한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

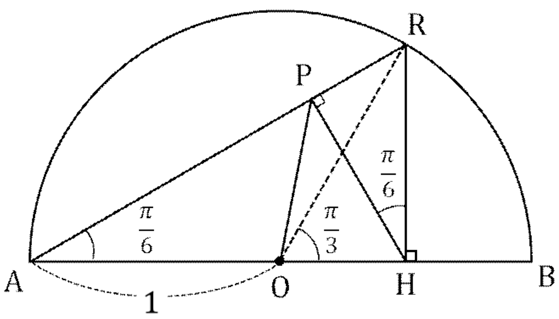
1. 오른쪽 그림에서

$\overline{AR}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times1\times1\times cos\frac{2\pi}{3} = 3$ 이다.

$\overline{AR} = \sqrt{3}$, $\overline{RH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{PR} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

이고 따라서

$\overline{AP} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ 이다.



$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{AP}\times\overline{OA}\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{16}$

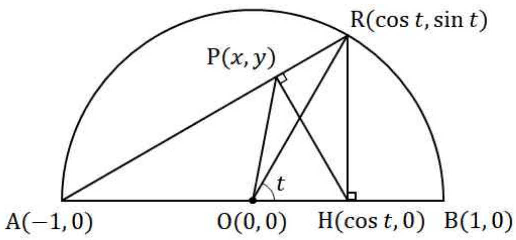
$\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AP}\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19}{16}$

따라서 $\overline{OP}^2 + \overline{BP}^2 = \frac{7}{16} + \frac{19}{16} = \frac{13}{8}$

답 : $\frac{13}{8}$

2. 지름의 양 끝점이 $A(-1,0)$, $B(1,0)$가 되고, 호 AB가 x축 윗부분에 오도록 반원을 좌표평면에 두자.
$\angle ROB = t$ $(0 \le t \le \pi)$라 하면, $R(\cos t,\ \sin t)$, $H(\cos t, 0)$이라 할 수 있다.
$0 < t < \pi$일 때, 두 점 $A(-1,0)$, $R(\cos t,\ \sin t)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 0 = \frac{\sin t - 0}{\cos t - (-1)}(x - (-1))$$



이고, 점 H를 지나고 선분 AR에 수직인 직선의 방정식은

$$y - 0 = -\frac{1+\cos t}{\sin t}(x - \cos t)$$

이다. 점 P는 이 두 직선의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립해서 풀면, 점 $P(x, y)$의 좌표는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1) \\ y = \frac{1}{2}\sin t\,(1 + \cos t) \end{cases}$$

($t = 0$이면 $P = B$, $t = \pi$이면 $P = A$이다.)

따라서 $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1)}$

이고, $f(t) = \cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1$이라 하면, $f'(t) = -\sin t\,(\cos t + 1)(3\cos t - 1)$이고,
$0 \le t \le \pi$일 때 $-1 \le cos\,t \le 1$이므로, 오른쪽 표에서 $f(t)$의 최솟값은
$t = \alpha$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$일 때, $f(t) = \frac{22}{27}$이다.

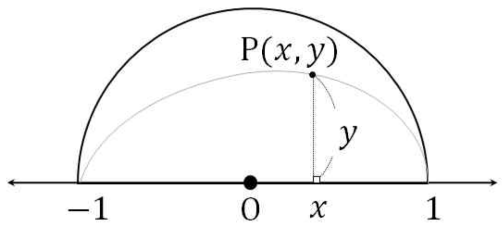
t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\cos t$	1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	-1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	2

따라서 구하는 $\overline{OP}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{22}{27}} = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다

답 : $\frac{\sqrt{33}}{9}$

3. 2번에서 구한 $P(x, y)$의 좌표로부터, $\cos t = -1 + \sqrt{2+2x}$이고,

$$y^2 = \left(\frac{1}{2}\sin t\,(1+\cos t)\right)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos t)(1+\cos t)^3$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2+2x}\right)\left(\sqrt{2+2x}\right)^3 = \sqrt{2}\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^2$$



이다. $-1 \le x \le 1$이므로 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1} y^2\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx - \int_{-1}^{1}(1+x)^2 dx = \left[\frac{2\sqrt{2}}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+x)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$ 이다.

답 : $\frac{8}{15}$

한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계

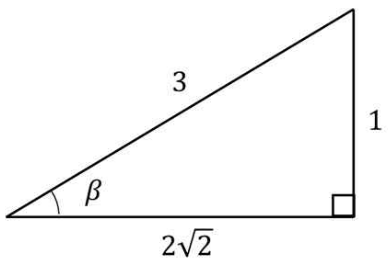
논 술 예 시 답 안

오전-2번

1. $t=\sin x$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0, x=\beta$ 일 때 $t=\sin\beta$ 이므로

$\dfrac{a_n}{n+1}=\displaystyle\int_0^{\beta}(\sin x)^n\cos x dx=\int_0^{\sin\beta}t^n dt=\dfrac{(\sin\beta)^{n+1}}{n+1}$ 이기에 $a_n=(\sin\beta)^{n+1}$ 을 얻는다. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $(\sin\beta)^2$ 이고 공비가 $\sin\beta$ 인 등비수열이다. 주어진 $0<\beta<\pi/2$ 에서 $0<\sin\beta<1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{(\sin\beta)^2}{1-\sin\beta}$ 이다.

$\dfrac{(\sin\beta)^2}{1-\sin\beta}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow 6(\sin\beta)^2=1-\sin\beta$, $y=\sin\beta$ 라고 할 때, $6y^2+y-1=(3y-1)(2y+1)=0$ 이 성립하는 $y=\dfrac{1}{3}$, 즉, $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$.



그러므로 $\tan\beta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

답 : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2. 모집단의 확률변수 X 가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$ 을 따르므로 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 는 $\mathrm{N}\left(m,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다. 정규분포의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다. 조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\geq 8)+\mathrm{P}(\overline{X}\geq 8)=1$ 이므로 $m=8$ 이다.

두 확률변수 $Z_1=\dfrac{X-8}{\sigma}$, $Z_2=\dfrac{\overline{X}-8}{\sigma/\sqrt{n}}$ 은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$ 을 따르고 확률밀도함수 $f(z)$ 의 그래프는 직선 $z=0$ 에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다. 조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\geq 12)+\mathrm{P}(\overline{X}\geq 7.5)=1$ 이므로 $\mathrm{P}\left(Z_1\geq\dfrac{12-8}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\geq\dfrac{7.5-8}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1$ 이다. 즉, $\dfrac{4}{\sigma}=\dfrac{0.5\sqrt{n}}{\sigma}$ 이므로 $n=64$ 이다.

m 에 대한 신뢰도 $95.44\,\%$ 의 신뢰구간은 $\overline{x}-2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}\leq m\leq\overline{x}+2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$ 이고 조건 (다)에서 $\overline{x}-1\leq m\leq\overline{x}+1$ 이므로 $2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}=1$ 이다. 즉, $\sigma=4$ 이다. 따라서 $m+\sigma+n=8+4+64=76$ 이다.

답 : 76

3. 이항정리를 이용하여 $\{p+(1-p)\}^{2023}$ 와 $\{p+(p-1)\}^{2023}$ 을 각각 전개하면 다음과 같다.

$$\{p+(1-p)\}^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}$$

$$\{p+(p-1)\}^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(p-1)^{2023-k}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}(-1)^{2023-k}$$

여기서 $(-1)^{2023-k}$ 의 값은 k 가 홀수이면 1, k 가 짝수이면 -1 을 가진다.

이때 $\{p+(1-p)\}^{2023}-\{p+(p-1)\}^{2023}$ 을 계산하면

$$\begin{aligned}1-(2p-1)^{2023}&=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}-\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}(-1)^{2023-k}\\&=2\sum_{j=0}^{1011}{}_{2023}\mathrm{C}_{2j}p^{2j}(1-p)^{2023-2j}\end{aligned}$$

이 된다. 즉, $1-(2p-1)^{2023}=2\displaystyle\sum_{j=0}^{1011}{}_{2023}\mathrm{C}_{2j}p^{2j}(1-p)^{2023-2j}$ 는 윷짝 한 개를 2023 번을 던졌을 때 평평한 면이 나온 횟수가 짝수일 확률의 2 배와 같다. 따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{(2p-1)^{2023}}{2}$ 또는 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(1-2p)^{2023}}{2}$ 이다.

답 : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{(2p-1)^{2023}}{2}$ 또는 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(1-2p)^{2023}}{2}$