[광운대학교 2024학년도 논술고사 문제 해설-자연계열 2교시 1번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 일대일 함수, 로그함수, 사인함수, 합성함수, 이차방정식, 평균값정리
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$는
   ① $a>1$일 때 x의 값이 커지면 y의 값도 커진다.
   ② $0<a<1$일 때 x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다.

2. 함수 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

3. 함수 $f(x)$에 대하여 $f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=(f \circ f^n)(x)$ (n은 자연수)이다.

[1] 두 함수 $f(x)=\log_k x$, $g(x)=x+1$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $k>1$)

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x^2)$과 직선 $x=k^n$이 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$이라고 하고 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 a_n이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n^2}}$을 구하시오. (단, n은 자연수) [8점]

(2) $m_1, m_2, \cdots, m_{10}$은 1이 아닌 5^{10}의 서로 다른 약수들이라고 할 때, t에 대한 다음 방정식의 양의 실근의 개수를 구하시오. [12점]

$$f(m_1)+f(m_2)+\cdots+f(m_{10})=f(t^2+3t+4)$$

(3) 함수 $g^{10}(x)$가 일대일함수임을 증명하시오. [10점]

(4) 합성함수 $(g^{10}\circ f)(x)$에 대하여 다음의 값을 구하시오. [10점]

$$(g^{10}\circ f)(k)+(g^{10}\circ f)(k^2)+\cdots+(g^{10}\circ f)(k^{100})$$

[2] a가 0이 아닌 실수일 때, 함수 $f(x)=\sin(ax-1)$을 이용하여 다음 등식을 만족시키는 실수 t가 열린구간 $(a,\ a+1)$에 존재함을 증명하시오. [10점]

$$\sin(a^2+a-1)-\sin(a^2-1)=a\cos(at-1)$$

3. 출제 의도

[1] (1) 두 곡선의 교점을 이용하여 수열의 극한을 계산하는 능력을 평가한다.
(2) 약수들을 이용하여 간단한 로그방정식을 만족시키는 실근을 구하는 능력을 평가한다.
(3) 합성함수를 구하는 능력과 합성함수가 일대일함수인지 판정하는 능력을 평가한다.
(4) 로그함수가 포함된 합성함수의 함수값을 구하는 능력을 평가한다.

[2] 사인함수의 성질을 이해하고 평균값정리를 적용할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취 기준
제시문1	교육과정	**[수학 Ⅰ] - (2) 지수함수와 로그함수 –** ② 지수함수와 로그함수

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취 기준</th></tr>
<tr><td></td><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학 I] - (2) 지수함수와 로그함수 – $\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수
[12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문2</td><td>교육과정</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문3</td><td>교육과정</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항[1]
(1)</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한
[12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항[1]
(2)</td><td>교육과정</td><td>[수학] - (1) 문자와식 – $\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식
[수학 I] - (2) 지수함수와 로그함수 – $\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학] - (1) 문자와식 – $\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식
[10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
[수학] - (1) 지수함수와 로그함수 – $\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수
[12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항[1]
(3)</td><td>교육과정</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문항[1]
(4)</td><td>교육과정</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
[수학 I] - (2) 지수함수와 로그함수</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
수학2212. 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
[수학 I] - (2) 지수함수와 로그함수 – $\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수
[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
</table>

문항 및 제시문		관련 성취 기준
문항[2]	교육과정	**[수학 II] - (2) 미분 -** ③ 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	**[수학 II] - (2) 미분 -** ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2018	59~60, 209~211
	수학 I	이준열 외	천재교육	2018	46~49
	수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2018	212
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	73~75
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11~18

5. 문항 해설

수열, 로그함수, 사인함수, 함수의 합성, 이차방정식 등의 개념은 인문학과 자연과학을 포함한 모든 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념이다. 이러한 기본개념들의 정의와 기본적인 성질들을 이해하면 해결할 수 있는 문항들이다.

[1] (1) 두 곡선과 직선이 만나는 점을 구하여 n이 무한히 커질 때 간단한 수열의 극한을 구하는 문항이다.
(2) 로그함수가 포함된 방정식으로부터 구한 이차방정식의 근을 구함으로써 간단하게 해결할 수 있는 문항이다.
(3) 일대일함수 및 합성함수의 정의를 적용하여 간단하게 증명할 수 있는 문항이다.
(4) 합성함수를 이용하여 간단하게 구할 수 있는 문항이다.

[2] 사인함수가 닫힌구간에서 연속이고 열린구간에서 미분가능한 함수라는 성질을 이용하여 평균값정리를 적용하면 쉽게 증명할 수 있는 문항이다.

6. 채점 기준

하위	채점 기준	배점

문항		
1-1	$A_n=(k^n, n)$과 $B_n=(k^n, 2n)$을 구했으면	2
1-1	$A_{n^2}=(k^{n^2}, n^2)$과 $B_{n^2}=(k^{n^2}, 2n^2)$을 구했으면	2
1-1	$a_n=n$과 $a_{n^2}=n^2$을 구했으면	2
1-1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$을 구했으면	2
1-2	$f(m_1)+f(m_2)+\cdots+f(m_{10})=\log_k(m_1m_2\cdots m_{10})$을 구했으면	2
1-2	$m_1m_2\cdots m_{10}=t^2+3t+4$ 또는 $t^2+3t+4-m_1m_2\cdots m_{10}=0$을 구했으면	4
1-2	$t=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})}}{2}$ 을 구했으면	2
1-2	$9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})=-7+4m_1m_2\cdots m_{10}\ge 493$을 구했으면	2
1-2	$t=0$일 때 $t^2+3t+4-m_1m_2\cdots m_{10}<0$이므로 주어진 방정식의 양의 실근은 1개라는 설명을 했으면	2
1-3	$g^{10}(a)=g^9(g(a))=g^9(a+1)=g^8((a+1)+1)=g^8(a+2)=\cdots=a+10$과정을 통해서 $g^{10}(a)=a+10$을 구했으면 (위의 과정이 없이 $g^{10}(a)=a+10$을 구했으면 3점 감점)	5
1-3	$g^{10}(a)=g^{10}(b)$이라고 가정하고 $a=b$임을 보이면 (또는, $a\neq b$이라고 가정하고 $g^{10}(a)\neq g^{10}(b)$임을 보이면)	5
1-4	$(g^{10}\circ f)(k)+(g^{10}\circ f)(k^2)+\cdots+(g^{10}\circ f)(k^{100})$ $=\{f(k)+10\}+\{f(k^2)+10\}+\cdots+\{f(k^{100})+10\}$을 구했으면	4
1-4	$(g^{10}\circ f)(k)+(g^{10}\circ f)(k^2)+\cdots+(g^{10}\circ f)(k^{100})$ $=(1+10)+(2+10)+\cdots+(100+10)$을 구했으면	3
1-4	$(g^{10}\circ f)(k)+(g^{10}\circ f)(k^2)+\cdots+(g^{10}\circ f)(k^{100})=6050$을 구했으면	3
2	“$f(x)$는 구간 $[a, a+1]$에서 연속이고 구간 $(a, a+1)$에서 미분가능하다”를 설명했으면	3
2	“$f(a+1)-f(a)=f'(t)$를 만족시키는 실수 t가 열린구간 $(a, a+1)$에 존재한다”를 설명했으면	3
2	$f(a+1)-f(a)=\sin(a^2+a-1)-\sin(a^2-1)$을 구했으면	2
2	$f'(t)=a\cos(at-1)$을 구했으면	2

7. 예시 답안

[1]

(1) $f(x)=\log_k x$이므로 $f(x^2)=\log_k x^2=2\log_k x$이다.

따라서 $A_n=(k^n, n)$이고 $B_n=(k^n, 2n)$이다.

또한 $A_{n^2}=(k^{n^2}, n^2)$이고 $B_{n^2}=(k^{n^2}, 2n^2)$이므로 $a_n=n$이고 $a_{n^2}=n^2$이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이다.

(2) $f(m_1)+f(m_2)+\cdots+f(m_{10})=\log_k m_1+\log_k m_2+\cdots+\log_k m_{10}=\log_k(m_1 m_2\cdots m_{10})$

이고 $f(t^2+3t+4)=\log_k(t^2+3t+4)$이다.

따라서 $\log_k(m_1m_2\cdots m_{10})=\log_k(t^2+3t+4)$이므로 $m_1m_2\cdots m_{10}=t^2+3t+4$이고

$t^2+3t+4-m_1m_2\cdots m_{10}=0$이다.

그러므로 $t=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})}}{2}$ 이다.

그런데 $m_1m_2\cdots m_{10}\ge 125$이므로 $9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})=-7+4m_1m_2\cdots m_{10}\ge 493$이다.

따라서 방정식 $t^2+3t+4-m_1m_2\cdots m_{10}=0$의 판별식이 양수이고 $t=0$일 때

$t^2+3t+4-m_1m_2\cdots m_{10}<0$이므로 주어진 방정식의 양의 실근은 1개다.

(다른 풀이)

$9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})=-7+4m_1m_2\cdots m_{10}\ge 493$를 구하고 다음과 같이 양의 실근의 개수를 구할 수 있다.

$\sqrt{493}\ge 22$이므로 $t=\frac{-3+\sqrt{9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})}}{2}\ge 9$, $t=\frac{-3-\sqrt{9-4(4-m_1m_2\cdots m_{10})}}{2}\le 0$

따라서 주어진 방정식의 양의 실근은 1개다.

(3) 모든 실수 a에 대하여

$g^{10}(a)=g^9(g(a))=g^9(a+1)=g^8((a+1)+1)=g^8(a+2)=\cdots=a+10$이다.

따라서 $g^{10}(a)=a+10$이다.

$g^{10}(x)$는 일대일함수임을 증명하기 위해서 실수 a,b에 대하여 $g^{10}(a)=g^{10}(b)$이라고 가정하자.

그러면 $a+10=b+10$이므로 $a=b$이다.

따라서 $g^{10}(x)$는 일대일함수이다.

.

(4) (3)에서 모든 실수 a에 대하여 $g^{10}(a)=a+10$이므로

$$\begin{aligned}(g^{10}\circ f)(k)+(g^{10}\circ f)(k^2)+\cdots+(g^{10}\circ f)(k^{100}) &= \{f(k)+10\}+\{f(k^2)+10\}+\cdots+\{f(k^{100})+10\} \\ &= (1+10)+(2+10)+\cdots+(100+10) \\ &= (1+2+\cdots+100)+10\times 100 = 6050\end{aligned}$$

이다. 따라서

$(g^{10}\circ f)(k)+(g^{10}\circ f)(k^2)+\cdots+(g^{10}\circ f)(k^{100})=6050$

[2]

$f(x)$는 닫힌구간 $[a,a+1]$에서 연속이고 열린구간 $(a,a+1)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값정리에 의하여 $\dfrac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a}=f'(t)$를 만족시키는 실수 t가 열린구간 $(a,a+1)$에 존재한다. 그러므로 $f(a+1)-f(a)=f'(t)$를 만족시키는 실수 t가 열린구간 $(a,a+1)$에 존재한다.

그런데

$$f(a+1)-f(a)=\sin(a^2+a-1)-\sin(a^2-1), \qquad f'(t)=a\cos(at-1)$$

이므로 등식 $\sin(a^2+a-1)-\sin(a^2-1)=a\cos(at-1)$을 만족시키는 실수 t가 열린구간 $(a,a+1)$에 존재한다.

[광운대학교 2024학년도 논술고사 문제 해설-자연계열 2교시 2번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	극한, 미분, 수학적 귀납법, 모집단과 표본, 치환적분
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
   ① $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
   ② $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

2. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x)\}'=f'(g(x))g'(x)$$

3. 미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서
   ① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.
   ② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

4. 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

[1] 극한값 $\lim_{x \to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x^2}\left(e^{2x}\cos\pi x - 1\right)\right\}$을 구하시오. [8점]

[2] 모평균이 p, 모표준편차가 q인 모집단에서 크기가 n^2인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(4\overline{X}+2)+\mathrm{V}(n\overline{X}+3)=18$을 만족시키는 두 자연수 p, q를 구하시오. [8점]

[3] 실수 x에 대한 다음 등식에 대하여 물음에 답하시오.

$$x^n - 1 = (x-1)\sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

(1) 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [8점]

(2) 다항식 x^{2024}을 다항식 x^3+x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [10점]

[4] 함수 $f(x)=e^{\sin^2 x}-e^{\cos^2 x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하고 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [8점]

(2) 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin 2x\, dx$를 구하시오. [8점]

3. 출제 의도

[1] 무리수 e와 관련한 지수함수 혹은 로그함수의 극한을 이해하고 있는지의 여부를 평가한다. 함수의 극한 문제를 해결하기 위해 미분계수의 형태를 구별할 수 있는 능력과 함수의 극한에 관한 성질을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는 문제 해결 능력을 평가한다.

[2] 모집단의 확률분포와 표본평균의 확률분포의 관계를 이해하고 있는지의 여부를 평가한다. 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차의 성질을 활용하여 표본평균의 분포에 관한 문제 해결 능력을 평가한다.

[3] 수학적 귀납법의 올바른 활용으로 자연수에 관한 수학 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다. 다항식의 사칙연산을 활용한 문제 해결 능력을 평가한다.

[4] 미분을 활용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있는 능력을 평가하고 이를 토대로 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제 해결 능력을 평가한다. 다양한 함수의 적분법에 있어서 치환적분법을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법
	성취기준	[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
제시문2	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법
	성취기준	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문4	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1]	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수와 도함수
	성취기준	[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
문항 [2]	교육과정	[확통] - (3) 통계 - 2 통계적 추정
	성취기준	[12확통03-06] 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법
	성취기준	[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학] - (1) 다항식 - 1 다항식의 연산
	성취기준	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2021년	162
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	88
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2020년	81
	미적분	김원경 외	비상	2022년	135

5. 문항 해설

[1] 무리수 e와 관련한 극한의 의미와 형태를 이해하고, 미분계수의 정의 형태를 극한값 구하는 문제에 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[2] 표본평균의 평균, 분산과 모집단의 모평균과 모분산과의 관계를 이해하고 평균과 분산을 계산하는 방법을 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[3] (1) 수학적 귀납법의 정의와 원리를 이해하고 이를 명제에 활용하면 증명할 수 있는 문항이다.
(2) 차수가 높은 다항식을 차수가 낮은 다항식으로 나누었을 때 표현되는 식에 (1)에서 증명한 식을 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.

[4] (1) 합성함수의 미분법을 활용하여 도함수를 구하고, 도함수의 부호를 함수의 증가, 감소, 극대, 극소의 판정에 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 함수의 정적분값을 구하기 위해 치환적분법을 이해하고 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1] 8점	$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$을 이용하면	3
	$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}(e^{2x}\cos\pi x-1)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$와 $f'(x)=2e^{2x}\cos\pi x-\pi e^{2x}\sin\pi x$, $f'(0)=2$을 얻으면	3
	극한값이 2임을 구하면	2
[2] 8점	$\mathrm{E}(\overline{X})=p$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{q^2}{n^2}$을 얻으면	3
	$\mathrm{E}(4\overline{X}+2)+\mathrm{V}(n\overline{X}+3)=4\mathrm{E}(\overline{X})+2+n^2\mathrm{V}(\overline{X})=4p+2+q^2=18$을 얻으면	3
	두 자연수는 $p=3$, $q=2$를 구하면	2

하위 문항	채점 기준	배점
[3](1) 8점	$n=1$일 때 등식이 성립함을 보이면	2
	$n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면	2
	$n=k+1$일 때 등식이 성립함을 보이면	4
[3](2) 10점	$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$을 얻으면	3
	x^{2024} 혹은 $x^{2024}-1$을 x^3+x^2+x+1로 나눈 식을 얻으면	5
	x^{2024}을 다항식 x^3+x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지 1을 얻으면	2
[4](1) 8점	$f'(x)=2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}+2\cos x\sin x\,e^{\cos^2 x}=2\sin x\cos x\left(e^{\sin^2 x}+e^{\cos^2 x}\right)$을 얻으면	2
	함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하면	4
	최솟값 $f(0)=f(\pi)=f(2\pi)=1-e$과 최댓값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e-1$을 구하면	2
[4](2) 8점	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2te^{t^2}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}e^p dp=\sqrt{e}-1$을 얻으면	4
	$-\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin x\cos x\,e^{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2te^{t^2}dt=\int_1^{\frac{1}{2}}e^p dp=\sqrt{e}-e$을 얻으면	4

7. 예시 답안

[1]

$f(x)=e^{2x}\cos\pi x$ 라고 하자.

$f(x)$는 모든 실수에서 미분가능한 함수이며 $f(0)=1$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^{2x}\cos\pi x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$이다.

또한 $f'(x)=2e^{2x}\cos\pi x-\pi e^{2x}\sin\pi x$, $f'(0)=2$이다.

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ln e\times f'(0)=2$$

[2]

모평균이 p, 모표준편차가 q이고 표본의 크기가 n^2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=p$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{q^2}{n^2}$

$\mathrm{E}(4\overline{X}+2)+\mathrm{V}(n\overline{X}+3)=18$에서

$\mathrm{E}(4\overline{X}+2)+\mathrm{V}(n\overline{X}+3)=4\mathrm{E}(\overline{X})+2+n^2\mathrm{V}(\overline{X})=4p+2+q^2=18$

$4p+q^2=16$를 만족하는 두 자연수는 $p=3$, $q=2$

[3]

(1) (ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=x-1$, (우변)$=x-1$이므로 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned} x^{k+1}-1 &= x^{k+1}-x^k+x^k-1 \\ &= x^k(x-1)+(x-1)\sum_{i=0}^{k-1}x^i \\ &= (x-1)\left(x^k+\sum_{i=0}^{k-1}x^i\right)=(x-1)\sum_{i=0}^{k}x^i \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)로부터 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

(2) $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$x^4=t$로 놓으면

$x^{2024}-1=\left(x^4\right)^{506}-1=t^{506}-1=(t-1)(t^{505}+t^{504}+\cdots+t+1)$이므로

$x^{2024}=(x^3+x^2+x+1)\left\{(x-1)(x^{2020}+x^{2016}+\cdots+x^4+1)\right\}+1$

따라서

x^{2024}을 다항식 x^3+x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

(다른 풀이)

$p(x)=x^3+x^2+x+1$로 놓으면

$$\begin{aligned} x^{2024}-1 &= (x-1)(x^{2023}+x^{2022}+\cdots+x+1) \\ &= (x-1)\left\{x^{2020}p(x)+x^{2016}p(x)+\cdots+x^4p(x)+p(x)\right\} \\ &= p(x)(x-1)(x^{2020}+x^{2016}+\cdots+x^4+1) \end{aligned}$$

따라서 다음을 얻는다.

$x^{2024}=p(x)Q(x)+1$

(다른 풀이)

$p(x)=x^3+x^2+x+1$로 놓으면

$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)=(x-1)p(x)$

$$\begin{aligned} x^{2024} &= (x^4)^{506}=\{(x-1)p(x)+1\}^{506} \qquad \text{(이항정리 적용)} \\ &= \sum_{k=1}^{506}{}_{506}\mathrm{C}_k(x-1)^k\{p(x)\}^k+1 \\ &= p(x)Q(x)+1 \end{aligned}$$

[4]

(1) $f'(x)=2\sin x\cos x\, e^{\sin^2 x}+2\cos x\sin x\, e^{\cos^2 x}=2\sin x\cos x\left(e^{\sin^2 x}+e^{\cos^2 x}\right)$

$f'(x)=0$으로부터 $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$를 얻고 이를 이용하여 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하면 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1-e$	↗	$e-1$	↘	$1-e$	↗	$e-1$	↘	$1-e$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=f(\pi)=f(2\pi)=1-e$이고 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e-1$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\cos^2 x}dx\cdots\cdots$①

①식의 항 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}dx$에서

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2t\,e^{t^2}dt$

$t^2=p$로 놓으면 $2t=\frac{dp}{dt}$이고, $t=0$일 때 $p=0$, $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $p=\frac{1}{2}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2t\,e^{t^2}dt=\int_0^{\frac{1}{2}} e^p dp=\sqrt{e}-1\cdots\cdots$㉠

①식의 항 $-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\cos^2 x}dx$에서

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\cos^2 x}dx=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2t\,e^{t^2}dt$

$t^2=p$로 놓으면 $2t=\frac{dp}{dt}$이고, $t=1$일 때 $p=1$, $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $p=\frac{1}{2}$이므로

$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2t\,e^{t^2}dt=\int_1^{\frac{1}{2}} e^p dp=\sqrt{e}-e\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡으로부터

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\sin^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cos x\,e^{\cos^2 x}dx=2\sqrt{e}-1-e$