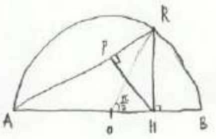
문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



$\triangle ROH$ 에서 $\overline{OR}=1$, $\angle ROH=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{OH}=\frac{1}{2}$ 이다.

또한, 호 RB에 대한 중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

원주각은 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 $\angle PAH=\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\triangle PAH$ 에서 $\overline{AH}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $\angle PAH=\frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{AP}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ 이 된다.

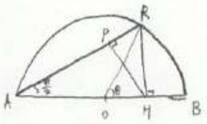
$\triangle OAP$ 에서 코사인 법칙에 의해, $\overline{OP}^2=\frac{27}{16}+1-2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{7}{16}$ 이고,

$\triangle ABP$ 에서 코사인 법칙에 의해, $\overline{BP}^2=\frac{27}{16}+4-2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{19}{16}$ 이므로 $\overline{OP}^2+\overline{BP}^2=\frac{13}{8}$ 이다.

2.



$\angle ROB=\theta$ 라고 하면, $\angle RAH=\frac{\theta}{2}$ 이고

$\triangle ROH$ 에서 $\overline{OR}=1$, $\angle ROH=\theta$ 이므로

$\overline{OH}=\cos\theta$ 이다. (단, $0<\theta<\pi$)

$\triangle APH$ 에서 $\overline{AH}=1+\cos\theta$, $\angle RAH=\frac{\theta}{2}$ 이므로 $\overline{AP}=\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 이다.

$\triangle AOP$ 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{OP}^2=1+\cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^2-2\times1\times\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=\cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)\{(1+\cos\theta)-2\}+1$$
$$=\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos^2\theta-1)+1$$
$$=-\sin^2\theta\cos^2\frac{\theta}{2}+1=-4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}+1=4\cos^6\frac{\theta}{2}-4\cos^4\frac{\theta}{2}+1$$

이다. $\cos^2\frac{\theta}{2}=X$ (단, $0<X<1$) 라고 하면

$\overline{OP}^2=4X^3-4X^2+1$ 이다. $f(X)=4X^3-4X+1$ 이라고 하고

양변을 X에 대해 미분하면 $f'(X)=12X^2-8X$ 이므로

$f(x)$는 $X=0$ 에서 극대, $X=\frac{2}{3}$ 에서 극소를 갖는다.

따라서 $0\le X\le1$ 에서 $f(X)\ge f(\frac{2}{3})=\frac{11}{27}$ 이므로

$\overline{OP}$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

3. $\angle ROB=\theta$ 라고 하고, 점 O를 $(0,0)$ 으로 나타내면

$A(-1,0)$, $B(1,0)$, $R(\cos\theta,\sin\theta)$, $H(\cos\theta,0)$ 이다.

직선 $\overline{AR}$ 의 방정식은 $y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}(x+1)$ 이므로

점 P의 x좌표를 a라고 하면 점 $P\left(a,\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}(a+1)\right)$ 이다.

문제 1-2 에서 $\overline{AP}=\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 이므로

$\overline{AP}^2=\cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^2=(a+1)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)^2(a+1)^2$ 이다.

$(a+1)^2\left\{1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)^2\right\}=\cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^2$,

$(a+1)^2=\frac{1}{2}\times\cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^3=\frac{1}{2}\times\cos^2\frac{\theta}{2}\times8\cos^6\frac{\theta}{2}$

$=4\cos^8\frac{\theta}{2}$ 이므로 $a=2\cos^4\frac{\theta}{2}-1$ 이다.

따라서 $P\left(2\cos^4\frac{\theta}{2}-1,\ \sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$ 이다.

$2\cos^4\frac{\theta}{2}-1=t$ 일때, $\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}=2\sqrt{\left(\frac{t+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}$ 이므로

입체도형의 부피는

$$\int_{-1}^{1}\left\{4\left(\frac{t+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-4\times\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\}dt$$
$$=\left[\frac{2\sqrt{2}}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(t+1)^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\times2^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}\times2^3$$
$$=\frac{8}{15}$$ 이다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1\. $\angle ROB = \frac{\pi}{3}$ 일때, 삼각형 ROB는 한변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\overline{OH} = \frac{1}{2}$, $\overline{AH} = \frac{3}{2}$, $\overline{PH} = \frac{3}{4}$, $\overline{PA} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다. 이때, 삼각형PBR은 $\angle PRB = 90^\circ$인 직각삼각형이고 $\overline{PR} = \overline{AR} - \overline{PA} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\overline{BR} = 1$ 이므로

$\overline{BP}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{BR}^2 = \frac{3}{16} + 1 = \frac{19}{16}$ 이다.

삼각형POH 에서 $\angle PHO = \frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙을 이용하여

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 - 2 \times \overline{OH} \times \overline{PH} \times \cos(\angle PHO)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{4+9-6}{16} = \frac{7}{16} \text{ 이다.}$$

따라서 $\overline{OP}^2 = \frac{7}{16}$, $\overline{BP}^2 = \frac{19}{16}$ 이므로 $\overline{OP}^2 + \overline{BP}^2 = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$ 이다.

2\. $\angle RAB = \theta$라 할때, $\angle RHA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이고 $\overline{AR} = 2\cos\theta$,

$\overline{RH} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, $\overline{PR} = \sin\theta\sin 2\theta$.

$\overline{PH} = \cos\theta\sin 2\theta$, $\overline{OH} = 2\cos\theta\cos\theta - 1 = \cos 2\theta$ 이다.

이때, 코사인법칙을 이용하여 $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 - 2\overline{OH} \times \overline{PH} \times \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 이므로

이를 정리하면 $\overline{OP}^2 = 4\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 1$ 이다.

$\cos\theta = t$ $(0<t<1)$로 치환하고 치환한식을 $f(t)$라 할때

$f(t) = 4t^6 - 4t^4 + 1$ 로 나타낼수 있다. $f(t) = \overline{OP}^2$이므로 $f(t)$의 최솟값이 $\overline{OP}^2$의 최솟값이되고, $\overline{OP}$의 최솟값이 된다

$f'(t) = 24t^5 - 16t^3$ 이고 $\quad t < \frac{\sqrt{6}}{3}$일때 $f'(t) < 0$ 이고

$= 8t^3(3t^2 - 2)$ $\quad t > \frac{\sqrt{6}}{3}$일때 $f'(t) > 0$ 이므로

$f(t)$는 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$일때 극솟값 즉 최솟값을 갖는다

따라서 $f(\frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{11}{27}$ 이므로 $\overline{OP}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{11}{27}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

3\. 선분AB를 x축, 점O를 원점이라 할때, 점P에서 x축에 내린 수선의 발을 M이라 하면 문제에서 주어진 입체도형의 한변의 길이는 $\overline{PM}$의 길이와 같다.

앞서 구한 $\overline{PH} = \cos\theta\sin 2\theta$, $\overline{OH} = \cos 2\theta$, $\angle PHO = \frac{\pi}{2} - \theta$를 이용하여

$\frac{1}{2} \times \overline{PM} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{OH} \times \sin(\angle PHO)$를 계산하면

$\overline{PM} = \cos^2\theta\sin 2\theta = 2\cos^3\theta\sin\theta$ 이다.

점P(x, y)라할때 원점과 점P사이의 거리, 즉 $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$이고

문제2에서 구한것과 같이 $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 1}$ 이라 할수있다. 또한 $y = \overline{PM}$ 이므로 이를 정리하면

$$x^2 = 4\cos^8\theta - 4\cos^4\theta + 1$$

$$= (2\cos^4\theta - 1)^2 \text{ 이라 할수있고}$$

$x = 2\cos^4\theta - 1$ 라 할수 있다.

따라서 입체도형의 부피는 $\int_{-1}^{1} (\cos^2\theta\sin 2\theta)^2 dx = \int_{-1}^{1} \cos^4\theta\sin^2 2\theta\, dx$

$$\begin{cases} \cos^4\theta = \frac{x+1}{2} \\ \cos^2\theta = \sqrt{\frac{x+1}{2}} \\ \cos^6\theta = \frac{x+1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{2}} \\ \cos^8\theta = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$\frac{x+1}{2} = t$ 로 치환하여 계산하면

$$= \int_{-1}^{1} (4\cos^6\theta - 4\cos^8\theta)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 \times \frac{x+1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{2}} - 4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 (4t\sqrt{t} - 4t^2)\, 2\, dt$$

$$= 8\int_0^1 (t\sqrt{t} - t^2)\, dt$$

$$= 8\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 8 \times \frac{6-5}{15} = \frac{8}{15} \text{ 이다.}$$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 이므로 $\int_0^{\beta} \sin^n x \cos x\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right]_0^{\beta}$

이다. $\left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right]_0^{\beta} = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\beta = \frac{a_n}{n+1}$

따라서 $a_n = \sin^{n+1}\beta$ 이고 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $0<\sin\beta<1$ 이다.

따라서 a_n은 공비가 양수인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin\beta} = \frac{1}{6}$ 이다.

$6\sin^2\beta + \sin\beta - 1 = 0$, $(2\sin\beta+1)(3\sin\beta-1)=0$

이므로 $\sin\beta = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $\tan\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다

$(0<\beta<\frac{\pi}{2})$

2. 표본평균의 평균은 모평균과 같으므로 X가 (m, σ^2)을 따를 때
$\overline{X}$는 $(m, \frac{\sigma^2}{n})$을 따른다

(가)에서 m이 8보다 작으면 $P(X\geq 8)<0.5$, $P(\overline{X}\geq 8)<0.5$
이므로 합이 1이 될 수 없고 8보다 클 때는 합이 1보다 크므로
$m=8$이다.

(나)의 확률은 각각 $P(Z\geq \frac{4}{\sigma}) + P(Z\geq -\frac{\sqrt{n}}{2\sigma})$과 같고
합이 1이 되려면 $\frac{4}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}$ 이어야 한다.
따라서 $n=64$ 이다.

(다)에서 1이라는 값은 $2.0\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$ 이므로
$\sigma = \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$ 이다

따라서 $m+\sigma+n = 8+4+64 = 76$ 이다

3. $1-p=q$라 할 때 구하는 확률은
${}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots + {}_{2023}C_{2022}\,p^{2022}q^1$
이다. 이항정리에 의해

$\underline{(p+q)^{2023}}_{①} = {}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} + {}_{2023}C_1\,p^1q^{2022} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots + {}_{2023}C_{2023}\,p^{2023}q^0$

$\underline{(-p+q)^{2023}}_{②} = {}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} - {}_{2023}C_1\,p^1q^{2022} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots - {}_{2023}C_{2023}\,p^{2023}q^0$

이므로 ①과 ②를 더해준뒤 2로 나누면
구하는 값이 나온다.

$$\frac{1+(1-2p)^{2023}}{2} = {}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots + {}_{2023}C_{2022}\,p^{2022}q^1$$

이다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\frac{a_n}{n+1} = \int_0^{\beta} \sin^n x \cos x\, dx$

$\sin x = t$로 치환하면, $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$\frac{a_n}{n+1} = \int_0^{\sin\beta} t^n\, dx$

$\frac{a_n}{n+1} = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^{\sin\beta}$

$\frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(\sin\beta)^{n+1} \Rightarrow a_n = (\sin\beta)^{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{6}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 으로 수렴해야 하는데 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$0<\sin\beta<1$ 이다 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 으로 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 첫째항이 $\sin\beta^2$, 공비가 $\sin\beta$인 등비수열로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin\beta} = \frac{1}{6}$ 이다.

$6\sin^2\beta = 1-\sin\beta$

$6\sin^2\beta + \sin\beta - 1 = 0$

$(2\sin\beta+1)(3\sin\beta-1) = 0$ $\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\beta = \frac{1}{3}$

$\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다 따라서 $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. $X \sim (m, \sigma^2)$

$\bar{X} \sim (m, (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2)$ 를 따른다

$P(X\geq 8) + P(\bar{X}\geq 8) = 1$

$= P(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}) + P(Z \geq \frac{8-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1$ —(가)

$P(X\geq 12) + P(\bar{X}\geq 7.75) = 1$

$\Rightarrow P(Z \geq \frac{12-m}{\sigma}) + P(Z \geq \frac{7.75-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1$ —(나)

정규분포는 대칭성을 띄고 (가)와 (나)의 두 식이 합이 1을 이루므로

0을 기준으로 대칭이다 따라서 $m=8$ ($\because$ 식(가) 통해)

(나) $P(Z \geq \frac{4}{\sigma}) + P(Z \geq \frac{-0.25}{\sigma}\sqrt{n}) = 1$

$\sqrt{n} = 8$ 이므로 $n=64$

조건 <다>를 통해 표준편차는 구할 수 있다

$\bar{X} \sim (8, (\frac{\sigma}{8})^2)$ 의 정규분포를 따르고

$P(0\leq Z\leq 2.0) = 0.4772$ 이므로

신뢰도 95.44%의 신뢰구간은 $P(-2\leq Z\leq 2)$ 일때 임을 알 수 있다. 조건의 맞는 신뢰구간은

$8 - 2.0\cdot\frac{\sigma}{8} \leq m \leq 8 + 2.0\cdot\frac{\sigma}{8}$ 이다 이때 신뢰구간이

$\bar{x}-1 \leq m \leq \bar{x}+1$ 이므로 $\sigma = 4$ 임을 알 수 있다

따라서 $m+\sigma+n = 8+64+4 = 76$ 이다.

3. 모평균 1번이 나온 횟수가 짝수일 확률은 이항정리를 사용하면

${}_{2023}C_0\, p^0 (1-p)^{2023} + {}_{2023}C_2\, p^2 (1-p)^{2021} + {}_{2023}C_4\, p^4 (1-p)^{2019} + \cdots + {}_{2023}C_{2022}\, p^{2022}(1-p)^1$ 이다.

이항정리를 이용하면

$(p+1-p)^{2023}$

$\Rightarrow {}_{2023}C_0\, p^0(1-p)^{2023} + {}_{2023}C_1\, p^1(1-p)^{2022} + \cdots + {}_{2023}C_{2023}\, p^{2023}(1-p)^0 = 1$

마찬가지로

$(p-(1-p))^{2023} =$

$\Rightarrow -{}_{2023}C_0\, p^0(1-p)^{2023} + {}_{2023}C_1\, p^1(1-p)^{2022} - {}_{2023}C_2\, p^2(1-p)^{2021} \cdots + {}_{2023}C_{2023}\, p^{2023} = (2p-1)^{2023}$

$(p+1-p)^{2023} - (p-(1-p))^{2023} = 2\left({}_{2023}C_0\, p^0(1-p)^{2023} + {}_{2023}C_2\, p^2(1-p)^{2021} \cdots + {}_{2023}C_{2022}\, p^{2022}(1-p)^1\right)$ 이다

$\frac{1-(2p-1)^{2023}}{2} = \left({}_{2023}C_0\, p^0(1-p)^{2023} + \cdots + {}_{2023}C_{2022}\, p^{2022}(1-p)^1\right)$

이다

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨