01-

[4점-21년모의평가 6월]

검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

풀이01-

풀이

검정 B, 파랑 G, 빨강 R라고 하면

$$B \quad GGGG \quad RRRR$$

지금부터 하려는 건 이겁니다.
위 볼펜중 5개를 선택하는 경우를 찾고
각각의 경우에 2명에게 나눠주는 경우의 수를 구하는 거죠.

① 볼펜 (B, G, G, G, G)를 선택

2명에게 남김없이 나눠주는 건, 같은 물건 나눠주기 중복조합이죠.

B를 2명에게 나눠주기 : ${}_2\mathrm{H}_1 = {}_{2+1-1}\mathrm{C}_1 = {}_2\mathrm{C}_1 = 2$

G, G, G, G를 2명에게 나눠주기 : ${}_2\mathrm{H}_4 = {}_{2+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$

따라서 경우의 수는

$2 \times 5 = 10$

그런데 (R, G, G, G, G), (B, R, R, R, R), (G, R, R, R, R)을 선택해도 같은 경우의 수가 나올 겁니다.

즉, 같은 색이 (1개, 4개)일 때 나눠주는 방법의 수는

$4 \times 10 = \boxed{40}$ (가지)

② 볼펜 (B, G, G, G, R) 선택

2명에게 나눠주는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_1$$
$$= {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 2 \times 4 \times 2 = 16$$

같은 색이 (1개, 1개, 3개)인 경우로 다른 것도 있겠죠.

(B, R, R, R, G)

하나 더 있습니다. 따라서 나눠주는 방법의 수는

$2 \times 16 = \boxed{32}$ (가지)

③ 볼펜 (B, G, G, R, R) 선택

2명에게 나눠주는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2$$
$$= {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 2 \times 3 \times 3 = \boxed{18}$$

같은 색이 (1개, 2개, 2개)인 경우는 이거 하나뿐입니다.

④ 볼펜 (G, G, G, R, R) 선택

같은 색이 (3개, 2개)인 경우입니다. (G, G, R, R, R)인 경우도 있으니 2명에게 나눠주는 방법의 수는

$$2 \times ({}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_2)$$
$$= 2 \times ({}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2) = 2 \times (4 \times 3) = \boxed{24}$$

①, ②, ③, ④에서 모든 경우의 수는

$$\boxed{40} + \boxed{32} + \boxed{18} + \boxed{24} = 114$$

답 114

06-

[4점-21년모의평가 6월]

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 p이다. $120p$의 값을 구하시오.

> (가) $f(1)\times f(2)\geq 9$
>
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

풀이06-

1. A에서 A로의 모든 함수의 개수는

$$4\times4\times4\times4=\boxed{4^4}\ (\text{가지})$$

2. 만족해야 할 조건은

조건(가) : $f(1)\times f(2)\geq 9$

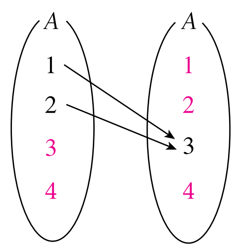
조건(나) : 치역의 원소는 3개

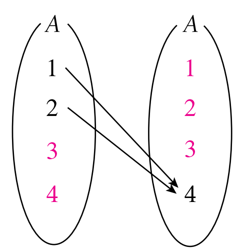
조건(가)에 따라 중간분류를 합시다.

① $f(1)=3,\ f(2)=3$인 경우

치역의 원소가 3개가 되려면
정의역의 3, 4가
공역의 1, 2, 4 중 2개를 골라
일대일로 대응해야 합니다.

$${}_3\mathrm{C}_2\times2!=\boxed{6}\ (\text{가지})$$





② $f(1)=4,\ f(2)=4$인 경우

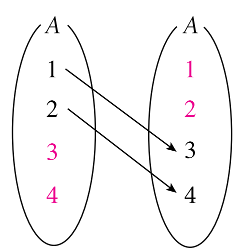
위의 ①과 마찬가지로
함수의 개수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times2!=\boxed{6}\ (\text{가지})$$

③ $f(1)=3,\ f(2)=4$인 경우

공역의 1, 2 중 1개를 골라
치역의 원소를 3개로 만든 후,
정의역의 3, 4와 대응시키는
방법의 수는

$${}_2\mathrm{C}_1\times3^2=18$$

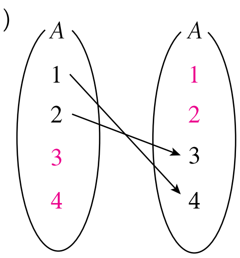


그런데 여기에서 정의역 3, 4가 치역의 3, 4하고만 대응하게
되면 치역의 원소가 2개가 되어버리니..
이런 함수는 제외해야죠.

$$18-({}_2\mathrm{C}_1\times2^2)=18-8=\boxed{10}\ (\text{가지})$$

④ $f(1)=4,\ f(2)=3$인 경우

위의 ③과 마찬가지입니다.
함수의 개수는 $\boxed{10}$ (가지)



①, ②, ③, ④에서 조건(가), (나)를 만족시키는 함수의 개수는

$$\boxed{6}+\boxed{6}+\boxed{10}+\boxed{10}=32\ (\text{가지})$$

3. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{32}{4^4}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore 120p=120\times\frac{1}{8}=15$$

답 15

06-

[4점-21년모의평가 9월]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 $A,\ B,\ C$라 할 때, $A \subset B \subset C$일 확률은?

① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$ ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

풀이06-

풀이

$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 공집합 아닌 모든 부분집합이 15개라는데..
늘 그렇듯 다 써놓고 시작해야죠?

$\{1\}\ \{2\}\ \{3\}\ \{4\}$

$\{1, 2\}\ \{1, 3\}\ \{1, 4\}\ \{2, 3\}\ \{2, 4\}\ \{3, 4\}$

$\{1, 2, 3\}\ \{1, 2, 4\}\ \{1, 3, 4\}\ \{2, 3, 4\}$

$\{1, 2, 3, 4\}$

이 중에서 3개를 뽑아 $A,\ B,\ C$라 하는데

$$A \subset B \subset C$$

가 되어야 합니다.
가장 큰 C를 기준으로 중간분류를 합시다.

① $C = \{1, 2, 3, 4\}$일 때

$B = \{1, 2, 3\}$이면

$A = \{1, 2,\}\ \{1, 3\}\ \{2, 3\}\ \{1\}\ \{2\}\ \{3\}$: 6개

$B = \{1, 2, 4\},\ \{1, 3, 4\},\ \{2, 3, 4\}$일 때도

A는 각각 6개씩 가능할테니

$A \subset B \subset C$인 경우의 수는

$6 + 6 + 6 + 6 = \boxed{24}$

뿐만 아니라

$B = \{1, 2\}$이면

$A = \{1\}\ \{2\}$: 2개

$B = \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\}$일 때도

A는 각각 2개씩 가능할테니

$A \subset B \subset C$인 경우의 수는

$2 \times 6 = \boxed{12}$

② $C = \{1, 2, 3\}$일 때

$B = \{1, 2\}$이면

$A = \{1\}\ \{2\}$: 2개

$B = \{1, 3\},\ \{2, 3\}$일 때도

A는 각각 2개씩 가능하니, 경우의 수는

$2 \times 3 = \boxed{6}$

③ $C = \{1, 2, 4\},\ \{1, 3, 4\},\ \{2, 3, 4\}$일 때

②와 마찬가지로 각각의 경우마다 6개씩 있을테니

$A \subset B \subset C$인 경우의 수는

$6 \times 3 = \boxed{18}$

따라서 ①, ②, ③에서 $A \subset B \subset C$일 확률은

$$\frac{\boxed{24} + \boxed{12} + \boxed{6} + \boxed{18}}{{}_{15}\mathrm{P}_3} = \frac{60}{15 \times 14 \times 13} = \frac{2}{91}$$

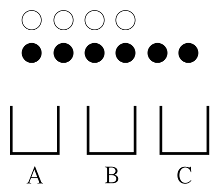
답 ②

01-

흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

풀이01-

같은 물건 나눠주는 중복조합이죠. 근데..
예컨데 '검은 공'을 2개 이상 나눠주라고
했으면 검은 공을 A, B, C에 미리 2개씩
주고 시작하면 되는데
그냥 '공'이 2개 이상이라네요.



A, B, C에 미리 2개씩 주는 방법이 여러 가지라는 소리죠.

1. 중간분류를 합시다.

	A	B	C	남은 공
①	(○ ○)	(○ ○)	(● ●)	● ● ● ●
②	(○ ○)	(○ ●)	(○ ●)	● ● ● ●
③	(○ ○)	(○ ●)	(● ●)	○ ● ● ●
④	(○ ●)	(○ ●)	(○ ●)	○ ● ● ●
		⋮		⋮

되게 많군요. 이제 각각의 경우마다
남은 공 4개를 A, B, C에 나눠주는 경우의 수
를 구하면 되는데.. 문제가 있습니다.
중복되는 경우가 너무 많이 나와요. 사방에서 막 튀어 나옵니다.
예. 우리 망했어요.

2. 이처럼 나눠주야 할 '같은 물건'이 2종류일 때는
각각을 따로 나눠줘야 합니다. 흰 공 따로, 검은 공 따로.
(위에선 흰 공, 검은 공을 한꺼번에 나눠주다 망한 거임.)

흰 공 4개로 중간분류를 합시다.

	A	B	C	남은 공	
①	(○ ○ ○ ○)	( )	( )	● ● ● ● ● ●	⋯→(ⅰ)

여기에 검은 공 6개를 넣는데..
A, B, C에 공이 2개 이상 있어야 하니, 미리 2개씩 넣어주시고

(○ ○ ○ ○) (● ●) (● ●) ● ●

남은 공 2개를 A, B, C에 넣는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
그리고 (ⅰ)에서 (○ ○ ○ ○) ( ) ( )가 서로 위치를 바꾸는 방법은 $\frac{3!}{2!} = 3$이니

경우의 수는 $6 \times 3 = \boxed{18}$

② (○ ○ ○) (○) ( ) ● ● ● ● ● ● ⋯→(ⅱ)
여기에 검은 공 6개를 넣는데..
각 상자에 공이 2개 이상 있어야 하니

(○ ○ ○) (○ ●) (● ●) ● ● ●

남은 공 3개를 A, B, C에 넣는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$
(ⅱ)에서 (○ ○ ○) (○) ( )가 서로 위치를 바꾸는 방법은
$3! = 6$이니 경우의 수는

$6 \times 10 = \boxed{60}$

③ (○ ○) (○ ○) ( ) ● ● ● ● ● ●
(○ ○) (○ ○) (● ●) ● ● ● ●

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = 15$

$\frac{3!}{2!} \times 15 = \boxed{45}$

④ (○ ○) (○) (○) ● ● ● ● ● ●
(○ ○) (○ ●) (○ ●) ● ● ● ●

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = 15$

$\frac{3!}{2!} \times 15 = \boxed{45}$

①, ②, ③, ④에서 구하는 모든 경우의 수는

$\boxed{18} + \boxed{60} + \boxed{45} + \boxed{45} = 168$

답 168

03-

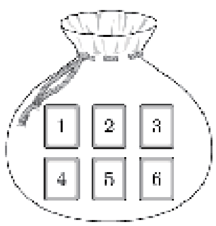
[4점-21년모의평가 9월]

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A=\{x\,|\,a_1 \le x \le a_2\},\quad B=\{x\,|\,b_1 \le x \le b_2\}$$

라 할 때, $A\cap B \ne \varnothing$일 확률은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$



풀이03-

풀이

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$

$$A = \{x \mid a_1 \le x \le a_2\}, \quad B = \{x \mid a_3 \le x \le a_4\}$$

1. 6장의 카드 중 2개를 뽑으면 집합 A를 만들 수 있지요.
   집합 A를 만드는 법 : ${}_6C_2 = 15$
   집합 B를 만드는 법도 마찬가지로 ${}_6C_2 = 15$ 가지이므로

집합 A와 집합 B를 만드는 모든 경우의 수는

$$15 \times 15 = \boxed{225} \text{ (가지)}$$

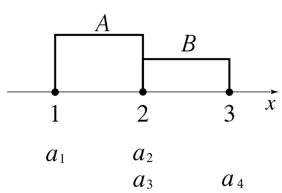
2. 이렇게 만든 집합 A, B에서

$$A \cap B \ne \varnothing$$

인 경우를 찾으려하니.. 잠깐 생각해 봐도 너무 많습니다.
여사건을 구하는 편이 낫겠습니다.

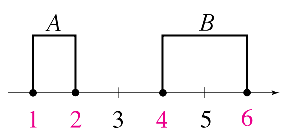
$$A \cap B = \varnothing$$

교집합이 없으려면
우선, a_1, a_2, a_3, a_4가 모두 다른 숫자여야 합니다.
오른쪽처럼 같은 숫자를 두 번 뽑으면
그 숫자가 교집합이 되니까요.

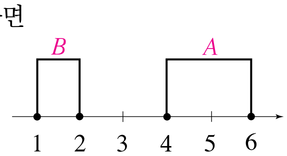


$A \cap B = \{2\}$

그래서 서로 다른 숫자 4개를 뽑은 후,
작은 숫자 2개, 큰 숫자 2개로
집합을 만들면 겹치는 부분이
없도록 A, B를 만들 수 있습니다.



즉, '서로 다른 4개의 숫자를 뽑기'만 하면
$A \cap B = \varnothing$인 경우를
딱 2가지 만들 수 있다는 것이지요.



(가만 생각해보면 이건 '순서가 정해진 순열'과 같은 원리입니다.)
그렇다면 $A \cap B = \varnothing$이도록 집합 A, B를 만드는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times 2 = \boxed{30}$$

3. 따라서 $A \cap B \ne \varnothing$일 확률은

$$1 - \frac{\boxed{30}}{\boxed{225}} = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

답 ⑤

01-

[4점-21년 수능]

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.)

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.

(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.

(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

풀이01-

경우를 나누고, 나누고, 나누다.. 지쳐서 포기하는 문제
본인 머리를 자책할 거 없음. 그냥 평가원이 나쁜 놈임.

●를 먼저 나눠주고, 그 다음 ○을 나눠주는 순서로 풀 거임.

규칙(나) : A가 받는 ●는 4개 이상이다.

이 규칙에 따라 'A의 ● 개수'로 경우를 나누겠음.

1. 〈A에 ● 4개인 경우〉

●를 모두 나눠준 후, ○를 나눠주기로 했으니까
남은 ● 2개를 B, C, D에 나눠주겠음.

$_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ (가지)

그런데 이 6가지 방법은 또 크게 2종류로 경우가 나뉨.
● 2개를 B, C, D에게
2개, 0개, 0개로 나눠주는 법 : 3가지 ⋯→(ⅰ)
1개, 1개, 0개로 나눠주는 법 : 3가지 ⋯→(ⅱ)

① ● 2개를 2개, 0개, 0개로 나눠주기

B에게 ●● 주는 경우를 예로 들겠음.
이제 ○ 6개를 나눠줘야 하는데
일단 C, D에 1개씩 주고 (∵규칙(가))
남은 ○ 4개를 나눠줄 때
규칙(다)땜에 A, B에는 ●가 더 많아야 함.
즉, B에는 ○를 2개 미만으로 줘야 함.
또 경우가 나뉨.

A ● ● ● ●
B ● ●
C ○
D ○

①-1 B에 ○이 0개

○ 4개를 A, C, D에 나눠주면 됨

$_3H_4$

그런데 ○ 4개를 몽땅 A에 주면
규칙(다)에 어긋남. 이 경우를 빼면

$_3H_4 - 1 = {}_6C_4 - 1 = 14$

A ● ● ● ●
B ● ●
C ○
D ○

①-2 B에 ○이 1개

남은 ○ 3개를 A, C, D에 나눠주면

$_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

○ 3개를 A에 몰빵해도 규칙(다)를
만족시킴.

A ● ● ● ●
B ● ● ○
C ○
D ○

따라서 B에게 ●●을 주는 방법의 수는

$14 + 10 = 24$

그리고 (ⅰ)에서 C, D에게 ●● 주는 경우도 있으므로

$24 \times 3 = \boxed{72}$ (가지)

② ● 2개를 1개, 1개, 0개로 나눠주기

B, C에게 ● 1개씩 주는 경우를 예로 들겠음.
일단, D에게 ○ 1개 주고 (규칙(가))
규칙(다)에 의해, B와 C 중 하나는
○이 없어야 함. 경우가 또 나뉨.

A ● ● ● ●
B ●
C ●
D ○

②-1 B에 ○이 0개

●이 ○보다 많은 사람은 A, B인 경우임.
규칙(다)를 지키기 위해 C는 ○을
1개 이상 가져야 하니 ○은 4개가 남음.
남은 ○ 4개를 A, C, D에게 나눠주는 방법은

$_3H_4$

여기에서 A에 ○ 4개를 모두 주는 경우는 제외해야 함 (규칙(다))

$_3H_4 - 1 = {}_6C_4 - 1 = 14$

A ● ● ● ●
B ●
C ● ○
D ○

②-2 C에 ○이 0개

위와 똑같음.

$_3H_4 - 1 = 14$

A ● ● ● ●
B ● ○
C ●
D ○

따라서 B, C에게 ● 1개씩 주는 방법의 수는

$14 + 14 = 28$

(ⅱ)에서 같은 경우가 3가지 있으므로

$28 \times 3 = \boxed{84}$ (가지)

2. 〈A에 ● 5개인 경우〉

남은 ● 1개를 B, C, D에 주는 법 : 3가지 ⋯→(ⅲ)

●를 B에 주는 경우를 예로 들면
C, D에 ○ 1개씩 주고 (규칙(가))
B는 ○ 주지 않고 (규칙(다))
A, C, D에 남은 ○ 4개를 나눠주는 방법은

$_3H_4 = {}_6C_4 = 15$

A ● ● ● ● ●
B ●
C ○
D ○

○ 4개를 A에 몰아줘도 조건(다)를 만족함.
(ⅲ)에서 이런 경우가 3가지이므로

$15 \times 3 = \boxed{45}$

3. 〈A에 ● 6개인 경우〉

규칙(다)를 만족 못 하니 볼 것도 없음.

4. 따라서 모든 조건을 만족시키는 경우의 수는

$\boxed{72} + \boxed{84} + \boxed{45} = 201$

답 201