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$
삼각형 APO에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$
$8=r^2+4r^2$
$r^2=\frac{8}{5}$
따라서 원 C의 방정식은 $x^2+y^2=\frac{8}{5}$

Step ❸ 점 P가 원 C 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

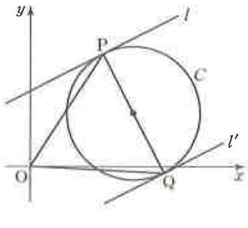
이때 점 P(a, b)는 원 C 위의 점이므로
$a^2+b^2=\frac{8}{5}$ …… ㉠

Step ❹ 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 P(x_1, y_1)에서의 접선의 방정식이 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용한다.

원 $x^2+y^2=\frac{8}{5}$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은
$ax+by=\frac{8}{5}$
이 접선의 방정식이 점 A(2, 2)를 지나므로 $2a+2b=\frac{8}{5}$
$a+b=\frac{4}{5}$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$
$=\frac{16}{25}-\frac{8}{5}=-\frac{24}{25}$
따라서 $ab=-\frac{12}{25}$

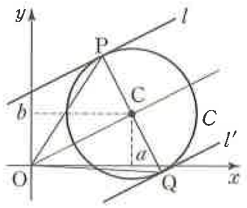
K023 원의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ①

그림과 같이 좌표평면에서 직선 $l: x-2y+5=0$이 원 C와 [정답률 26%]
❶ 선분 PQ는 원 C의 지름이다.
점 P에서 접하고, 직선 l과 평행한 직선 l'이 원 C와 점 Q에서 접한다. 삼각형 POQ가 정삼각형이 되도록 하는 원 C의 중심이 점 (a, b)일 때, $a+b$의
❷ 점 O에서 변 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 PQ를 수직이등분한다.
또한 $\overline{PQ}=a$일 때 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.
값은? (단, a, b는 양수이고, O는 원점이다.) [4점]



① $3\sqrt{3}$ ② 6 ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

Step ❶ 두 점 P, Q의 중점을 C라 하면 점 C는 원의 중심이고 $\overline{OC}$는 두 직선 l, l'과 평행함을 이용한다.



평행한 두 직선 l, l'이 원 C의 접선이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이고 원 C의 중심인 점 C(a, b)는 선분 PQ의 중점이다.
삼각형 POQ가 정삼각형이므로 직선 OC가 선분 PQ를 수직이등분한다. → 정삼각형은 이등변삼각형이고 이등변삼각형에서 꼭짓점과 밑변의 중점을 이은 선분은 밑변을 수직이등분한다.
그러므로 직선 OC는 직선 l과 평행하다. → 동위각(또는 엇각)이 같으면 평행하다.
직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 직선 OC의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.
또한 직선 OC는 원점을 지나므로 직선 OC의 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{2}x$

Step ❷ 점 C(a, b)가 직선 OC 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

점 C(a, b)가 직선 OC 위의 점이므로
$b=\frac{1}{2}a$ …… ㉠

Step ❸ 선분 $\overline{OC}$의 길이를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구하고 앞에서 구한 식과 연립한다.

원점 O와 직선 $l: x-2y+5=0$ 사이의 거리를 d라 하면
$d=\frac{|0-2\times0+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$
이고 d는 원 C의 반지름의 길이와 같다.
삼각형 POC는 세 내각의 크기가, 30°, 60°, 90°인 삼각형이므로
$\overline{OC}=\sqrt{3}\times d=\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$
두 점 O(0, 0), C(a, b) 사이의 거리 구하는 공식에 의하여
$\overline{OC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$
$a^2+b^2=15$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=15$

$\frac{5}{4}a^2=15$

$a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

따라서 $a+b=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

K024 원의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ④

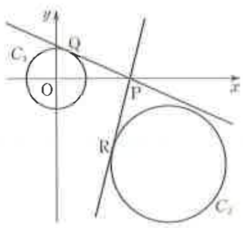
좌표평면에 두 원 [정답률 49%]

$C_1: x^2+y^2=1$, $C_2: x^2+y^2-8x+6y+21=0$

이 있다. 그림과 같이 x축 위의 점 P에서 원 C_1에 그은 한 접선의 접점을 Q,

❶ P$(a, 0)$으로 놓고 피타고라스 정리와 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$을 이용한다.

점 P에서 원 C_2에 그은 한 접선의 접점을 R라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PR}$일 때, 점 P의 x좌표는? [4점]



① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$ ❹ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

Step ❶ 점 P의 좌표를 P$(a, 0)$으로 놓고 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PQ}^2$과 $\overline{PR}^2$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 P$(a, 0)$이라 하자.

직각삼각형 OPQ에서 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2$

$=a^2-1$

$C_2: x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=2^2$

원 C_2는 중심이 $(4, -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 C_2의 중심을 A라 하면 A$(4, -3)$이다.

직각삼각형 APR에서 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2$

$=\{(a-4)^2+(0+3)^2\}-2^2$

$=a^2-8a+21$

Step ❷ $\overline{PQ}=\overline{PR}$임을 이용하여 점 P의 x좌표를 구한다.

$\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

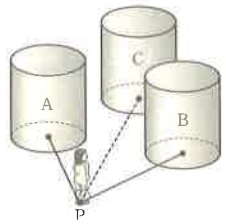
$a^2-1=a^2-8a+21$

$8a=22$

따라서 $a=\frac{11}{4}$

K025 원의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 ⑤

다음은 어떤 전시장에 밑면의 반지름의 길이가 1 m인 원기둥 모양의 세 전시물 A, B, C를 설치하는 방법이다. [정답률 30%]



❶ 관람지점 P를 원점으로 놓고 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타낸다.

(가) 관람지점 P에서 전시물 A, B의 밑면의 중심까지의 거리가 각각 2 m이고, 관람지점 P와 전시물 A, B의 밑면의 중심을 연결한 두 직선이 서로 수직이 되도록 전시물 A, B를 설치한다.

(나) 관람자가 관람지점 P에서 전시물 A, B 사이로 전시물 C를 보았을 때, 전시물 C가 전시물 A, B에 의해 가려지는 부분이 없도록 전시물 C를 설치한다.

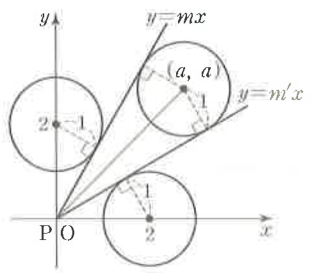
관람지점 P로부터 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리를 d(m)라 할 때, d

❷ 전시물 C의 밑면의 중심의 좌표를 (a, a)로 놓고 d의 최솟값을 구한다.

의 최솟값은? (단, 관람자의 시선은 전시장의 바닥과 평행하고, 전시물의 높이는 관람자의 시선보다 높다.) [4점]

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}+2$ ④ $\sqrt{6}+1$ ❺ $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

Step ❶ 관람지점 P를 원점으로 놓고 주어진 전시물 A, B의 밑면을 좌표평면 위에 나타낸다.



그림과 같이 관람지점 P를 좌표평면 위의 원점, 전시물 A, B의 밑면의 중심을 각각 y축, x축 위에 놓으면 전시물 A의 밑면은 중심이 $(0, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이고, 전시물 B의 밑면은 중심이 $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

Step ❷ 접선을 이용하여 전시물 C가 보여야 할 조건을 찾는다.

두 전시물 A, B 사이로 전시물 C가 보여야 하므로 원점에서 두 전시물 A, B의 밑면에 그은 두 접선 $y=mx$와 $y=m'x$ 사이에 전시물 C의 밑면이 존재해야 한다. (단, $m>0$, $m'>0$)

전시물 A의 밑면의 중심 $(0, 2)$에서 직선 $y=mx$까지의 거리는 1이므로

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1$, $m=\sqrt{3}$

전시물 B의 밑면의 중심 $(2, 0)$에서 직선 $y=m'x$까지의 거리는 1이므로

$\frac{|2m'|}{\sqrt{m'^2+1}}=1$, $m'=\frac{1}{\sqrt{3}}$

이때 원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리가 최소가 되려면 전시물 C의 밑면이 두 접선에 모두 접해야 한다.

따라서 전시물 C의 밑면은 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 접선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$에 모두 접하는 반지름의 길이가 1인 원이다.

Step ❸ 전시물 C의 밑면의 중심과 접선 사이의 거리를 이용하여 d의 최솟값을 구한다.

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 중심에서 두 접선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$까지의 거리는 각각 반지름의 길이와 같으므로

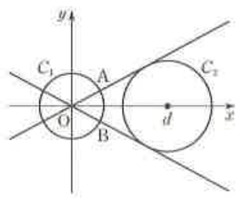
$$\frac{|a-\sqrt{3}a|}{\sqrt{1+3}}=\frac{|\sqrt{3}a-a|}{\sqrt{3+1}}=1$$

따라서 $a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

이때 원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리는 $\sqrt{2}a$이므로 d의 최솟값은 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$이다.

K026 원과 접선의 방정식의 관계 추론하기 정답 ②

그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 a인 원 C_1과 중심이 $(d,\ 0)$이고 반지름의 길이가 r인 원 C_2가 있다. 원점 O에서 원 C_2에 그은 두 접선과 원 C_1의 교점 중 x좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자. 다음은 선분 AB의 길이를 구하는 과정이다. (단, $d>r$) [정답률 50%]



원점 O에서 원 C_2에 그은 접선을

$y=mx$ …… ㉠

라 하자.

점 $(d,\ 0)$과 직선 $y=mx$ 사이의 거리는 r이므로

$r^2(m^2+1)=d^2\times\boxed{(가)}$ …… ㉡

❶ 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

이 성립한다.

또, ㉠과 원 C_1의 방정식에서

$y^2\times\boxed{(나)}=m^2a^2$ …… ㉢

❷ 원 C_1의 방정식 $x^2+y^2=a^2$과 직선 $y=mx$를 연립한다.

이 성립한다.

㉡, ㉢에서 두 교점의 y좌표는 각각 $\frac{ar}{d}$, $-\frac{ar}{d}$이다.

따라서 선분 AB의 길이는 $\frac{2ar}{d}$이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(2)\times g(3)$의 값은? [4점]

① 36 ❷ 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

Step ❶ 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 (가)를 구한다.

원점 O에서 원 C_2에 그은 접선은

$y=mx$ …… ㉠

점 $(d,\ 0)$과 직선 $y=mx$ 사이의 거리는 r이므로

$$\frac{|dm|}{\sqrt{m^2+1}}=r$$

$r\sqrt{m^2+1}=|dm|$

$r^2(m^2+1)=d^2\times\boxed{m^2}$ …… ㉡

Step ❷ 접선의 방정식과 C_1의 방정식을 연립하여 (나)를 구한다.

원 C_1의 방정식은

$x^2+y^2=a^2$

양변에 m^2을 곱하면

$m^2x^2+m^2y^2=m^2a^2$

㉠에서 $y^2=m^2x^2$이므로

$y^2+m^2y^2=m^2a^2$

$y^2\times\boxed{(m^2+1)}=m^2a^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $y^2=\frac{a^2r^2}{d^2}$이므로 $y=\pm\frac{ar}{d}$

즉 두 교점의 y좌표는 각각 $\frac{ar}{d}$, $-\frac{ar}{d}$이다.

따라서 선분 AB의 길이는 $\frac{ar}{d}-\left(-\frac{ar}{d}\right)=\frac{2ar}{d}$이다.

따라서 $f(m)=m^2$, $g(m)=m^2+1$이므로

$f(2)\times g(3)=4\times10=40$

K027 원의 방정식을 활용하여 최솟값 문제해결하기 정답 ⑤

두 실수 x, y가 등식 $(x-y-3)(x+y-2)=0$을 만족시킬 때, [정답률 62%]

❶ $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용한다.

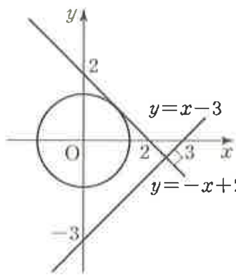
$6(x^2+y^2)$의 최솟값은? [4점]

❷ $x^2+y^2=k$로 놓고 원의 방정식을 이용하여 $6(x^2+y^2)$의 최솟값을 구한다.

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ❺ 12

Step ❶ $(x-y-3)(x+y-2)=0$이면 $x-y-3=0$ 또는 $x+y-2=0$임을 이용하여 두 직선을 좌표평면 위에 나타낸다.

주어진 등식 $(x-y-3)(x+y-2)=0$을 만족시키는 도형은 그림의 두 직선과 같다.



Step ❷ $x^2+y^2=k$로 놓고 원의 방정식을 이용하여 k의 값이 최소가 되는 경우를 찾는다.

$x^2+y^2=k$로 놓으면 점 $(x,\ y)$는 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원 위의 점이다.

따라서 원이 직선 $y=-x+2$에 접할 때 k의 값이 최소이다.

Step ❸ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 $6(x^2+y^2)$의 최솟값을 구한다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-x+2$, 즉 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$이므로

$\sqrt{k}\geq\sqrt{2}$

따라서 $6(x^2+y^2)=6k\geq 12$이므로 $6(x^2+y^2)$의 최솟값은 12이다.

K028 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기 정답 20

좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$와 함수 $y=m|x|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 정수 m의 값의 합을 구하시오. [4점] [정답률 31%]

20

❶ 원과 직선 $y=kx$ (k는 상수)가 접하기 위한 조건을 이용하여 m의 값을 구한다.

Step ❶ 원점을 지나는 직선이 주어진 원과 접하기 위한 조건을 찾아 좌표평면 위에 나타낸다.

직선 $y=kx$ (k는 실수)가 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$에 접하기 위한 조건은 방정식

$(x-1)^2+(kx-3)^2=2$ …… ㉠

가 중근을 가질 때이다.

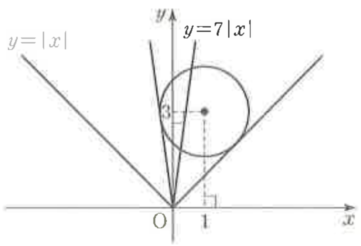
㉠에서 $(k^2+1)x^2-2(3k+1)x+8=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(3k+1)^2-8(k^2+1)=0$

$k^2+6k-7=0$, $(k+7)(k-1)=0$

$k=-7$ 또는 $k=1$

Step ❷ 주어진 원과 $y=m|x|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 m의 값의 범위를 구한다.



그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$와 $y=m|x|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 m의 값의 범위는 $1<m<7$이다.

따라서 모든 정수 m의 값의 합은 20이다.

K029 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식 구하기 정답 ②

원 $x^2+y^2-2x-4y-7=0$의 내부의 넓이와 [정답률 84%]

❶ 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

네 직선 $x=-6$, $x=0$, $y=-4$, $y=-2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 모

❷ 직선이 직사각형의 넓이를 이등분하려면 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 이등분하는 직선의 방정식은? [4점]

① $y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{6}{5}$ ❷ $y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$ ③ $y=\dfrac{8}{5}x+\dfrac{2}{5}$

④ $y=4x-2$ ⑤ $y=5x-3$

Step ❶ 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형하고, 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나야 함을 이용한다.

원 $x^2+y^2-2x-4y-7=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=12$

이때 이 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심 $(1, 2)$를 지나야 한다.

Step ❷ 직사각형의 두 대각선의 교점은 $\left(\dfrac{-6+0}{2}, \dfrac{-4+(-2)}{2}\right)$임을 이용한다.

한편 네 직선 $x=-6$, $x=0$, $y=-4$, $y=-2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점 $(-3, -3)$을 지나야 한다.

Step ❸ 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$임을 이용한다.

그러므로 두 점 $(1, 2)$와 $(-3, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

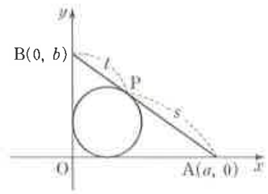
$y-2=\dfrac{-3-2}{-3-1}(x-1)$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$이다.

K030 원의 접선의 성질을 이용하여 추론하기 정답 ⑤

그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위의 점 P에서 그은 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 $A(a, 0)$, $B(0, b)$라 하고 $\overline{AP}=s$, $\overline{BP}=t$라 하자. 〈보기〉에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [정답률 22%]

(단, $a>2$, $b>2$) [4점]



〈보기〉

ㄱ. $s:t=a:b$

ㄴ. $ab=14$이면 $a+b=8$이다.

ㄷ. 삼각형 OAB의 넓이는 st이다.

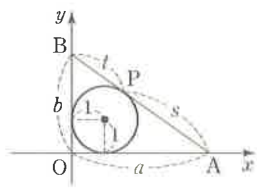
❶ 원의 중심에서 세 접점과 삼각형 OAB의 세 꼭짓점을 각각 선으로 이으면 합동인 세 쌍의 삼각형이 생긴다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ❺ ㄴ, ㄷ

Step ❶ 삼각형 OAB에서 두 선분 AP, BP와 길이가 같은 선분을 찾아본다.

원 밖의 점에서 원에 그은 두 접선의 접점까지의 거리는 같으므로

$\overline{AP}=s=a-1$, $\overline{BP}=t=b-1$



ㄱ. $s:t=(a-1):(b-1)$ (거짓)

Step ❷ 삼각형 OAB에서 피타고라스 정리를 이용한다.

ㄴ. $\overline{AB}=s+t=(a-1)+(b-1)=a+b-2$

삼각형 OAB에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=(a+b-2)^2$

$\frac{1}{2}ab=a+b-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서 $ab=14$이면 $a+b=8$이다. (참)

Step ❸ 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times b$이므로 $\frac{1}{2}ab=st$가 성립하는지 확인한다.

ㄷ. $st=(a-1)(b-1)=ab-a-b+1$

$=ab-\frac{1}{2}ab$ (㉠에 의하여)

$=\frac{1}{2}ab$

이므로 삼각형 OAB의 넓이는 st이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

K031 원과 직선의 위치 관계 문제해결하기 정답 70

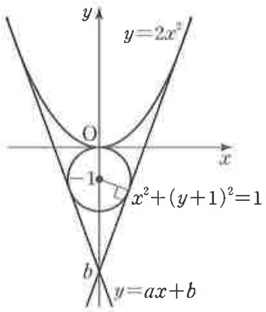
이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 원 $x^2+(y+1)^2=1$에 동시에 [정답률 23%]

❶ (판별식)=0 ❷ 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같다.

접하는 직선이 $y=ax+b$일 때, a^2+b의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이고 $b<0$이다.) [4점] 70

Step ❶ 직선의 방정식과 이차함수의 식을 연립한 이차식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.



직선 $y=ax+b$가 이차함수 $y=2x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-ax-b=0$의 판별식 $D=0$이다.

$a^2-4\times2\times(-b)=0$

$a^2=-8b$ $\cdots\cdots$ ㉠

Step ❷ 원의 중심 $(0,\ -1)$과 직선 $y=ax+b$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 1과 같아야 한다.

또 직선 $y=ax+b$가 원 $x^2+(y+1)^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ -1)$에서 직선 $ax-y+b=0$까지의 거리는 반지름의 길이 1이다.

즉 $\frac{|1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$

$a^2+1=b^2+2b+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-10$ $(b<0)$

$a^2=80$

따라서 $a^2+b=70$

K032 원과 직선이 접할 조건 이해하기 정답 7

좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=ax+2\sqrt{b}$가 접하도 [정답률 41%]

❶ 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립한 이차식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

록 하는 b의 모든 값의 합을 구하시오.

(단, a, b는 10보다 작은 자연수이다.) [4점] 7

Step ❶ 원의 방정식 $x^2+y^2=4$에 y대신 $ax+2\sqrt{b}$를 대입하고 내림차순으로 정리한다.

$x^2+y^2=4$에 $y=ax+2\sqrt{b}$를 대입하면

$x^2+(ax+2\sqrt{b})^2=4$

$(1+a^2)x^2+4a\sqrt{b}x+4b-4=0$

Step ❷ 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(2a\sqrt{b})^2-4(1+a^2)(b-1)=4a^2-4b+4=0$

따라서 $b=a^2+1$

이때 a, b는 10보다 작은 자연수이므로 $b=a^2+1$을 만족시키는 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 5)$이다.

따라서 b의 모든 값의 합은 $2+5=7$

다른 풀이

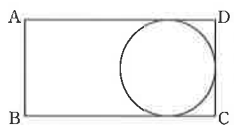
원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $ax-y+2\sqrt{b}=0$까지의 거리는 $\frac{|2\sqrt{b}|}{\sqrt{a^2+1}}=2$이므로 $b=a^2+1$

a, b는 10보다 작은 자연수이므로 $a=1$일 때 $b=2$, $a=2$일 때 $b=5$

따라서 b의 모든 값의 합은 7

K033 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 도형 문제해결하기 정답 64

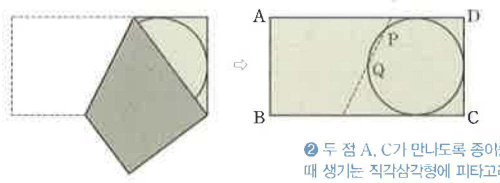
가로의 길이가 16, 세로의 길이가 8인 직사각형 모양의 종이 [정답률 16%] 가 있다. [그림 1]은 네 꼭짓점을 A, B, C, D라 하고 변 BC, CD, DA와 접하는 원을 그린 것이다.



[그림 1]

❶ 선분 BC의 중점을 원점으로, 직선 BC를 x축으로 하는 좌표평면을 그린다.

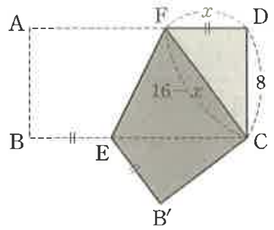
[그림 2]와 같이 점 A와 C가 만나도록 종이를 접었다가 다시 펼쳤을 때 생기는 선이 원과 만나는 점을 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 k라 할 때, $5k^2$의 값을 구하시오. [4점] 64



[그림 2]

❷ 두 점 A, C가 만나도록 종이를 접었을 때 생기는 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용한다.

Step ❶ **직각삼각형 CDF에 피타고라스 정리를 적용한다.**



삼각형 CDF와 삼각형 CB′E에서 $\overline{CD}=\overline{CB'}$,

$\angle CDF=\angle CB'E=90^\circ$, $\angle DCF=\angle B'CE$이므로

$\triangle CDF\equiv\triangle CB'E$

따라서 $\overline{FD}=\overline{BE}=\overline{EB'}$

삼각형 CDF에서 $\overline{DF}=x(0<x<16)$라 하면

$\overline{CF}=\overline{AF}=\overline{AD}-\overline{DF}=16-x$

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{FD}^2+\overline{CD}^2=\overline{CF}^2$이므로

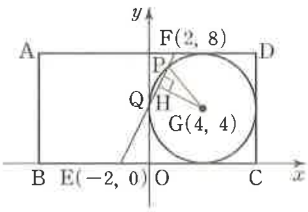
$x^2+8^2=(16-x)^2$

$32x=192$

$x=6$

Step ❷ **선분 BC의 중점을 원점으로 하고 직선 BC를 x축으로 하는 좌표평면을 설정한다.**

직사각형 ABCD를 변 BC의 중점이 원점이 되도록 좌표평면 위에 놓으면 그림과 같다.



Step ❸ **원의 중심에서 직선에 수선을 그어 만든 직각삼각형 GHP에서 피타고라스 정리를 적용하여 현의 길이를 구한다.**

직선 EF의 방정식은 점 F(2, 8), 점 E(−2, 0)을 지나므로

$y-0=\dfrac{0-8}{-2-2}(x+2)$, 즉 $y=2x+4$

원의 중심 G에서 직선 $y=2x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{GH}$는 원의 중심 G(4, 4)와 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리이므로

$\dfrac{|8-4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

직각삼각형 GHP에서 피타고라스 정리에 의하여

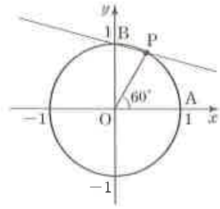
$\overline{PH}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$k=\overline{PQ}=2\overline{PH}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

따라서 $5k^2=64$

K034 원과 삼각비를 이용하여 직선의 기울기 구하기 정답 100

좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2=1$이 x축, y축의 양의 부분과 만 [정답률 39%]
❶ 선분 OP의 길이는 1이다.
나는 점을 각각 A, B라 하자. 그림과 같이 제1사분면에서
$\angle AOP=60^\circ$인 점 P를 원 위에 잡으면 직선 BP의 기울기는 $a+b\sqrt{3}$이다.
❷ 점 P의 좌표를 구하여 직선 BP의 기울기를 구한다.
이때, $20(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점] 100



Step ❶ **점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 삼각형 POH의 세 변의 길이의 비를 이용한다.**

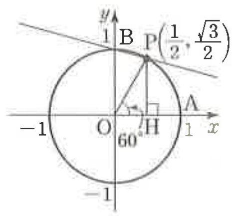
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 POH는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 삼각형이므로

$\overline{OH}:\overline{OP}:\overline{PH}=1:2:\sqrt{3}$

이때 $\overline{OP}=1$이므로

$\overline{OH}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{PH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Step ❷ **두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이다.**

두 점 B(0, 1), $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나는 직선 BP의 기울기 m은

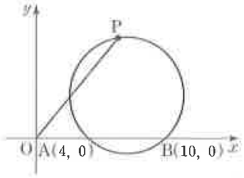
$m=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}{\dfrac{1}{2}-0}=-2+\sqrt{3}$

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로

$20(a^2+b^2)=20(4+1)=100$

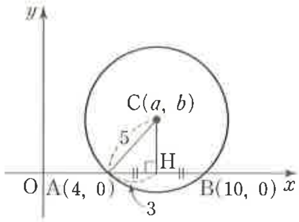
K035 원의 방정식을 이용하여 문제해결하기 정답 20

그림과 같이 두 점 A(4, 0), B(10, 0)을 지나고 반지름의 길 [정답률 11%]
❶ 원의 중심의 x좌표는 $\frac{4+10}{2}=7$이다.
이가 5인 원이 있다. 원점 O와 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OP의 길이가 정수가 되게 하는 점 P의 개수를 구하시오.
❷ 선분 OP의 길이의 범위를 구하여 그 범위에 속하는 정수의 개수를 구한다.
(단, 원의 중심은 제1사분면에 있다.) [4점] 20



Step ❶ 원의 중심에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=3$, $\overline{AC}=5$이다.

원의 중심 C(a, b)에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=3$, $r=5$에서 $\overline{CH}=4$이므로 $a=7$, $b=4$



따라서 원의 방정식은 $(x-7)^2+(y-4)^2=5^2$

Step ❷ 원점과 원의 중심 사이의 거리를 이용하여 점과 원 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

원점 O에서 원 위의 점 P까지의 거리의 최솟값은
$\overline{OC}-r=\sqrt{7^2+4^2}-5$이고
최댓값은 $\overline{OC}+r=\sqrt{7^2+4^2}+5$이므로
$\sqrt{65}-5\le\overline{OP}\le\sqrt{65}+5$

Step ❸ 원점 O에서 같은 거리에 있는 원 위의 점이 2개씩 있음에 주의하여 문제에서 묻는 값을 구한다.

선분 OP의 길이가 될 수 있는 정수는 4, 5, …, 13의 10개이고, 각각에 대하여 점 P는 2개씩 존재한다.
따라서 선분 OP의 길이가 정수가 되는 점 P의 개수는 20이다.

L 도형의 이동

문제편 pp.165 ~ 173

필수 기출

001 ③	002 5	003 ⑤	004 ②	005 ②	006 ③
007 16	008 ③	009 26	010 56	011 ②	012 ③
013 ①	014 640	015 128	016 ②	017 30	018 ①
019 17	020 64	021 10	022 23	023 ④	024 ②
025 ①					

플러스 기출

026 45	027 ⑤	028 ①

L001 평행이동한 점의 좌표 구하기 정답 ③

좌표평면 위의 점 (2, 3)을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값은? [2점] [정답률 87%]
❶ 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Step ❶ 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

점 (2, 3)을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 (1, 5)이므로 $a=1$, $b=5$
따라서 $a+b=6$

L002 도형의 평행이동 이해하기 정답 5

직선 $y=3x-5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$ [정답률 81%]
❶ x 대신 $x-a$, y 대신 $y-2a$를 대입한다.
만큼 평행이동한 직선이 직선 $y=3x-10$과 일치할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점] 5

Step ❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구한다.

직선 $y=3x-5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선은 x 대신 $x-a$를 대입하고, y 대신 $y-2a$를 대입하여

$y-2a=3(x-a)-5$
$y=3x-a-5$ …… ㉠
㉠이 $y=3x-10$과 일치하므로
$-a-5=-10$
따라서 $a=5$

L003 도형의 평행이동과 원의 성질을 이용하여 미지수 구하기 정답 ⑤

좌표평면에서 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 [정답률 77%]
3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C의 넓이가 직
❶ 평행이동한 원의 방정식을 구한다.
선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되도록 하는 상수 a의 값은? [3점]
❷ 직선이 원의 중심을 지남을 이용한다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

Step ❶ 평행이동한 원 C의 방정식을 구한다.

원 C의 방정식은 $\{(x-3)+1\}^2+\{(y-a)+2\}^2=9$에서
$(x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

Step ❷ 원 C의 중심의 위치를 찾고 상수 a의 값을 구한다.

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심이 직선 $3x+4y-7=0$ 위에 있어야 한다. 원 C의 중심의 좌표가 $(2,\ a-2)$이므로 $3\times2+4(a-2)-7=0$에서

$a=\frac{9}{4}$

실전 솔루션

도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-m, y-n)=0$이다.
즉 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

해검단 TALK

점의 평행이동을 이용해서 풀 수도 있어. 처음 원의 중심이 점 $(-1,\ -2)$이고 이 점을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점 $(-1+3,\ -2+a)$가 원 C의 중심이야.

L004 직선의 평행이동을 이용하여 미지수 구하기 정답 ②

직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 [정답률 84%]
❶ 평행이동시킨 직선의 방정식을 구한다.
-3만큼 평행이동시킨 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$의 중심을 지날 때,
❷ 원의 중심의 좌표를 직선의 방정식에 대입한다.
상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

Step ❶ 평행이동시킨 직선의 방정식을 구한다.

직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+3=k(x-2)+1$, $y=kx-2k-2$

Step ❷ 평행이동한 직선이 원의 중심을 지남을 이용하여 상수 k의 값을 구한다.

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(3,\ 2)$를 지나므로
$2=3k-2k-2$
따라서 $k=4$

해검단 TALK

문제를 반대로 생각하면 원의 중심 $(3, 2)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 점 $(1, 5)$는 직선 $y=kx+1$ 위의 점이야.

L005 도형의 평행이동 이해하기 정답 ②

좌표평면 위의 원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$을 x축의 방향으로 [정답률 79%]
❶ 원의 방정식을 변형하여 평행이동 한다.
a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=c$
❷ ❶의 방정식과 비교하여 a, b, c의 값을 구한다.
일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 주어진 원의 방정식을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한다.

원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$을 변형하면
$(x+1)^2+(y-2)^2=8$
이 방정식을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$(x+1-a)^2+(y-2-b)^2=8$

Step ❷ ❶의 식과 주어진 원의 방정식을 비교하여 $a+b+c$의 값을 구한다.

위 방정식이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=c$와 같으므로
$1-a=-3$, $-2-b=4$, $8=c$
따라서 $a=4$, $b=-6$, $c=8$이므로
$a+b+c=6$

L006 점의 평행이동을 활용하여 문제해결하기 정답 ③

두 양수 m, n에 대하여 좌표평면 위의 [정답률 76%]
점 A$(-2,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점을 B라 하고, 점 B를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점을 C라 하자.
❶ 점 (a, b)를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a+p, b+q)$임을 이용한다.
세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$일 때, mn의 값은? [3점]
❷ 원의 중심의 좌표를 D라 하면 AD=(반지름의 길이)임을 이용한다.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

Step ❶ 두 점 B, C의 좌표를 구한다.

점 A$(-2,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점은
B$(-2+m,\ 1)$
점 B$(-2+m,\ 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은
C$(-2+m,\ 1+n)$

Step ❷ 점 A와 원의 중심 사이의 거리를 구해 원의 방정식을 구한다.

세 점 A, B, C를 지나는 원은 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$이므로
$(x-3)^2+(y-2)^2=26$

Step ❸ 두 점 B, C가 원 위의 점임을 이용하여 m, n의 값을 구한다.

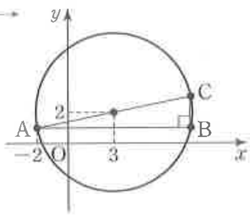
점 B는 원 위의 점이므로
$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$, $(m-5)^2=25$
$m>0$이므로 $m=10$
또 점 C는 원 위의 점이므로
$(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$, $(n-1)^2=1$

$n>0$이므로 $n=2$

따라서 $mn=20$

다른 풀이

$\triangle$ABC는 각 B가 직각이므로 변 AC가 원의 지름이고, 변 AC의 중점이 원의 중심이다.



즉 선분 AC의 중점

$\left(\frac{-2+(-2+m)}{2}, \frac{1+1+n}{2}\right)$이

점 $(3, 2)$이므로

$m=10$, $n=2$

따라서 $mn=20$

실전솔루션

중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

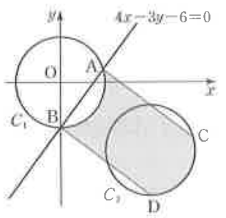
L007 도형의 평행이동과 원의 성질을 이용하여 문제해결하기 정답 16

그림과 같이 좌표평면에서 원 $C_1: x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_1과 직선 $4x-3y-6=0$이 만나는 두 점 A, B를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 각각 C, D라 하자. 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 구하시오. [4점] [정답률 19%]

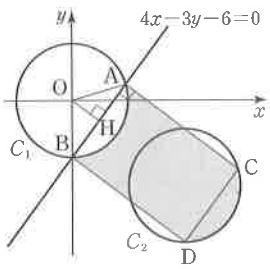
❶ 직선 AC의 기울기를 구하여 직선 AB와의 위치 관계를 파악한다.

❷ 구하는 넓이와 같은 넓이인 도형을 찾는다.

16



Step ❶ 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이와 같은 넓이를 갖는 도형을 찾는다.



원 C_1과 두 점 A, B는 모두 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하여 원 C_2, 두 점 C, D로 옮겨졌으므로 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 평행사변형 ABDC의 넓이와 같다.

Step ❷ 원의 중심에서 직선 $4x-3y-6=0$에 수선을 그어 만든 직각삼각형 AOH에 피타고라스 정리를 적용하여 현의 길이를 구한다.

원점에서 직선 $4x-3y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|4\times0-3\times0-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{6}{5}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{8}{5}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\frac{16}{5}$

Step ❸ 평행사변형 ABDC가 직사각형임을 이용하여 넓이를 구한다.

점 A가 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하여 옮겨진 점이 점 C이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

이고 직선 AC의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

이때 직선 $4x-3y-6=0$의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로

$-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=-1$

에서 두 직선 AB, AC는 서로 수직이고 사각형 ABDC는 직사각형이다.

따라서 구하는 넓이는

(직사각형 ABDC의 넓이)$=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$

$=\frac{16}{5}\times5=16$

L008 도형의 평행이동을 이해하여 추론하기 정답 ③

좌표평면에서 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] [정답률 66%]

❶ 원의 중심의 좌표는 $(0, 1)$, 반지름의 길이는 3이다.

<보기>

ㄱ. 원 C의 반지름의 길이가 3이다.

ㄴ. 원 C가 x축에 접하도록 하는 실수 n의 값은 1개이다.

❷ 원의 중심의 y좌표가 b, 반지름의 길이가 r일 때 $|b|=r$이어야 한다.

ㄷ. $m\neq0$일 때, 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$는 원 C의 넓이를 이등분한다.

❸ 직선이 원의 중심을 지나는지 확인한다.

① ㄱ ② ㄴ ❸ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step ❶ 주어진 원의 방정식을 평행이동하였을 때 보기의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 반지름의 길이는 3이다.

원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이도 3이다. (참)

ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표는

$(0, 1)$

따라서 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 중심의 좌표는

$(0+m, 1+n)$

즉 $(m, n+1)$

원 C가 x축과 접하려면 원의 중심의 y좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같아야 하므로

$|n+1|=3$

$n+1=-3$ 또는 $n+1=3$

$n=-4$ 또는 $n=2$

따라서 원 C가 x축에 접하도록 하는 실수 n의 값은 2개이다.

(거짓)

ㄷ. 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$에 원의 중심의 좌표 $(m,\ n+1)$을 대입하면

$n+1=\frac{n+1}{m}\times m$

$n+1=n+1$

와 같이 등호가 성립한다.

즉 $m\neq0$일 때, 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$가 원 C의 중심 $(m,\ n+1)$을 지나므로 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$는 원 C의 넓이를 이등분한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

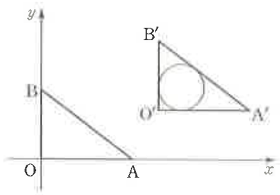
L009 평행이동을 이용하여 원의 방정식 구하기 정답 26

그림과 같이 좌표평면에서 세 점 O(0, 0), A(4, 0), B(0, 3)을 [정답률 30%] 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB를 평행이동한 도형을 삼각형 O′A′B′이라 하자. 점 A′의 좌표가 (9, 2)일 때, 삼각형 O′A′B′에 내접하는 원의 방정식은

❶ 삼각형 OAB에 내접하는 원의 방정식을 구하여 평행이동한다.

$x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오.

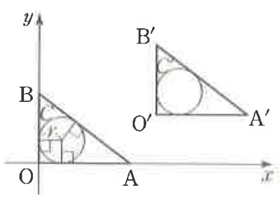
(단, a, b, c는 상수이다.) [4점] 26



Step ❶ 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구한다.

두 삼각형 OAB, O′A′B′에 내접하는 원을 각각 C, C'이라 하자.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C는 x축, y축에 모두 접하고 제1사분면에 중심이 있으므로 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.



또한 두 점 A(4, 0), B(0, 3)에 대하여 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

즉 $3x+4y-12=0$이고 원 C가 직선 AB에 접하므로 원의 중심 $(r,\ r)$와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같다.

$\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$

$|7r-12|=5r$

$7r-12=5r$ 또는 $7r-12=-5r$

$r=6$ 또는 $r=1$

$0<r<3$이므로 $r=1$

Step ❷ 원 C'의 방정식을 구한다.

따라서 원 C의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

점 A(4, 0)을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A′(9, 2)가 되므로 이 평행이동에 의하여 원 C가 평행이동한 원 C'의 방정식은

$(x-5-1)^2+(y-2-1)^2=1$

$(x-6)^2+(y-3)^2=1$

$x^2+y^2-12x-6y+44=0$

$a=-12$, $b=-6$, $c=44$이므로

$a+b+c=26$

L010 도형의 대칭이동 이해하기 정답 56

좌표평면에서 원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$을 [정답률 52%]

❶ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 식을 변형한다.

원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 x축에 대하여 대칭이

❷ 문제상황을 좌표평면에 그림으로 나타내어 본다.

동한 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $10a+b$의 값을 구하시오. [3점]

56

Step ❶ 원의 중심의 좌표를 구하기 위해 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴로 변형한다.

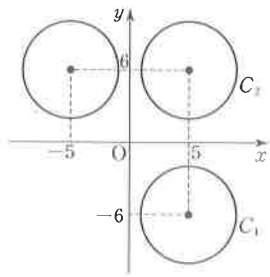
$x^2+y^2+10x-12y+45=0$에서

$(x^2+10x+5^2)+\{y^2-12y+(-6)^2\}=-45+5^2+(-6)^2$

$(x+5)^2+(y-6)^2=16$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ 6)$이다.

Step ❷ 원을 대칭이동하거나 평행이동하여도 원의 반지름은 변하지 않고 원의 중심의 좌표만 변하는 것을 이용한다.



원 C_1의 중심의 좌표는 점 $(-5,\ 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5,\ -6)$이다.

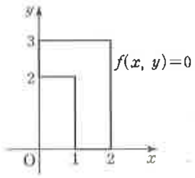
원 C_2의 중심의 좌표는 점 $(5,\ -6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5,\ 6)$이다.

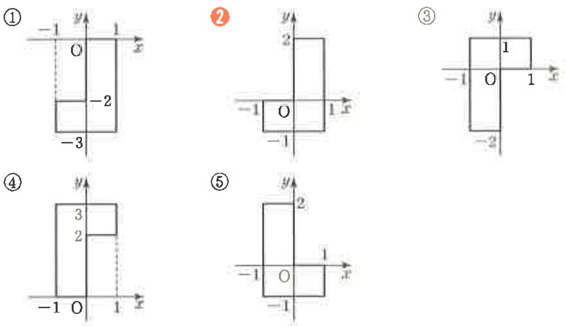
따라서 $a=5$, $b=6$이므로 $10a+b=10\times5+6=56$

L011 도형의 평행이동과 대칭이동 이해하기　　정답 ②

좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 그림과　[정답률 61%]
같은 ┐ 모양일 때, 다음 중 방정식 $f(x+1,\ 2-y)=0$이 좌표평면에 나타내는 도형은? [3점]

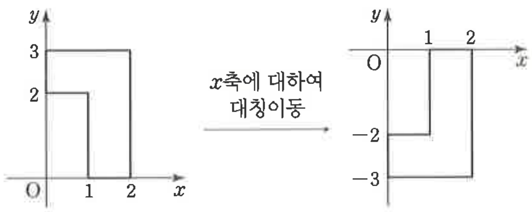
❶ $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x,\ -y)=0 \longrightarrow f(x+1,\ -y+2)=0$

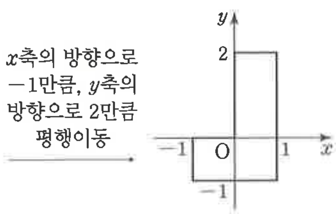




Step ❶ 도형의 대칭이동과 평행이동을 차례로 이용한다.

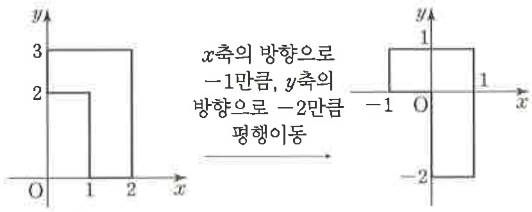
방정식 $f(x+1,\ -(y-2))=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형이므로 그림 ②와 같다.

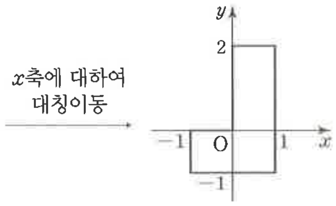




다른 풀이

방정식 $f(x+1,\ -y+2)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 도형이다.

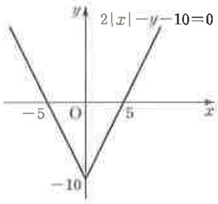




L012 도형의 대칭이동을 활용하여 문제해결하기　　정답 ③

좌표평면에서 방정식 $2|x|-y-10=0$이 나타내는 도형과　[정답률 74%]
이 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형으로 둘러싸인 부분은 사각형이다.
이 사각형의 네 변에 모두 접하는 원의 넓이는? [3점]

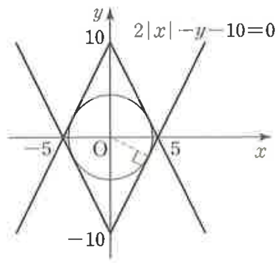
❶ 원의 중심과 접하는 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.



① 16π　② 18π　③ 20π　④ 22π　⑤ 24π

Step ❶ 방정식 $2|x|-y-10=0$이 나타내는 도형과 이 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형을 그린다.

방정식 $2|x|-y-10=0$이 나타내는 도형과 이 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



Step ❷ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

두 도형으로 둘러싸인 사각형의 네 변에 모두 접하는 원은 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 원점과 직선 $2x-y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times0-0-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$$

해검단 TALK

방정식 $2|x|-y-10=0$이 나타내는 도형을 그릴 때에는 절댓값 기호 안을 0으로 하는 $x=0$을 기준으로 구간을 나누어 생각해야 해.

(i) $x\geq0$일 때

$2x-y-10=0$, 즉 $y=2x-10$

(ii) $x<0$일 때

$2\times(-x)-y-10=0$, 즉 $y=-2x-10$

(i), (ii)의 그래프를 모두 그리면 방정식 $2|x|-y-10=0$의 그래프를 얻게 돼.

L013 직선의 대칭이동을 활용하여 문제해결하기 정답 ①

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 [정답률 74%]
❶ 직선 $y=x$에 대한 대칭이동은 x 대신 y, y 대신 x를 대입하는 것임을 이용한다.
원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접할 때, 실수 k의 값은? [3점]
❷ (원의 중심과 직선 사이의 거리)=(반지름의 길이)임을 이용한다.

① 80 ② 83 ③ 85 ④ 88 ⑤ 90

Step ❶ 직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구한다.

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 x 대신 y, y 대신 x를 대입하여

$y-2x=9$, 즉 $2x-y+9=0$

Step ❷ 직선과 원이 접할 조건을 이용하여 k의 값을 구한다.

직선 $2x-y+9=0$이 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로

$$\frac{|2\times3+(-1)\times(-5)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k}$$

→ 직선 $2x-y+9=0$과 원의 중심 $(3, -5)$ 사이의 거리가 $\sqrt{k}$와 같다.

따라서 $k=80$

다른 풀이

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형 $y=2x+9$가 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로

$(x-3)^2+(2x+9+5)^2=k$

$5x^2+50x+205-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=25^2-5(205-k)=0$$

따라서 $k=80$

실전 솔루션

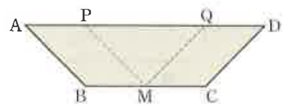
도형의 대칭이동

① x축에 대한 대칭이동 ⇨ y 대신 $-y$를 대입한다.
② y축에 대한 대칭이동 ⇨ x 대신 $-x$를 대입한다.
③ 원점에 대한 대칭이동 ⇨ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.
④ 직선 $y=x$에 대한 대칭이동 ⇨ x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.
⑤ 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동 ⇨ x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입한다.

L014 도형의 대칭이동을 이용하여 문제해결하기 정답 640

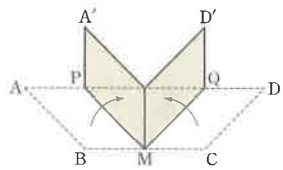
[그림 1]과 같이 $\overline{AD}=8$, $\overline{BC}=4$이고 높이가 2인 등변사다리꼴 모양의 종이를 접어 모양을 만들려고 한다. 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 선분 PM과 선분 QM을 접는 선으로 하여 두 점 B, C가 선분 AD의 중점에 오도록 종이를 접으면 [그림 2]와 같이 두 점 A, D는 각각 점 A′, D′으로 옮겨진다. 점 D′과 직선 A′M 사이의 거리를 d라 할 때, $50d^2$의 값을 구하시오. (단, 모든 점은 같은 평면 위에 있고, 종이의 두께는 무시한다.) [4점] [정답률 28%]

640



[그림 1]

❶ 점 M을 원점, 직선 BC를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 그린다.

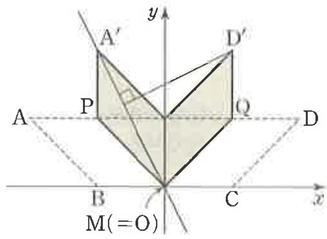


[그림 2]

Step ❶ 점 M을 원점, 직선 BC를 x축으로 놓고 주어진 상황을 좌표평면 위에 나타낸다.

직선 BC를 x축, 점 M을 원점이 되도록 좌표평면 위에 도형을 나타내면

$A(-4, 2)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$, $D(4, 2)$이다.



Step ❷ 선분의 내분점의 좌표 구하는 공식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

두 점 $A(-4, 2)$, $D(4, 2)$에 대하여 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\times4+3\times(-4)}{1+3}, \frac{1\times2+3\times2}{1+3}\right)=(-2, 2)$$

이므로 $P(-2, 2)$

두 점 $A(-4, 2)$, $D(4, 2)$에 대하여 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3\times4+1\times(-4)}{3+1}, \frac{3\times2+1\times2}{3+1}\right)=(2, 2)$$

이므로 $Q(2, 2)$

Step ❸ 두 점 M, Q를 지나는 직선의 방정식을 구한다.

$M(0, 0)$, $Q(2, 2)$이므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{2-0}{2-0}(x-0)+0,\ y=x$$

Step ❹ 점의 대칭이동을 이용하여 두 점 D′, A′의 좌표를 구한다.

두 점 D, D′은 직선 MQ, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 D′은

D′(2, 4)
두 점 A′, D′은 y축에 대하여 대칭이므로 점 A′은
A′(−2, 4)

Step ❺ **직선 A′M의 방정식을 구한다.**

A′(−2, 4), M(0, 0)이므로 두 점 A′, M을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-4}{0-(-2)}(x-0)+0$, $2x+y=0$

Step ❻ **점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.**

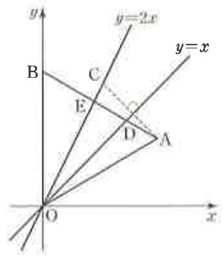
점 D′(2, 4)와 직선 $2x+y=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|2\times 2+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

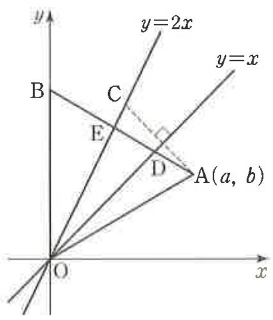
따라서 $50d^2=50\times\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=640$

L015 도형의 대칭이동을 활용하여 문제해결하기 정답 128

그림과 같이 좌표평면 위에 제1사분면의 점 A와 y축 위의 점 B에 대하여 $\overline{AB}=\overline{AO}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형 OAB가 있다. [정답률 27%]
❶ 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.
점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 점 C는 직선 $y=2x$
❷ 점 A의 좌표를 (a, b)로 놓으면 $C(b, a)$이고 점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $a=2b$이다.
위의 점이다. 선분 AB가 두 직선 $y=x$, $y=2x$와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이를 $k\pi$라 하자. $9k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 128



Step ❶ **A(a, b)로 놓고 직선 $y=x$에 대한 대칭을 이용하여 점 C의 좌표를 구한 다음 점 C가 직선 $y=2x$ 위의 점임을 이용한다.**



두 상수 a, b에 대하여 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 점 C는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 (b, a)이다.
이때 점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $a=2b$
따라서 점 A는 A$(2b, b)$

Step ❷ **$\overline{OA}=2\sqrt{5}$임을 이용한다.**

$\overline{OA}=2\sqrt{5}$이므로
$\sqrt{(2b)^2+b^2}=2\sqrt{5}$
$(2b)^2+b^2=20$, $5b^2=20$
$b^2=4$
따라서 $b=2$이므로
A(4, 2), C(2, 4)

Step ❸ **$\overline{AB}=2\sqrt{5}$임을 이용한다.**

y축 위의 점 B의 좌표를 $(0, c)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{OA}=2\sqrt{5}$이므로
$\sqrt{(4-0)^2+(2-c)^2}=2\sqrt{5}$
$(4-0)^2+(2-c)^2=20$
$16+4-4c+c^2=20$
$-4c+c^2=0$, $c(c-4)=0$
$c>0$이므로 $c=4$
따라서 B(0, 4)

Step ❹ **직선 AB의 방정식을 구하고 직선 $y=x$와 연립하여 점 D의 좌표를 구한다.**

A(4, 2), B(0, 4)이므로 직선 AB의 방정식은
$y=\frac{2-4}{4-0}(x-0)+4$, $y=-\frac{1}{2}x+4$
점 D는 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점이므로
$x=-\frac{1}{2}x+4$, $\frac{3}{2}x=4$
따라서 $x=\frac{8}{3}$이므로 $D\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Step ❺ **직선 AB와 직선 $y=2x$가 서로 수직임을 이용하여 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이를 구한다.**

한편 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 직선 $y=2x$의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.
즉 삼각형 ODE는 $\angle OED=90°$인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다. 따라서 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이는

$\overline{OD}\times\pi=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}\times\pi=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$

따라서 $k=\frac{8}{3}\sqrt{2}$이므로

$9k^2=9\times\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)^2=9\times\frac{128}{9}=128$

실전솔루션

(직각삼각형의 외심)=(직각삼각형의 빗변의 중점)이므로
(직각삼각형의 외접원의 지름)=(빗변의 길이)
이다.

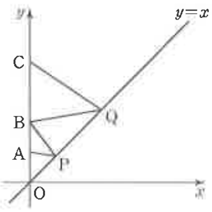
L016 대칭이동을 활용하여 문제해결하기 정답 ②

좌표평면 위에 세 점 A(0, 1), B(0, 2), C(0, 4)와 직선 [정답률 41%]
$y=x$ 위의 두 점 P, Q가 있다. $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 값이 최소가 되도록

❶ 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 세 점 A′, P, B가 일직선을 이룰 때 발생한다. 즉 $\overline{A'B}$의 길이가 최솟값이다.

❷ 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 $\overline{BQ}+\overline{QC}$의 최솟값은 세 점 B′, Q, C가 일직선을 이룰 때 발생한다. 즉 $\overline{B'C}$의 길이가 최솟값이다.

하는 두 점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 길이는? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ❷ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{6}$

Step ❶ $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 값이 최소인 경우를 찾는다.

두 점 A(0, 1), B(0, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각

A′(1, 0), B′(2, 0)

이고

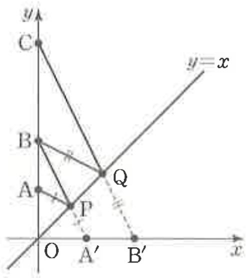
$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$

이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}=\overline{A'P}+\overline{PB}+\overline{B'Q}+\overline{QC}$$
$$\geq \overline{A'B}+\overline{B'C}$$

$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 값이 최소일 때는 점 P가 두 점 A′, B를 지나는 직선 위에 있고, 점 Q가 두 점 B′, C를 지나는 직선 위에 있을 때이다.

Step ❷ 두 점 A′, B를 지나는 직선과 두 점 B′, C를 지나는 직선의 방정식을 구한다.



두 점 A′(1, 0), B(0, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{2-0}{0-1}(x-1)+0$$

$y=-2x+2$

두 점 B′(2, 0), C(0, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{4-0}{0-2}(x-2)+0$$

$y=-2x+4$

Step ❸ 두 점 P, Q의 좌표를 구하고 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 선분 PQ의 길이를 구한다.

점 P는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+2$의 교점이므로

$x=-2x+2$

$x=\frac{2}{3}$

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $y=\frac{2}{3}$

즉 $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

점 Q는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+4$의 교점이므로

$x=-2x+4$

$x=\frac{4}{3}$

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $y=\frac{4}{3}$

즉 $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

따라서 $\overline{PQ}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

L017 원의 방정식을 활용하여 문제해결하기 정답 30

좌표평면 위에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 A라 하고 [정답률 7%]
점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C의 좌표가 (0, 10)일 때, 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각삼각형이 되도록 하는

❶ 세 변의 길이가 a, b, c일 때 $a^2=b^2+c^2$ 또는 $b^2=a^2+c^2$ 또는 $c^2=a^2+b^2$임을 이용한다.

점 A의 개수를 구하시오. (단, 점 A는 y축 위의 점이 아니다.) [4점] 30

Step ❶ 점 A의 좌표를 (x, y)로 놓고 세 변의 길이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

점 A의 좌표를 (x, y)라 하면 점 B는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 B의 좌표는 $(-x, -y)$이다.

세 점 $A(x, y)$, $B(-x, -y)$, C(0, 10)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 세 변의 길이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 대하여

$\overline{AB}^2=4x^2+4y^2$

$\overline{BC}^2=x^2+(y+10)^2$

$\overline{CA}^2=x^2+(y-10)^2$

Step ❷ 피타고라스 정리를 이용하여 (x, y)가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

삼각형 ABC가 직각삼각형인 경우는 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 또는 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$ 또는 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{BC}^2$일 때이다.

(i) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$일 때

$(4x^2+4y^2)+\{x^2+(y+10)^2\}=x^2+(y-10)^2$

따라서 $x^2+(y+5)^2=25$

(ii) $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$일 때

$\{x^2+(y+10)^2\}+\{x^2+(y-10)^2\}=4x^2+4y^2$

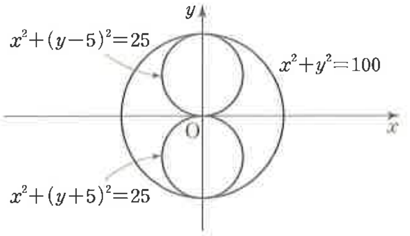
따라서 $x^2+y^2=100$

(iii) $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$일 때

$(4x^2+4y^2)+\{x^2+(y-10)^2\}=x^2+(y+10)^2$

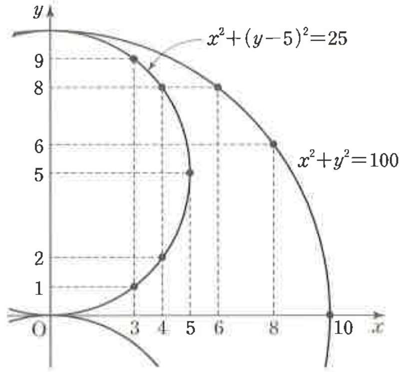
따라서 $x^2+(y-5)^2=25$

(i)~(iii)을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



Step ❸ 앞에서 구한 도형 위의 점 중에서 제1사분면 위의 점이면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구한다.

문제의 조건에서 점 A는 y축 위의 점이 아니므로 그림의 원 위에 존재하는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 A의 개수는 제1사분면 위의 점의 개수의 4배에 x축 위의 두 점 $(10, 0)$, $(-10, 0)$의 개수 2를 더한 것이다.



(iv) $x=3$일 때

$x^2+(y-5)^2=25$에 $x=3$을 대입하면

$3^2+(y-5)^2=25$

$(y-5)^2=16$

$y-5=4$ 또는 $y-5=-4$

$y=9$ 또는 $y=1$

따라서 $(3, 1)$, $(3, 9)$

(v) $x=4$일 때

$x^2+(y-5)^2=25$에 $x=4$를 대입하면

$4^2+(y-5)^2=25$

$(y-5)^2=9$

$y-5=3$ 또는 $y-5=-3$

$y=8$ 또는 $y=2$

따라서 $(4, 2)$, $(4, 8)$

(vi) $x=5$일 때

$x^2+(y-5)^2=25$에 $x=5$를 대입하면

$5^2+(y-5)^2=25$

$(y-5)^2=0$

$y=5$

따라서 $(5, 5)$

(vii) $x=6$일 때

$x^2+y^2=100$에 $x=6$을 대입하면

$6^2+y^2=100$

$y^2=64$

$y>0$이므로 $y=8$

따라서 $(6, 8)$

(viii) $x=8$일 때

$x^2+y^2=100$에 $x=8$을 대입하면

$8^2+y^2=100$

$y^2=36$

$y>0$이므로 $y=6$

따라서 $(8, 6)$

(iv)~(viii)에 의하여 x좌표와 y좌표가 모두 정수이면서 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되는 제1사분면 위의 점 A의 개수는 7

Step ❹ 문제의 조건에 맞는 모든 점의 개수를 구한다.

따라서 구하는 모든 점의 개수는

$7\times4+\underbrace{2}_{\text{두 점 }(10,\ 0),\ (-10,\ 0)}=30$

L018 도형의 평행이동과 대칭이동 이해하기 정답 ①

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 후 [정답률 59%]

❶ x 대신 $x-a$를 대입한다.

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 하자. 직선 l이 원

❷ x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.

$(x+1)^2+(y-3)^2=5$와 접하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [4점]

❸ 원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 l 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

Step ❶ 평행이동과 대칭이동을 이용하여 직선 l의 직선의 방정식을 구한다.

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은 x 대신 $x-a$를 대입하면

$y=-\frac{1}{2}(x-a)-3$ …… ㉠

이때 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l은 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$x=-\frac{1}{2}(y-a)-3$, 즉 $2x+y-a+6=0$

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용한다.

직선 l이 원에 접하려면 원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 l 사이의 거리를 d라 할 때 d는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$d=\frac{|-2+3-a+6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$|7-a|=5$

$7-a=5$ 또는 $7-a=-5$

$a=2$ 또는 $a=12$

따라서 모든 a의 값의 합은 $2+12=14$

다른 풀이

직선 $l: y=-2x+a-6$이 원에 접하므로

$(x+1)^2+(-2x+a-6-3)^2=5$

$5x^2+2(-2a+19)x+a^2-18a+77=0$

이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2a+19)^2-5(a^2-18a+77)=0$

$a^2-14a+24=0$

$(a-2)(a-12)=0$

$a=2$ 또는 $a=12$

따라서 모든 a의 값의 합은

$2+12=14$

L019 대칭이동을 활용하여 문제해결하기 정답 17

그림과 같이 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=\sqrt{10}$인 삼각형 ABC에 **[정답률 10%]**

❶ B(0, 0), C(4, 0)이 되도록 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 나타내고 점 A의 좌표를 구한다.

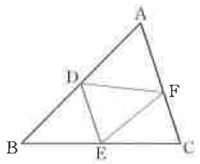
대하여 세 선분 AB, BC, CA 위의 점을 각각 D, E, F라 하자.

삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값이 $\frac{q}{p}\sqrt{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

❷ 대칭이동을 이용한다.

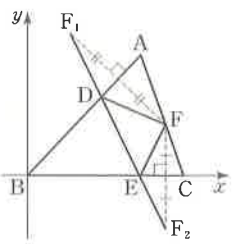
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17



Step ❶ 점 B를 원점, 직선 BC를 x축으로 놓고 주어진 상황을 좌표평면 위에 나타낸다.

꼭짓점 B를 원점으로 꼭짓점 C를 C(4, 0)이 되도록 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 나타내면 다음 그림과 같다.



Step ❷ 점 A의 좌표를 구하고 직선 AC의 방정식을 구한다.

제1사분면 위의 점 A의 좌표를 (α, β)라 하면

$\overline{AB}^2=\alpha^2+\beta^2=18$ …… ㉠

$\overline{AC}^2=(\alpha-4)^2+\beta^2=10$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$8\alpha-16=8$, $\alpha=3$

$\alpha=3$을 ㉠에 대입하면 $\beta^2=9$

이때 $\beta>0$이므로 $\beta=3$

따라서 점 A의 좌표는 A(3, 3)이다.

직선 AC의 방정식은

$y=\frac{0-3}{4-3}(x-4)$, 즉 $y=-3x+12$

Step ❸ 점 F의 좌표를 (a, b)로 놓고 점 F를 직선 AB와 x축에 대칭이동하여 최소가 되는 경우를 찾는다.

점 F의 좌표를 (a, b)라 하면 점 $F(a, b)$는 직선 AC, 즉 직선 $y=-3x+12$ 위의 점이므로

$b=-3a+12$

직선 AB의 방정식은 $y=x$이므로 점 F를 직선 AB와 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 F_1, F_2라 하면

$F_1(b, a)$, $F_2(a, -b)$

이때 $\overline{DF}=\overline{DF_1}$, $\overline{EF}=\overline{EF_2}$이므로 삼각형 DEF의 둘레의 길이는 $\overline{DF_1}+\overline{DE}+\overline{EF_2}$의 값과 같다.

$\overline{DF_1}+\overline{DE}+\overline{EF_2}\geq\overline{F_1F_2}$이고

$\overline{F_1F_2}=\sqrt{(a-b)^2+(-b-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2+2b^2}=\sqrt{2a^2+2(-3a+12)^2}$

$=\sqrt{20\left(a-\frac{18}{5}\right)^2+\frac{144}{5}}$ $(3<a<4)$

이므로 삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은 $a=\frac{18}{5}$일 때,

$\sqrt{\frac{144}{5}}$, 즉 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$이다.

따라서 $p=5$, $q=12$이므로

$p+q=17$

L020 대칭이동을 이용하여 도형의 넓이 구하기 정답 64

그림과 같이 좌표평면에서 두 점 A(2, 0), B(1, 2)를 직선 **[정답률 38%]**

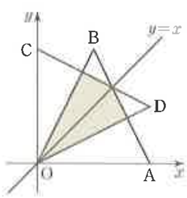
❶ 직선 AB와 두 직선 OD, $y=x$의 교점을 각각 구한다.

$y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 OAB 및 그 내부

❷ 삼각형의 넓이의 비를 이용한다.

와 삼각형 ODC 및 그 내부의 공통부분의 넓이를 S라 할 때, $60S$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

64



Step ❶ 직선 AB의 방정식을 구한다.

두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하자. 직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{1-2}(x-2)$, 즉 $y=-2x+4$

Step ② 점 E, F의 x좌표를 구한다.

점 B(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (2, 1)이므로 직선 OD의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$

→ 두 직선 AB, OD의 방정식을 연립

$-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $x=\frac{8}{5}$이므로 점 E의 x좌표는 $\frac{8}{5}$

$-2x+4=x$에서 $x=\frac{4}{3}$이므로 점 F의 x좌표는 $\frac{4}{3}$

→ 두 직선 AB, $y=x$의 방정식을 연립

Step ③ 삼각형 OEF, OAF의 넓이의 비를 이용하여 $60S$의 값을 구한다.

$\triangle OAF : \triangle OEF = \overline{AF} : \overline{EF} = \left|2-\frac{4}{3}\right| : \left|\frac{8}{5}-\frac{4}{3}\right| = 5 : 2$이므로

→ 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같다.

→ 두 점 E, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\overline{AF} : \overline{EF} = \overline{AH_2} : \overline{H_1H_2}$이다.

$$S=2\times\triangle OEF$$
$$=2\times\left(\triangle OAF\times\frac{2}{5}\right)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{16}{15}$$

따라서 $60S=64$

다른 풀이

Step ①, ②에서 두 점 E, F의 x좌표는 각각

$\frac{8}{5}$, $\frac{4}{3}$

이므로 $E\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $F\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$\overline{OE}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{EF}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{8}{15}\right)^2}$$
$$=\frac{4\sqrt{5}}{15}$$

이때 두 직선 AB, OD의 기울기의 곱이 -1이므로 삼각형 OEF는 직각삼각형이다.

$$\triangle OEF=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{15}$$
$$=\frac{8}{15}$$

따라서

$$S=\frac{8}{15}\times2=\frac{16}{15}$$

이므로 $60S=64$

L021 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

정답 10

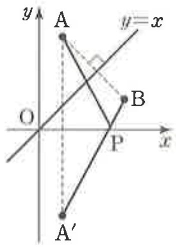
좌표평면에서 제1사분면 위의 점 A를 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 B라 하자. x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$일 때, 선분 OA의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] [정답률 55%]

① 두 점 A, B를 좌표평면 위에 나타내고 $\overline{AP}+\overline{PB}$가 최소가 되는 점 P의 위치를 찾는다.

② a, b 사이의 관계식을 구한다.

10

Step ① 세 점 A, B, P를 좌표평면 위에 나타낸다.



Step ② 점 A(a, b)를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하고 $\overline{AP}+\overline{PB}$가 최소가 되는 점 P의 위치를 구한다.

점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는 (b, a)이고, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 $A'(a, -b)$이다. $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$

이고 x축 위의 점 P가 선분 A′B 위에 있을 때 최솟값 $\overline{A'B}=10\sqrt{2}$를 갖는다.

Step ③ a, b 사이의 관계식을 구하여 선분 OA의 길이를 구한다.

따라서

$$\overline{A'B}=\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}$$
$$=\sqrt{2(a^2+b^2)}$$
$$=10\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}=10$$

L022 점의 대칭이동 추론하기

정답 23

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$은 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다. (단, $x_ny_n\neq0$) [정답률 44%]

(가) 점 P_n이 $x_ny_n>0$이고 $x_n>y_n$이면 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 점 P_{n+1}이다.
(나) 점 P_n이 $x_ny_n>0$이고 $x_n<y_n$이면 이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점이 점 P_{n+1}이다.
(다) 점 P_n이 $x_ny_n<0$이면 이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점이 점 P_{n+1}이다.

① 규칙에 따라 점을 대칭이동한다.

점 P_1의 좌표가 (3, 2)일 때, $10x_{50}+y_{50}$의 값을 구하시오. [4점]

② 반복되는 규칙을 찾아 P_{50}의 좌표를 구한다.

23

Step ❶ 주어진 규칙에 따라 점을 대칭이동한다.

주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, …을 구하면

점 $P_1(3,\ 2)$에서

$3\times2=6>0$, $3>2$이므로

조건 (가)에 의하여 점 P_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$P_2(2,\ 3)$

점 $P_2(2,\ 3)$에서

$2\times3=6>0$, $2<3$이므로

조건 (나)에 의하여 점 P_2를 x축에 대하여 대칭이동하면

$P_3(2,\ -3)$

점 $P_3(2,\ -3)$에서

$2\times(-3)=-6<0$이므로

조건 (다)에 의하여 점 P_3을 y축에 대하여 대칭이동하면

$P_4(-2,\ -3)$

점 $P_4(-2,\ -3)$에서

$(-2)\times(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로

조건 (가)에 의하여 점 P_4를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$P_5(-3,\ -2)$

점 $P_5(-3,\ -2)$에서

$(-3)\times(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로

조건 (나)에 의하여 점 P_5를 x축에 대하여 대칭이동하면

$P_6(-3,\ 2)$

점 $P_6(-3,\ 2)$에서

$(-3)\times2=-6<0$이므로

조건 (다)에 의하여 점 P_6을 y축에 대하여 대칭이동하면

$P_7(3,\ 2)$

Step ❷ 점의 대칭이동의 규칙을 찾아 주어진 식의 값을 구한다.

따라서 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표와 점 P_{n+6}의 좌표가 같다.

$50=6\times8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같다.

즉 점 P_{50}의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로

$10x_{50}+y_{50}=23$

L023 도형의 대칭이동을 이용하여 문제해결하기 정답 ④

테셀레이션이란 똑같은 모양의 도형을 평행이동과 대칭이동 [정답률 50%] 하여 빈틈이나 겹침도 없이 평면을 가득 채우는 것이다. 에스허르(Escher, M. C.)의 '도마뱀'이란 작품은 같은 크기와 모양의 여러 마리 도마뱀들이 테셀레이션을 이루고 있다. [그림 1]의 도마뱀은 [그림 2]와 같이 정육각형을 토대로 그려진 것으로 정육각형의 외부에 있는 도마뱀의 나머지 부분은 정육각형의 내부의 여백과 같다.

[그림 1]

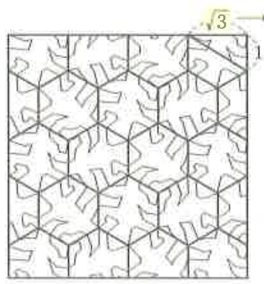
[그림 2]

[그림 1]의 직사각형의 가로의 길이가 $4\sqrt{3}$일 때, [그림 1]에 있는 도마뱀 모양 한 개의 넓이는? (단, [그림 1]의 직사각형의 각 꼭짓점은 [그림 2]와 같이 토대가 된 정육각형의 한 꼭짓점이다.) [4점]

❶ [그림 1]에 정육각형을 그려 정육각형 한 개의 넓이를 구한다.

① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

Step ❶ [그림 1]에 정육각형을 그린 다음 정육각형의 한 변의 길이를 구한다.



정육각형은 6개의 정삼각형으로 이루어져 있고 [그림 1]에 있는 직사각형의 가로의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이다.

Step ❷ 정육각형의 성질을 이용하여 도마뱀 모양 한 개의 넓이를 구한다.

도마뱀 모양 한 개의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정육각형의 넓이와 같다.

따라서 도마뱀 모양 한 개의 넓이는

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

L024 원의 대칭이동과 평행이동을 활용하여 문제해결하기 정답 ②

중심이 $(4, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1이 있다. 원 O_1을 [정답률 52%]
❶ 두 원 O_1, O_2의 방정식을 구한다.
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원을 O_2라 하자.
원 O_1과 원 O_2가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고 선분 AB의 길이가 $2\sqrt{3}$
❷ 두 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.
일 때, 상수 a의 값은? [4점]

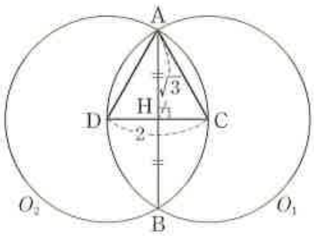
① $-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ $-\sqrt{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Step ❶ 원 O_1의 방정식을 구한 후, 평행이동과 대칭이동의 성질을 이용하여 원 O_2의 방정식을 구한다.

원 O_1의 방정식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$
원 O_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-4)^2=4$
이 원을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 O_2의 방정식은
$(x-2)^2+(y-4-a)^2=4$ ...... ㉠

Step ❷ 현의 성질과 선분 AB의 길이가 $2\sqrt{3}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

원 O_1과 원 O_2의 중심을 각각 C, D라 하면 선분 AB는 선분 CD에 의하여 수직이등분된다.
선분 AB와 선분 CD가 만나는 점을 H라 하면
$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$
원 O_1과 원 O_2의 반지름의 길이가 2이므로
$\overline{CH}=\overline{DH}=1$



즉 $\overline{CD}=2$이므로 원 O_2가 원 O_1의 중심을 지난다.
$x=4$, $y=2$를 ㉠에 대입하면 $4+(-2-a)^2=4$
따라서 $a=-2$

해검단 TALK 원의 중심과 현
원의 중심과 현의 성질은 자주 활용되는 개념이므로 반드시 기억해 두자.
① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
② 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

L025 평행이동과 대칭이동을 활용하여 문제해결하기 정답 ①

원 $x^2+(y-1)^2=9$ 위의 점 P가 있다. 점 P를 y축의 방향으로 [정답률 30%]
❶ 점 Q의 위치를 찾아 좌표평면 위에 나타내어 본다.
-1만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자.
두 점 $A(1, -\sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$에 대하여 삼각형 ABQ의 넓이가 최대일 때,
❷ △ABQ의 넓이가 최대가 되는 점 Q의 좌표를 찾아 평행이동과 대칭이동의 성질을 이용한다.
점 P의 y좌표는? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

Step ❶ 평행이동과 대칭이동의 성질을 이용하여 점 Q의 위치를 찾는다.

원 $x^2+(y-1)^2=9$ 위의 점 P를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q는 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직인다.

Step ❷ $\overline{AB}$의 길이는 일정하므로 △ABQ의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 Q의 위치를 찾는다.

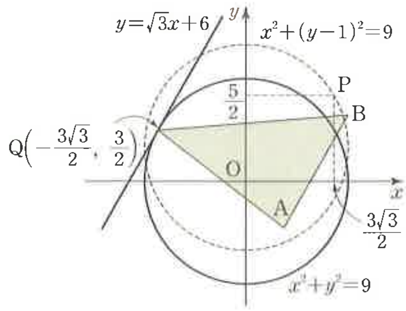
점 Q를 접점으로 하는 원 $x^2+y^2=9$의 접선 중 직선 AB에 평행하고, 점 Q의 x좌표가 음수일 때, 삼각형 ABQ의 넓이가 최대이다.

Step ❸ 점 Q의 좌표를 구한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{3-1}=\sqrt{3}$
기울기가 $\sqrt{3}$인 원 $x^2+y^2=9$의 접선의 방정식은
$y=\sqrt{3}x\pm6$
└ 기울기가 m인 원 $x^2+y^2=r^2$의 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
직선 $y=\sqrt{3}x\pm6$과
원 $x^2+y^2=9$가 만나는 점이 Q이므로
$x^2+(\sqrt{3}x\pm6)^2=9$
$4x^2\pm12\sqrt{3}x+27=0$
$(2x\pm3\sqrt{3})^2=0$
$x<0$이므로 $x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
즉 삼각형 ABQ의 넓이가 최대인 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Step ❹ 점 Q의 좌표와 평행이동과 대칭이동의 성질을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

점 P는 점 Q를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이므로
점 P의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}+1\right)$, 즉 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$
따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{5}{2}$

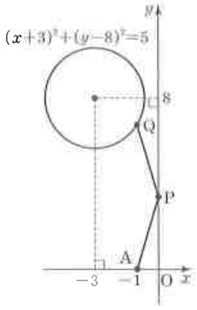


L026 도형의 대칭이동을 활용하여 문제해결하기 정답 45

좌표평면 위에 점 A$(-1, 0)$과 원 [정답률 49%]

$C:(x+3)^2+(y-8)^2=5$가 있다. y축 위의 점 P와 원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [4점] 45

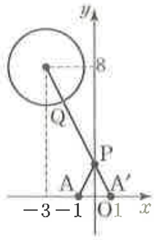
❶ 점의 대칭이동을 이용하여 최솟값 k를 구한다.



Step ❶ $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값을 구하기 위해 세 점 A, P, Q가 일직선에 놓이도록 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한다.

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점 A$'(1, 0)$에 대하여

$\overline{AP}+\overline{PQ}=\overline{A'P}+\overline{PQ}\geq\overline{A'Q}$



Step ❷ k의 값을 구한다.

$\overline{A'Q}$의 최솟값은 점 A$'(1, 0)$과 원 C의 중심 $(-3, 8)$ 사이의 거리에서 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$를 뺀 값이다.

두 점 $(1, 0)$, $(-3, 8)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3-1)^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$이므로

$k=4\sqrt{5}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

따라서 $k^2=45$

L027 대칭이동을 이용하여 실생활 문제해결하기 정답 ⑤

그림과 같이 동서로 뻗어 있는 직선도로 l과 남서쪽에서 북동쪽으로 뻗어 있는 직선도로 m이 이루는 각은 45°이다. [정답률 50%]

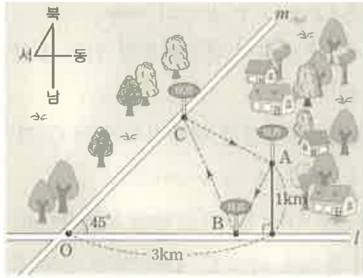
두 직선도로 l과 m이 만나는 지점 O로부터 동쪽으로 3 km 떨어진 지점에서 북쪽으로 1 km 떨어진 지점에 정류소 A가 있다. 정류소 A를 출발해서 직선도로 l 위의 한 지점과 직선도로 m 위의 한 지점을 차례로 경유하여 정류소 A로 돌아오는 도로를 만들려고 한다.

❶ 주어진 상황을 좌표평면 위에 나타낸다.

만들려고 하는 도로의 길이가 최소가 되도록 직선도로 l 위의 한 지점에 정류소 B, 직선도로 m 위의 한 지점에 정류소 C를 만들 때, 두 정류소 B와 C 사이의 거리(km)는?

❷ 점 A를 대칭이동하여 도로의 길이가 최소가 되는 B, C의 좌표를 구한다.

(단, 도로의 폭은 무시하며 모든 지점과 도로는 동일평면 위에 있다.) [4점]



① $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\dfrac{7\sqrt{5}}{12}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$

Step ❶ 지점 O를 원점, 직선도로 l을 x축으로 놓고 주어진 상황을 좌표평면 위에 나타낸다.

지점 O를 좌표평면 위의 원점, 직선도로 l을 x축으로 정하면 직선도로 m은 직선 $y=x$, 정류소 A의 좌표는 A$(3, 1)$이다.

Step ❷ 점 A를 대칭이동하여 도로의 길이가 최소가 되는 경우를 찾는다.

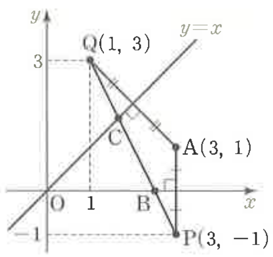
점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하면

P의 좌표는 $(3, -1)$

또 점 A를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면

Q의 좌표는 $(1, 3)$

따라서 만들려고 하는 도로의 최소 길이는 $\overline{PQ}$의 길이와 같다.



Step ❸ 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 이용하여 B, C의 좌표를 구한다.

두 점 P$(3, -1)$, Q$(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-2(x-1)$

즉 $y=-2x+5$

x축과 직선 $y=-2x+5$의 교점은

B$\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$

$y=x$와 직선 $y=-2x+5$의 교점은

C$\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$

따라서

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-0\right)^2}$$
$$=\frac{5\sqrt{5}}{6}(\text{km})$$

실전솔루션

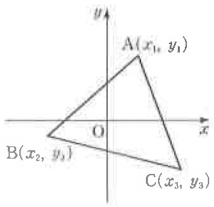
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

L028 평행이동을 이용하여 도형의 넓이 추론하기 　정답 ①

[정답률 69%]

그림과 같이 좌표평면 위에서 일직선 위에 있지 않은 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$에 대하여
$a=x_1-x_3$, $b=y_1-y_3$, $c=x_2-x_3$, $d=y_2-y_3$
이라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}|ad-bc|$
임을 보인 것이다.



세 점 A, B, C를 x축의 방향으로 $-x_3$만큼, y축의 방향으로 $-y_3$만큼 평행이동시킨 점을 각각 A′, B′, C′이라 하면
$a=x_1-x_3$, $b=y_1-y_3$, $c=x_2-x_3$, $d=y_2-y_3$
이므로 $\overline{C'A'}=$ (가) 이고,
❶ $A'(a, b)$, $C'(0, 0)$에 두 점 사이의 거리 구하는 공식을 적용한다.
직선 C′A′의 방정식은 (나) 이다.
❷ 직선 C′A′의 기울기는 $\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$이고, 원점을 지난다.
이때, 점 B′에서 직선 C′A′에 내린 수선의 발을 H라 하면
❸ B′H는 점 B′과 직선 C′A′ 사이의 거리와 같다.
$\overline{B'H}=$ (다) 이다.
그런데 삼각형 A′B′C′과 삼각형 ABC는 합동이므로
삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}|ad-bc|$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
❶	$\sqrt{a^2+b^2}$	$bx-ay=0$	$\frac{\lvert ad-bc\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
②	$\sqrt{a^2+b^2}$	$ax-by=0$	$\frac{\lvert ad-bc\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
③	$\sqrt{a^2+b^2}$	$bx-ay=0$	$\frac{\lvert ad-bc\rvert}{2\sqrt{a^2+b^2}}$
④	$\sqrt{c^2+d^2}$	$ax-by=0$	$\frac{\lvert ad-bc\rvert}{2\sqrt{c^2+d^2}}$
⑤	$\sqrt{c^2+d^2}$	$bx-ay=0$	$\frac{\lvert ad-bc\rvert}{\sqrt{c^2+d^2}}$

Step ❶ 세 점 A, B, C를 평행이동시킨 세 점 A′, B′, C′의 좌표를 구한다.

$A'(a, b)$, $B'(c, d)$, $C'(0, 0)$이므로

$$\overline{C'A'}=\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}$$
$$=\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Step ❷ 직선 C′A′의 기울기는 $\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$이고 C(0, 0)임을 이용한다.

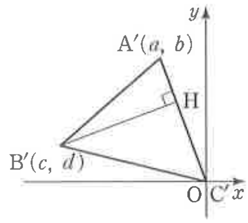
직선 C′A′의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$에서

$\boxed{bx-ay=0}$

Step ❸ 점 H의 좌표를 구하지 않고, 점 B′과 직선 $bx-ay=0$ 사이의 거리를 구하여 $\overline{B'H}$의 길이를 구한다.

$\overline{B'H}$는 점 $B'(c, d)$에서 직선 $bx-ay=0$까지의 거리이므로 점과 직선 사이의 거리 구하는 공식에 의하여

$$\overline{B'H}=\frac{|bc-ad|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\boxed{\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



따라서 삼각형 A′B′C′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{C'A'}\times\overline{B'H}=\frac{1}{2}|ad-bc|$

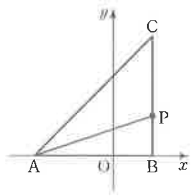
씨리얼 Special

문제편 pp. 174 ~ 176

1 ⑤	2 ③	3 ④	4 ②	5 ①	6 ④	7 ②
8 ③	9 ⑤	10 ②	11 ②			

1 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 이해하기 정답 ⑤

그림과 같이 세 점 A$(-4,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, C$(2,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 점 P가 변 BC 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 최솟값은? [3점]



❶ 점 P의 좌표를 미지수로 나타내고 두 점 사이의 거리를 구해 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 최솟값을 구한다.

① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

Step ❶ 점 P의 좌표를 $(2,\ t)$로 나타낸다.

점 P가 변 BC 위에 있으므로 점 P의 좌표를

$(2,\ t)$ $(0\le t\le 6)$

라 하자.

Step ❷ $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$을 t에 대한 완전제곱식으로 나타내고 최솟값을 구한다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=\{(2+4)^2+(t-0)^2\}+t^2+(t-6)^2$

$=3t^2-12t+72$

$=3(t-2)^2+60$

따라서 $t=2$일 때 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 최솟값은 60이다.

2 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 문제해결하기 정답 ③

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의

❶ 점 P, Q의 위치가 선분 AB의 수직이등분선 위에 있음을 안다.

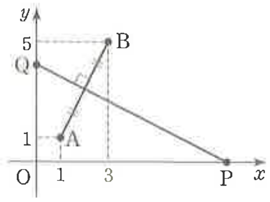
점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2$의 값은? [3점]

❷ 점 P, Q의 좌표를 구해 $\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2$의 값을 구한다.

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

Step ❶ 점 P와 점 Q의 위치를 나타낸다.

점 A와 점 B에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q는 그림과 같이 선분 AB를 수직이등분하는 직선이 x축과 만나는 점, y축과 만나는 점과 같다.



Step ❷ 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(3,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{5-1}{3-1}=2$

이때 선분 AB에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$m\times 2=-1$에서 $m=-\dfrac{1}{2}$

또 두 점 A$(1,\ 1)$, B$(3,\ 5)$의 중점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 두 점 A, B를 이은 선분의 수직이등분선의 방정식은

$y-3=-\dfrac{1}{2}(x-2)$

즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$

Step ❸ 점 P, Q의 좌표를 구하고 $\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2$의 값을 구한다.

두 점 P, Q는 각각 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$가 x축, y축과 만나는 점이므로

P$(8,\ 0)$, Q$(0,\ 4)$

따라서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(8-1)^2+(0-1)^2=50$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=(0-1)^2+(4-1)^2=10$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2=40$

다른 풀이

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$, y축 위의 점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라 하자. 두 점 A, B에서 점 P, Q까지의 거리가 각각 같으므로

$(a-1)^2+(0-1)^2=(a-3)^2+(0-5)^2$

$a^2-2a+1+1=a^2-6a+9+25$

$4a=32$

$a=8$

$(0-1)^2+(b-1)^2=(0-3)^2+(b-5)^2$

$1+b^2-2b+1=9+b^2-10b+25$

$8b=32$

$b=4$

따라서 점 P, Q의 좌표는 P$(8,\ 0)$, Q$(0,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2=40$

3 한 점과 평행이동을 한 직선 사이의 거리 구하기 정답 ④

점 (1, 1)을 점 (4, −1)로 옮기는 평행이동에 의하여 두 점
❶ 점의 평행이동을 안다.
A(2, 2), B(4, 6)이 옮겨지는 점을 각각 A′, B′이라 하자.
❷ 두 점 A′, B′의 좌표를 구하여 직선 A′B′의 방정식을 구한다.
원점 O와 직선 A′B′ 사이의 거리는? [3점]
❸ 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $3\sqrt{2}$ ❹ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{22}$

Step ❶ 점의 평행이동의 규칙을 찾는다.

점 (1, 1)을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 점 (4, −1)로 옮겨졌다고 하면

$1+a=4,\ 1+b=-1$이므로

$a=3,\ b=-2$

Step ❷ 직선 A′B′의 방정식을 구한다.

두 점 A(2, 2), B(4, 6)을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 점의 좌표는

A′(5, 0), B′(7, 4)

이때 직선 A′B′의 방정식은

$$y-0=\frac{4-0}{7-5}(x-5)$$

$y=2x-10$

즉 $2x-y-10=0$

Step ❸ 원점과 직선 A′B′ 사이의 거리를 구한다.

따라서 원점 O와 직선 A′B′ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$
$$=2\sqrt{5}$$

4 원과 직선 사이의 위치 관계 이해하기 정답 ②

원 $x^2+(y+1)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동
❶ 원을 평행이동한다.
시킨 도형이 직선 $3x+4y-15=0$과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정
❷ 원과 직선이 두 점에서 만나는 조건을 활용한다.
수 a의 개수는? [3점]

① 5 ❷ 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Step ❶ 원을 평행이동한 식을 구한다.

원 $x^2+(y+1)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면

$(x-a)^2+(y-1)^2=4$

Step ❷ 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작음을 알고 이를 이용하여 정수 a의 개수를 구한다.

이 원과 직선 $3x+4y-15=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(a, 1)$과 직선 $3x+4y-15=0$ 사이의 거리가 2보다 작아야 한다.

$$\frac{|3a+4\times1-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}<2$$

$$\frac{|3a-11|}{5}<2$$

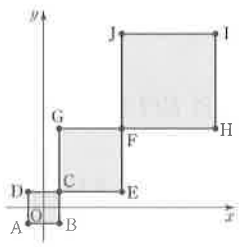
$-10<3a-11<10$

$\frac{1}{3}<a<7$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, ⋯, 6이고, 그 개수는 6이다.

5 평면좌표 위의 삼각형의 무게중심 문제해결하기 정답 ①

그림과 같이 좌표평면에서 두 점 A(−1, −1), B(1, −1)을 꼭짓점으로 하
❶ 삼각형 ABC의 무게중심 G_1을 찾는다.
는 정사각형 ABCD, 점 C를 한 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 4인 정사각
❷ 삼각형 FIJ의 무게중심 G_2를 찾는다.
형 CEFG, 점 F를 한 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 6인 정사각형 FHIJ가 있다. 세 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G_1이라 하고, 삼각형 FIJ의 무게중심을 G_2라 할 때, 선분 G_1G_2의 중점은 M(p, q)이다. $p+q$의 값은? [4점]
❸ 중점을 찾아 $p+q$의 값을 구한다.



❶ 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

Step ❶ 삼각형 ABC의 꼭짓점을 찾아 무게중심 G_1을 구한다.

정사각형 ABCD에서 B(1, −1), $\overline{BC}=2$이므로 점 C의 좌표는 (1, 1)이다.

삼각형 ABC의 무게중심 G_1의 좌표는

$$\left(\frac{-1+1+1}{3}, \frac{-1+(-1)+1}{3}\right),\ 즉\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Step ❷ 삼각형 FIJ의 꼭짓점을 찾아 무게중심 G_2를 구한다.

정사각형 CEFG에서 C(1, 1), $\overline{CE}=4$이므로 점 F의 좌표는 (5, 5)

이다.

정사각형 FHIJ에서 F(5, 5), $\overline{\mathrm{FH}}=6$이므로 두 점 I, J의 좌표는 각각 (11, 11), (5, 11)이다.

삼각형 FIJ의 무게중심 G_2의 좌표는

$\left(\frac{5+11+5}{3}, \frac{5+11+11}{3}\right)$, 즉 (7, 9)

Step ❸ 선분 G_1G_2의 중점을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

선분 G_1G_2의 중점이 $M(p, q)$이므로

$$p=\frac{\frac{1}{3}+7}{2}=\frac{11}{3},\ q=\frac{-\frac{1}{3}+9}{2}=\frac{13}{3}$$

따라서 $p+q=\frac{11}{3}+\frac{13}{3}=8$

6 직선의 방정식과 도형 문제해결하기 정답 ④

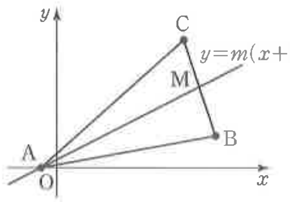
세 점 A(−1, 0), B(10, 2), C(8, 8)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 직선 $y=m(x+1)$이 이등분한다. 직선 $y=m(x+1)$ 위의 점 중에서 삼각형 ABC의 내부나 삼각형 ABC의 변 위에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는? (단, m은 상수이다.) [4점]

❶ 직선이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

❷ 조건을 만족하는 점을 찾는다.

① 3 ② 4 ③ 5 ❹ 6 ⑤ 7

Step ❶ 직선이 항상 지나는 점의 좌표를 찾아 m의 값을 구한다.



직선 $y=m(x+1)$이 m의 값에 관계없이 항상 점 A(−1, 0)을 지난다.

이때 직선 $y=m(x+1)$이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=m(x+1)$은 변 BC의 중점 M(9, 5)를 지난다.

$5=m(9+1)$, $m=\frac{1}{2}$

Step ❷ 직선 위의 점 중 조건을 만족하는 점의 개수를 구한다.

따라서 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위의 점 중에서 삼각형 ABC의 내부나 삼각형 ABC의 변 위에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 (−1, 0), (1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4), (9, 5)이므로 그 개수는 6이다.

해검단 TALK

삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나.

7 직선의 위치 관계를 이용하여 도형의 넓이 문제해결하기 정답 ②

두 상수 a, b에 대하여 세 직선

$l : 2x-y+6=0$

$m : x+ay-10=0$

$n : bx+y+3=0$

이 있다. 두 직선 l, m은 서로 수직이고, 두 직선 l, n은 서로 평행하다.

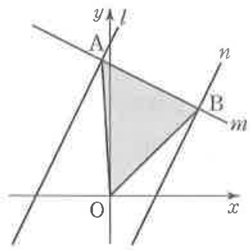
❶ 두 직선의 위치 관계에 따라 a, b의 값을 구한다.

직선 m이 두 직선 l, n과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

❷ 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

① 8 ❷ 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

Step ❶ 주어진 조건으로 a, b의 값을 구한다.



두 직선 l, m이 서로 수직이므로

$2\times1+(-1)\times a=0$

$a=2$

또 두 직선 l, n은 서로 평행하므로

$\frac{2}{b}=\frac{-1}{1}\neq\frac{6}{3}$

$b=-2$

Step ❷ 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

두 점 A, B 사이의 거리는 평행한 두 직선 l, n 사이의 거리와 같다.

이때 직선 $n : -2x+y+3=0$ 위의 한 점 (0, −3)과 직선 $l : 2x-y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times0-1\times(-3)+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

원점 O와 직선 $m : x+2y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{9\sqrt{5}}{5}\times2\sqrt{5}=9$$

실전 솔루션

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에 대하여

❶ 두 직선이 평행하다. ⇨ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

❷ 두 직선이 수직이다. ⇨ $aa'+bb'=0$

8 직선의 방정식과 원의 방정식 문제해결하기

정답 ③

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하자.
❶ 직선 l과 점 A를 지나고 l에 수직인 직선의 방정식을 구한다.
점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 원 $(x-8)^2+(y-a)^2=a^2$의 넓이를
❷ 원의 중심을 지나는 직선은 원의 넓이를 이등분함을 이용한다.
이등분한다. 점 P가 원 $(x-8)^2+(y-a)^2=a^2$ 위의 점일 때, 선분 OP의 길
❸ OP의 길이의 범위를 구한다.
이가 정수가 되는 점 P의 개수는? (단, $a>0$이고, O는 원점이다.) [4점]

① 20 ② 22 ❸ 24 ④ 26 ⑤ 28

Step ❶ 직선 l의 방정식과 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식을 구한다.

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선 l의 방정식은
$x+y=2$
즉 $y=-x+2$
직선 l과 x축이 만나는 점 A의 좌표는 $(2,\ 0)$이고
직선 l에 수직인 직선의 기울기는 1이므로
점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은
$y=x-2$

Step ❷ a의 값을 구하고 원점 O와 원의 중심 사이의 거리를 구한다.

이 직선이 원 $(x-8)^2+(y-a)^2=a^2$의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=x-2$는 원의 중심 $(8,\ a)$를 지난다.
즉 $a=8-2=6$
원점 O와 원 $(x-8)^2+(y-6)^2=6^2$의 중심 $(8,\ 6)$ 사이의 거리는
$\sqrt{8^2+6^2}=10$

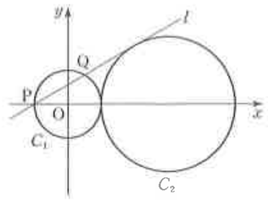
Step ❸ $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이가 정수인 점의 개수를 구한다.

이때
$10-6\le\overline{\mathrm{OP}}\le10+6$
$4\le\overline{\mathrm{OP}}\le16$
선분 OP의 길이가 정수인 경우는
$4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 16$
이다.
$\overline{\mathrm{OP}}=4$ 또는 $\overline{\mathrm{OP}}=16$인 점 P의 개수는 각각 1이고,
$\overline{\mathrm{OP}}=5,\ \overline{\mathrm{OP}}=6,\ \overline{\mathrm{OP}}=7,\ \cdots,\ \overline{\mathrm{OP}}=15$
인 점 P의 개수는 각각 2이다.
따라서 선분 OP의 길이가 정수가 되는 점 P의 개수는
$1\times2+2\times11=24$

9 삼각형의 닮음을 이용하여 원의 방정식 문제해결하기

정답 ⑤

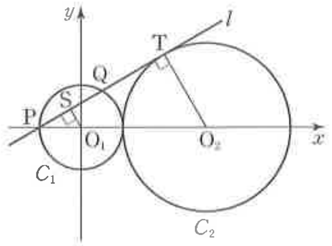
두 원 $C_1 : x^2+y^2=4$, $C_2 : (x-6)^2+y^2=16$이 있다. 원 C_1과 x축이 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 P라 하고, 점 P를 지나고 원 C_2에 접하는 직선을 l이라 하자. 또, 직선 l과 원 C_1이 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 k라 할 때, k^2의 값은? [4점]



❶ 두 원 C_1, C_2의 중심에서 직선 l에 내린 수선의 발을 나타내고 삼각형의 닮음비를 이용한다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ❺ 12

Step ❶ 두 원 C_1, C_2의 중심에서 직선 l에 내린 수선의 발을 좌표평면 위에 나타낸다.



두 원 C_1, C_2의 중심은 각각 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$이고 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 각각 2, 4이다.
원 C_1의 중심 $\mathrm{O_1}(0,\ 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 S라 하고, 원 C_2의 중심 $\mathrm{O_2}(6,\ 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 T라 하자.

Step ❷ 삼각형의 닮음비를 이용하여 C_1의 중심에서 직선까지의 거리를 구한다.

이때 $\overline{\mathrm{PO_1}}=2$, $\overline{\mathrm{PO_2}}=8$, $\overline{\mathrm{O_2T}}=4$이고
$\triangle\mathrm{PO_1S}\backsim\triangle\mathrm{PO_2T}$이므로
$\overline{\mathrm{PO_1}}:\overline{\mathrm{O_1S}}=\overline{\mathrm{PO_2}}:\overline{\mathrm{O_2T}}$
$2:\overline{\mathrm{O_1S}}=8:4$
따라서 $\overline{\mathrm{O_1S}}=1$

Step ❸ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하여 k^2의 값을 구한다.

직각삼각형 $\mathrm{PO_1S}$에서
$\overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PO_1}}^2-\overline{\mathrm{O_1S}}^2}$
$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
따라서
$k=\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PS}}=2\sqrt{3}$
이므로
$k^2=(2\sqrt{3})^2=12$

10 점의 평행이동과 대칭이동 추론하기 정답 ②

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다.

(가) $x=y$이면 이동하지 않는다.
(나) $x>y$이면 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다.
(다) $x<y$이면 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한다.

점 P의 좌표가 $(6, 3)$일 때, 점 P가 위의 규칙에 따라 4번 이동한 점을 Q, 6번
❶ 점 P를 규칙에 따라 4번, 6번 이동한 점의 좌표를 구한다.
이동한 점을 R라 하자. 선분 QR의 길이는? [4점]

① 1 ❷ $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

Step ❶ 주어진 점 P를 4번, 6번 이동시켜 두 점 Q, R의 좌표를 구한다.

점 $(6, 3)$에서 $6>3$이므로 (나)에 의하여 점 $(3, 6)$으로 이동한다.
점 $(3, 6)$에서 $3<6$이므로 (다)에 의하여 점 $(3, 4)$로 이동한다.
점 $(3, 4)$에서 $3<4$이므로 (다)에 의하여 점 $(3, 2)$로 이동한다.
점 $(3, 2)$에서 $3>2$이므로 (나)에 의하여 점 $(2, 3)$으로 이동한다.
점 $(2, 3)$에서 $2<3$이므로 (다)에 의하여 점 $(2, 1)$로 이동한다.
점 $(2, 1)$에서 $2>1$이므로 (나)에 의하여 점 $(1, 2)$로 이동한다.

Step ❷ $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이를 구한다.

따라서 두 점 Q, R의 좌표가 각각 $(2, 3)$, $(1, 2)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{(1-2)^2+(2-3)^2}$
$=\sqrt{2}$

11 평행이동과 대칭이동을 이용하여 문제해결하기 정답 ②

점 $(3, 7)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨
❶ 점을 평행이동, 원을 대칭이동시킨다.
점을 P라 하자. 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원을
C라 하자. 점 P를 지나고 원 C에 접하는 두 접선이 원 C와 접하는 점을 각각
❷ 사각형 PQSR를 좌표평면에 나타내고 넓이를 구한다.
Q, R라 하고 원 C의 중심을 S라 할 때, 사각형 PQSR의 넓이는? [4점]

① $7\sqrt{6}$ ❷ $8\sqrt{6}$ ③ $9\sqrt{6}$ ④ $10\sqrt{6}$ ⑤ $11\sqrt{6}$

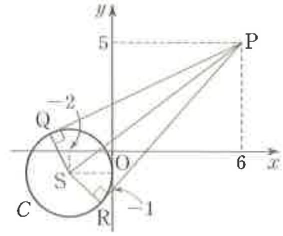
Step ❶ 점과 원을 각각 평행이동, 대칭이동시킨다.

점 $(3, 7)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 점 P의 좌표는 $(6, 5)$이다.

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 C의 방정식은

$(-x-2)^2+(-y-1)^2=4$
즉 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

Step ❷ 도형의 길이를 구하여 사각형 PQSR의 넓이를 구한다.



원 C의 중심 S의 좌표가 $(-2, -1)$이므로

$\overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{(6+2)^2+(5+1)^2}=10$

직각삼각형 PQS에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PS}}^2-\overline{\mathrm{SQ}}^2}$
$=\sqrt{100-4}=4\sqrt{6}$

삼각형 PQS의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{SQ}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times2$
$=4\sqrt{6}$

따라서 사각형 PQSR의 넓이는

$2\times\triangle\mathrm{PQS}=2\times4\sqrt{6}$
$=8\sqrt{6}$