2023학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	포물선, 쌍곡선, 초점
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않은 한 직선 k가 주어질 때, 점 F에 이르는 거리와 직선 k에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다. 이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 k를 포물선의 **준선**이라고 한다. 또, 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 축과 포물선의 교점을 포물선의 **꼭지점**이라고 한다.

-『고등학교 기하』

【나】 위성 방송 안테나는 포물선의 축에 평행하게 들어오는 전파가 포물선의 초점에 모이는 성질을 이용하여 약한 전파를 증폭하여 수신할 수 있게 한다. 또한, 자동차의 전조등이나 무대의 조명등은 포물선의 이런 성질을 거꾸로 적용한 것이다.

이제 포물선이 갖는 이와 같은 성질을 다음과 같이 증명해 보자.

(중략)

전파가 곡선 위의 한 점에서 반사된다는 것은, 그 점을 지나는 곡선의 접선에 대하여 입사각과 반사각의 크기가 같게 된다는 뜻이다. 따라서 포물선의 축에 평행하게 들어온 전파는 포물선에 반사되어 초점에 모이게 됨을 알 수 있다.

-『고등학교 기하』

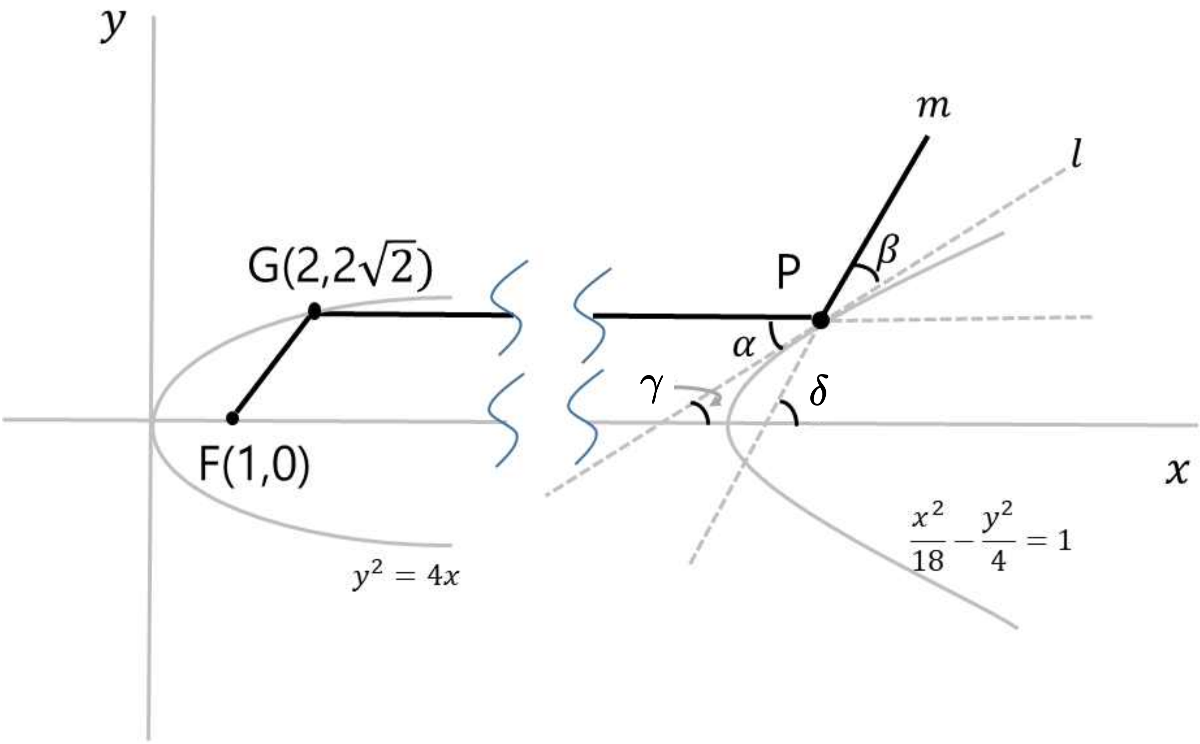
【다】 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

이다.

-『고등학교 기하』

[문제1] 그림과 같이 단면이 포물선 모양인 거울 $y^2=4x\ (0 \le x \le 4)$의 초점 F$(1, 0)$에서 쏜 빛이 포물선 위의 점 G$(2, 2\sqrt{2})$에 반사되어 직진한다. 또한, 이 빛은 단면이 쌍곡선 모양인 거울 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1\ \ (3\sqrt{2} \le x \le 9)$ 위의 점 P에 반사되어 직진한다. 이때, 직선 l은 단면이 쌍곡선 모양인 거울 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P에서의 접선이고, 빛이 점 P에서 반사되기 전과 후 직선 l과 이루는 각의 크기 α와 β는 같다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 직선 l의 x절편을 구하시오.

(2) 직선 l과 x축이 이루는 예각 γ의 크기를 구하시오.

(3) 반사된 후 빛이 지나가는 반직선의 연장선 m이 x축과 이루는 예각 δ의 크기를 구하시오.

3. 출제의도

포물선의 초점과 관련된 성질과 쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하여 관련된 점과 각을 구하는 문제를 출제하였다.

4. 출제근거

[문제 1]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	<기하> – (1) 이차곡선 ① 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	홍성복 외 10인	㈜ 지학사	2020	p12
	고등학교 기하	황선욱 외 8인	㈜ 미래엔	2020	p20
	고등학교 기하	김원경 외 14인	㈜ 비상교육	2020	p41

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	<기하> – (1) 이차곡선 ① 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	홍성복 외 10인	㈜ 지학사	2020	p12

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	<기하> – (1) 이차곡선 ① 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	황선욱 외 8인	㈜ 미래엔	2020	p20

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	<기하> - (1) 이차곡선 ① 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	김원경 외 14인	㈜비상교육	2020	p41

5. 문항해설

제시문 [가] 포물선의 정의와 초점의 개념을 설명하였다.
제시문 [나] 포물선이 초점에서 출발한 빛이 포물선을 만나서 축과 평행으로 진행하였음을 설명하였다.
제시문 [다] 주어진 점에서 쌍곡선의 접선의 방정식을 제시하였다.

6. 평가기준

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보이고, 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지를 모두 보이고, 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	B
	[1단계]부터 [3단계]까지의 과정을 기술한 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]까지의 과정을 기술한 경우	D
하	위 단계 중 한 단계만 기술한 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

채점 기준
[1단계] 점 G$(2,2\sqrt{2})$에 부딪쳐 진행하는 빛이 x축과 평행함을 인지하고 쌍곡선과 만나는 점 P$(3\sqrt{6},2\sqrt{2})$를 구하였다. 포물선의 초점 F$(1,0)$에서 점 G$(2,2\sqrt{2})$에 부딪쳐 진행하는 빛은 제시문 【나】에 의해 x축과 평행하게 진행한다. 따라서, 이 빛이 쌍곡선과 만나는 점 P는 $(3\sqrt{6},2\sqrt{2})$이다. **[2단계] 쌍곡선 위의 점 P를 지나는 접선 l의 직선의 방정식을 구하고, 이 직선의 x절편 $\sqrt{6}$을 구하였다.** 이 점에서 쌍곡선의 접선 l은 제시문 【다】에 의해 $$\frac{3\sqrt{6}x}{18}-\frac{2\sqrt{2}y}{4}=1$$ 이고, l의 x절편은 $\sqrt{6}$이다. **[3단계] 접선 l이 x축과 이루는 예각 $\gamma=\frac{\pi}{6}$를 구하였다.** 접선의 방정식은 $$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{2}$$ 이고, $\tan\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\gamma=\frac{\pi}{6}$이다. **[4단계] 점 P에 부딪힌 후의 직선 m이 x축과 이루는 예각 $\delta=\frac{\pi}{3}$를 구할 수 있다.** 점 P에 반사되기 전 빛의 직진방향은 x축과 평행하고, 이 빛의 방향과 접선 l이 이루는 각 α는 접선 l이 x축과 이루는 각 γ와 엇각 $\frac{\pi}{6}$로 같다. 또한, 각 α는 각 β와 같으므로 이 각 β는 $\frac{\pi}{6}$이다. 그런데, 반사되기 전 빛과 x축이 평행하므로 직선 m과 이루는 각 δ는 각 $\beta+\gamma$와 동위각으로 같다. 따라서, 점 P에 반사된 빛의 직진방향이 x축과 이루는 각 δ는 $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이다.

7. 예시답안

(1) 포물선의 초점 F$(1,0)$에서 점 G$(2,2\sqrt{2})$에 부딪쳐 진행하는 빛은 제시문 【나】에 의해 x축과 평행하게 진행한다. 따라서, 이 빛이 쌍곡선과 만나는 점 P는 $(3\sqrt{6},2\sqrt{2})$이다.
이 점에서 쌍곡선의 접선 l은 제시문 【다】에 의해

$$\frac{3\sqrt{6}x}{18}-\frac{2\sqrt{2}y}{4}=1$$

이고, l의 x절편은 $\sqrt{6}$이다.

(2) 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{2}$$

이고, $\tan\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\gamma=\frac{\pi}{6}$이다.

(3) 점 P에 반사되기 전 빛의 직진방향은 x축과 평행하고, 이 빛의 방향과 접선 l이 이루는 각 α는 접선 l이 x축과 이루는 각 γ와 엇각 $\frac{\pi}{6}$로 같다. 또한, 각 α는 각 β와 같으므로 이 각 β는 $\frac{\pi}{6}$이다. 그런데, 반사되기 전 빛과 x축이 평행하므로 직선 m과 이루는 각 δ는 각 $\beta+\gamma$와 동위각으로 같다. 따라서, 점 P에 반사된 빛의 직진방향이 x축과 이루는 각 δ는 $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이다.

2023학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 미적분
	핵심개념 및 용어	이산확률변수의 기댓값 및 분산, 정적분과 급수의 합 사이의 관계, 부분적분법
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,2,3,\ \cdots,n)$일 때, X의 기댓값(평균)과 분산은 다음과 같이 정의된다.

① **기댓값(평균)** $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ \cdots\ +x_np_n$

② **분산** $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\ \cdots\ +(x_n-m)^2p_n$

(단, $m=\mathrm{E}(X)$)

위 분산은 다음과 같은 방법으로도 간단하게 구할 수 있다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=(x_1^2p_1+x_2^2p_2+\ \cdots\ +x_n^2p_n)-m^2$$

-『고등학교 확률과 통계』

【나】 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\ \ (\text{단, }\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x)$$

-『고등학교 미적분』

【다】 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}a_n=L$, $\lim_{n\to\infty}b_n=M$ (L, M은 실수)일 때

① $\lim_{n\to\infty}ca_n=cL$, (단, c는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L+M$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=L-M$

④ $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=LM$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{L}{M}$ (단, $b_n\neq 0$, $M\neq 0$)

-『고등학교 미적분』

[문제2] 이산확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X)$가 다음과 같이 정의되었다고 가정할 때, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X)$와 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(X)$를 구하시오.

① $\mathrm{P}(X=x_i)=\dfrac{g(x_i)}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)}\ \ (i=1,2,3,\ \cdots,n)$

② $g(x)=e^{-ax}$ (단, $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$이다. a는 상수이고, $a>0$이다.)

③ $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_i=i\Delta x\ \ (i=1,2,3,\ \cdots,n)$

3. 출제의도

이산확률변수의 기댓값과 분산의 극한을 정적분과 급수의 합 사이의 관계 및 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 구할 수 있다.

4. 출제근거

[문제 2]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	확률과 통계 (3) 통계 1 확률분포 미적분 (3) 적분법 2 정적분의 활용 미적분 (1) 수열의 극한 1 수열의 극한
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	배종숙	금성출판사	2019	100,101
	확률과 통계	홍성복	지학사	2019	87,88
	미적분	이준열	천재교육	2019	165
	미적분	홍성복	지학사	2019	163
	미적분	이준열	천재교육	2019	17
	미적분	홍성복	지학사	2019	17

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	확률과 통계 (3) 통계 1 확률분포
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	배종숙	금성출판사	2019	100,101
	확률과 통계	홍성복	지학사	2019	87,88

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (3) 적분법 2 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열	천재교육	2019	165
	미적분	홍성복	지학사	2019	163

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (1) 수열의 극한 1 수열의 극한
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열	천재교육	2019	17
	미적분	홍성복	지학사	2019	17

5. 문항해설

[문항 2] 이산확률변수의 기댓값과 분산의 극한을 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 구하는 문제이다.
제시문 [가] 이산확률변수의 기댓값과 분산 정의에 대해 설명하였다.
제시문 [나] 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 대해 설명하였다.
제시문 [다] 두 수열이 수렴할 때 수열의 극한에 대한 기본 성질에 대해 설명하였다.

6. 평가기준

출제 의도에 가장 잘 들어맞는 답안의 풀이 순서는 다음과 같다.

[1단계] 이산확률변수 X 의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$을 정의에 맞게 표현하고, 정적분과 급수의 합 사이의 관계 및 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 기댓값의 극한을 정적분으로 나타내었다.

[2단계] 정적분으로 표현된 기댓값 $\mathrm{E}(X)$의 극한을 부분적분법을 활용하여 구하였다.

[3단계] 이산확률변수의 분산 $\mathrm{V}(X)$을 정의에 맞게 표현하고($\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$), 정적분과 급수의 합 사이의 관계 및 수열의 극한에 대한 기본 성질을 활용하여 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)$을 정적분으로 나타내었다.

[4단계] 정적분으로 표현된 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)$을 부분적분법을 활용하여 그 값을 구하였다.

[5단계] $\lim_{n\to\infty}\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 정확히 나타내었다.

[6단계] 분산의 극한 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(X)$의 정확한 값을 구하였다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [6단계]까지를 모두 보인 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지를 모두 보인 경우	A
중	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보인 경우	B
	[1단계]부터 [3단계]까지를 모두 보인 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]까지를 모두 보인 경우	D
하	[1단계]만 보인 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

[1단계]

제시문 [가]에 의해 $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{g(x_i)}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_ig(x_i)}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)}$

제시문 [나]를 활용하면 연속인 함수 $h(x)=xg(x)$와 $g(x)$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}h(x_i)\Delta x=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 xe^{-ax}dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}g(x_j)\Delta x=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 e^{-ax}dx$$

즉, 두 급수는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수의 정적분으로 표현될 수 있고, 이는 함수 $h(x)\geq 0$ (또는 $g(x)>0$), x축, 직선 $x=0$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 넓이이므로 두 급수 모두 0보다 큰 값으로 수렴한다.
따라서, $\mathrm{E}(X)$의 극한은 제시문 [다]에 의해 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}h(x_i)\Delta x}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)\Delta x}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}h(x_i)\Delta x}{\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}g(x_j)\Delta x}=\frac{\int_0^1 h(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx}=\frac{a\int_0^1 xe^{-ax}dx}{a\int_0^1 e^{-ax}dx}=\frac{\int_0^1 axe^{-ax}dx}{1-e^{-a}}$$

[2단계]

위 정적분은 다음과 같이 부분적분법을 활용하여 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{1-e^{-a}}\int_0^1 axe^{-ax}dx=\frac{1}{1-e^{-a}}\left\{\left[-xe^{-ax}\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-ax})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-a}}\left\{-e^{-a}-\frac{1}{a}\left(e^{-a}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}$$

[3단계]

제시문 【가】에 의해 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이다.

먼저 $\mathrm{E}(X^2)$은 다음과 같이 표현한다.

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{g(x_i)}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2g(x_i)}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)}$$

위 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정과 유사하게 $f(x)=x^2g(x)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2e^{-ax}dx$$

이고 이 급수는 0보다 큰 값으로 수렴한다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)$는 다음과 같이 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x}{\sum_{j=1}^{n}g(x_j)\Delta x}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x}{\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}g(x_j)\Delta x}=\frac{\int_0^1 ax^2e^{-ax}dx}{1-e^{-a}}$$

[4단계]

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)$는 부분적분법을 활용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{1-e^{-a}}\int_0^1 ax^2e^{-ax}dx=\frac{1}{1-e^{-a}}\left\{\left[-x^2e^{-ax}\right]_0^1-\int_0^1(-2xe^{-ax})dx\right\}$$

$$=-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}+\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{a}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}\right\}$$

[5단계]

앞에서 구한 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X)$를 이용하고 제시문 [다]를 적용하면

$$\lim_{n\to\infty}\{\mathrm{E}(X)\}^2=\left\{\frac{1}{a}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}\right\}^2$$

[6단계]

따라서, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(X)$는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(X)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2)-\lim_{n\to\infty}\{\mathrm{E}(X)\}^2=-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}+\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{a}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}\right\}-\left\{\frac{1}{a}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}\left\{1+\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}\right\}=\frac{1}{a^2}-\frac{e^{-a}}{(1-e^{-a})^2}$$

2023학년도 동국대학교 수시모집

논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	속도, 가속도, 거리, 넓이, 부피
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$와 같이 나타낸다.

-『고등학교 미적분』

【나】 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 정적분

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

는 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

-『고등학교 수학II』

【다】 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x = x(t)$, $y = y(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(x'(t), y'(t))$이고 가속도는 $(x''(t), y''(t))$이다.

-『고등학교 미적분』

【라】 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

이다. 단, $S(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수이다.

-『고등학교 미적분』

[문제3] 시각 $t=0$일 때 좌표평면 상의 원점 O에서 (a, b)의 속도로 쏘아올린 물체 M은 다음과 같은 규칙에 따라 움직인다. (단, a와 b는 상수이고, $a>0$, $b>0$이다.)

- **M은 크기를 무시할 수 있을 만큼 아주 작으며, 시각 t에서 M의 위치가 함수 $x=x(t)$, $y=y(t)$로 나타내어질 때 항상 $x(t) \ge 0$, $y(t) \ge 0$이다.**
- **$y(t)>0$인 시각 $t>0$에서는 항상 M의 가속도는 $(0, -g)$이다. (단, g는 상수이고, $g>0$이다.)**
- **M이 x축에 충돌하는 시각을 순서대로 $t=t_1, t_2, \cdots$ $(0<t_1<t_2<\cdots)$라 할 때, 각각의 충돌 시각 $t=t_n$에 대해 충돌 전후 M의 속도의 x성분은 변화가 없고, 충돌 직후 M의 속도의 y성분은 충돌 직전 M의 속도의 y성분의 $-\frac{1}{2}$배이다.**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$의 값을 구하시오.

(2) M이 그리는 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(3) 위 (2)번에서 기술한 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피를 구하시오.

3. 출제의도

본 문항은 좌표평면에서 움직이는 물체의 가속도를 알면, 물체의 속도와 위치를 구할 수 있는지 평가한다. 이를 이용하여 물체가 움직일 때 나타나는 곡선의 방정식을 구할 수 있고, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있으며, 각각의 도형의 넓이를 항으로 갖는 수열이 등비수열임을 알아냄으로써 구하고자 하는 넓이가 등비급수가 되어 이를 계산할 수 있는지 평가한다. 유사하게, 이 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체도형의 부피도 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제근거

[문제3]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (1) 수열의 극한 ② 급수 수학 II (3) 다항함수의 적분법 ② 정적분의 활용 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	황선욱	미래엔	2020	136
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	134
	미적분	황선욱	미래엔	2020	30, 123, 169
	미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	27, 113, 158

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (1) 수열의 극한 ② 급수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	황선욱	미래엔	2020	30
	미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	27

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (3) 다항함수의 적분법 ② 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	황선욱	미래엔	2020	136
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	134

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	황선욱	미래엔	2020	123
	미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	113

제시문 [라]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	황선욱	미래엔	2020	169
	미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	158

5. 문항해설

좌표평면에서 움직이는 물체의 가속도를 알면, 물체의 속도와 위치를 구할 수 있다. 이를 이용하여 물체가 움직일 때 나타나는 곡선의 방정식을 구할 수 있고, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있으며, 각각의 도형의 넓이를 항으로 갖는 수열이 등비수열임을 알아냄으로써 구하고자 하는 넓이가 등비급수가 되어 이를 계산할 수 있다. 유사하게, 이 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체도형의 부피도 계산할 수 있다.

6. 평가기준

[1단계] $0 \le t \le t_1$일 때 물체 M의 속도 $(x'(t), y'(t))$는 $x'(t)=a,\ y'(t)=b-gt$가 되고 이를 다시 적분하면 M의 위치 $(x(t), y(t))$는 $x(t)=at,\ y(t)=bt-\frac{1}{2}gt^2$가 된다.

[2단계] 위 식에서 $y(t)=0$을 계산하면 $t_1=\frac{2b}{g}$를 얻는다. $t_2-t_1=\frac{b}{g},\ t_3-t_2=\frac{b}{2g},\ t_4-t_3=\frac{b}{2^2g},\ \cdots$, 즉 첫째항이 $\frac{2b}{g}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이 되므로

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{2b}{g}+\frac{b}{g}+\frac{b}{2g}+\cdots = \frac{2b}{g}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4b}{g}$$

이다.

[3단계] 각각의 도형의 넓이를 항으로 갖는 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{2ab^3}{3g^2}$이고 공비가 $\frac{1}{8}$인 등비수열을 이루므로 구하고자 하는 도형의 넓이는

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{2ab^3}{3g^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{16ab^3}{21g^2}$$

이다.

[4단계] 각각의 입체도형의 부피를 항으로 갖는 수열 $\{V_n\}$은 첫째항이 $\frac{4ab^5}{15g^3}$이고 공비가 $\frac{1}{32}$인 등비수열을 이루므로 구하고자 하는 입체도형의 부피는

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{4ab^5}{15g^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{32}} = \frac{128ab^5}{465g^3}$$

이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]와 [2단계]를 논증이 매끄럽게 작성하고 [3단계] 또는 [4단계] 중에서 한 단계만 논증이 매끄럽게 작성한 경우	A
중	[1단계]와 [2단계]를 논증이 매끄럽게 작성하고 [3단계] 또는 [4단계] 중에서 한 단계의 일부만 논증이 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]와 [2단계]를 논증이 매끄럽게 작성하고 [3단계]와 [4단계]를 작성하지 않았거나 작성하였어도 모두 논증이 매끄럽지 않은 경우	C
	[1단계]만 논증이 매끄럽게 작성하고 [2단계]부터 [4단계]를 작성하지 않았거나 작성하였어도 모두 논증이 매끄럽지 않은 경우	D
하	[1단계]부터 [4단계] 중에서 어느 한 단계의 일부만 논증이 매끄럽게 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) 시각 $t=0$일 때 원점 O에서 물체 M의 속도의 x성분은 a이고 $y(t)>0$인 시각 $t>0$에서 $x''(t)=0$이므로 이를 적분하면 $0\le t\le t_1$일 때 $x'(t)=a$이다. 충돌 시각 $t=t_1$에 대해 충돌 전후 M의 속도의 x성분은 변화가 없다는 조건에 의해 $t_1\le t\le t_2$일 때에도 $x'(t)=a$이므로 이를 반복적으로 적용하면 모든 시각 $t\ge 0$에 대해 $x'(t)=a$, 즉 $x(t)=at$가 된다.

시각 $t=0$일 때 원점 O에서 M의 속도의 y성분은 b이고 $y(t)>0$인 시각 $t>0$에서 $y''(t)=-g$이므로 이를 적분하면 $0\le t\le t_1$일 때 $y'(t)=b-gt$가 되고 이를 다시 적분하면 $y(t)=bt-\frac{1}{2}gt^2$을 얻는다. 여기서 $y(t_1)=0$을 계산하면 $t_1=\frac{2b}{g}$를 얻고, 시각 $t=t_1$일 때 x축에 충돌 직전의 속도는 $\lim_{t\to t_1-}y'(t)=-b$가 된다.

이와 유사한 방법으로 계산하면 $t_2-t_1=\frac{b}{g}$, $t_3-t_2=\frac{b}{2g}$, $\cdots$을 얻게 되어 귀납적 추론에 의해 $t_1=\frac{2b}{g}$, $t_2-t_1=\frac{b}{g}$, $t_3-t_2=\frac{b}{2g}$, $\cdots$, 즉 첫째항이 $\frac{2b}{g}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\frac{2b}{g}+\frac{b}{g}+\frac{b}{2g}+\cdots=\frac{2b}{g}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4b}{g}$$

이다.

(2) 위 (1)번 계산으로부터 $0\le t\le t_1$일 때 $x=x(t)=at$, $y=y(t)=bt-\frac{1}{2}gt^2$이다. 이제 $y=bt-\frac{1}{2}gt^2$에 $t=\frac{x}{a}$를 대입하면 $0\le t\le t_1$인 동안에 M이 그리는 곡선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x-\frac{g}{2a^2}x^2 \qquad \left(0\le x\le\frac{2ab}{g}\right)$$

가 되고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 A_1은

$$A_1=\int_0^{\frac{2ab}{g}}\left(\frac{b}{a}x-\frac{g}{2a^2}x^2\right)dx=\left[\frac{b}{2a}x^2-\frac{g}{6a^2}x^3\right]_0^{\frac{2ab}{g}}=\frac{2ab^3}{3g^2}$$

이 된다.

이와 유사한 방법으로 계산하면 $t_1\le t\le t_2$인 동안 M이 그리는 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 A_2는 $A_2=\frac{1}{8}\cdot\frac{2ab^3}{3g^2}$이 되고, $t_2\le t\le t_3$인 동안 M이 그리는 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 A_3는 $A_3=\frac{1}{8^2}\cdot\frac{2ab^3}{3g^2}$, $\cdots$을 얻게 된다. 이 과정을 반복하면 귀납적 추론에 의해 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{2ab^3}{3g^2}$이고 공

비가 $\frac{1}{8}$인 등비수열을 이룬다는 것을 알 수 있고 따라서 구하고자 하는 도형의 넓이는

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{2ab^3}{3g^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2ab^3}{3g^2} + \frac{1}{8^2} \cdot \frac{2ab^3}{3g^2} + \cdots = \frac{2ab^3}{3g^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{16ab^3}{21g^2}$$

이 된다.

(3) 위 (2)번의 풀이에서 $0 \le t \le t_1$인 동안 M이 그리는 곡선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x - \frac{g}{2a^2}x^2 \ \left(0 \le x \le \frac{2ab}{g}\right)$가 됨을 구하였다. 이제 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피 V_1은

$$V_1 = \int_0^{\frac{2ab}{g}} \left(\frac{b}{a}x - \frac{g}{2a^2}x^2\right)^2 dx = \left[\frac{g^2}{20a^4}x^5 - \frac{bg}{4a^3}x^4 + \frac{b^2}{3a^2}x^3\right]_0^{\frac{2ab}{g}} = \frac{4ab^5}{15g^3}$$

이 된다.

이와 유사한 방법으로 계산하면 $t_1 \le t \le t_2$인 동안 M이 그리는 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피 V_2는 $V_2 = \frac{1}{32} \cdot \frac{4ab^5}{15g^3}$이 되고, $t_2 \le t \le t_3$인 동안 M이 그리는 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피 V_3는 $V_3 = \frac{1}{32^2} \cdot \frac{4ab^5}{15g^3}$, $\cdots$을 얻게 된다. 이 과정을 반복하면 귀납적 추론에 의해 수열 $\{V_n\}$은 첫째항이 $\frac{4ab^5}{15g^3}$이고 공비가 $\frac{1}{32}$인 등비수열을 이룬다는 것을 알 수 있고 따라서 구하고자 하는 입체도형의 부피는

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{4ab^5}{15g^3} + \frac{1}{32} \cdot \frac{4ab^5}{15g^3} + \frac{1}{32^2} \cdot \frac{4ab^5}{15g^3} + \cdots = \frac{4ab^5}{15g^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{32}} = \frac{128ab^5}{465g^3}$$

이 된다.

「채점시 평가제외 사항」

위 풀이에 나타난 여러 가지 수열들이 등비수열임을 일반적인 상황 하에서 다음처럼 보일 수도 있다.

(1) 시각 $t=0$일 때 원점 O에서 물체 M의 속도의 x성분은 a이고 $y(t)>0$인 시각 $t>0$에서 $x''(t)=0$이므로 이를 적분하면 $0 \le t \le t_1$일 때 $x'(t)=a$이다. 충돌 시각 $t=t_1$에 대해 충돌 전후 M의 속도의 x성분은 변화가 없다는 조건에 의해 $t_1 \le t \le t_2$일 때에도 $x'(t)=a$이므로 이를 반복적으로 적용하면 모든 시각 $t \ge 0$에 대해 $x'(t)=a$, 즉 $x(t)=at$가 된다.

편의상 $t_0=0$이라 하고 자연수 n에 대해 $t_{n-1} \le t \le t_n$인 일반적인 상황에서 다루기 위해 $b_n=\lim_{t \to t_{n-1}+} y'(t)$이라 하자. 그러면 시각 $t=0$일 때 원점 O에서 M의 속도의 y성분은 b이므로 $b_1=b$이다. $y(t)>0$인 시각 $t>0$에서 $y''(t)=-g$이므로 이를 적분하면

$$y'(t)=b_n-g(t-t_{n-1}) \qquad (t_{n-1} \le t \le t_n)$$

이고 이를 다시 적분하면

$$y(t)=b_n(t-t_{n-1})-\frac{1}{2}g(t-t_{n-1})^2 \qquad (t_{n-1} \le t \le t_n)$$

이다. 여기서 $y(t_n)=0$을 계산하면 $t_n-t_{n-1}=\dfrac{2b_n}{g}$을 얻는다.

$t_n \le t \le t_{n+1}$인 동안 시각 $t=t_n$일 때 x축에 충돌 직후 M의 속도의 y성분 $\lim_{t \to t_n+} y'(t)=b_{n+1}$은 $t_{n-1} \le t \le t_n$인 동안 시각 $t=t_n$일 때 x축에 충돌 직전 속도의 y성분 $\lim_{t \to t_n-} y'(t)=b_n-g(t_n-t_{n-1})=-b_n$의 $-\dfrac{1}{2}$배이므로 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{2}$을 얻는다. 이는 등비수열이므로 모든 자연수 n에 대해 일반항은 $b_n=\dfrac{b}{2^{n-1}}$이다. 따라서 $t_n-t_{n-1}=\dfrac{2b_n}{g}=\dfrac{b}{2^{n-2}g}$, 즉 첫째항이 $\dfrac{2b}{g}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \frac{2b}{g}+\frac{b}{g}+\frac{b}{2g}+\cdots = \frac{2b}{g} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4b}{g}$$

이다.

(2) 편의상 $x_n=x(t_n)=at_n$이라 두자. 위 (1)번 계산으로부터

$$x=x(t)=at, \quad y=y(t)=b_n(t-t_{n-1})-\frac{1}{2}g(t-t_{n-1})^2 \qquad (t_{n-1} \le t \le t_n)$$

이므로 $x-x_{n-1}=at-at_{n-1}$, 즉 $t-t_{n-1}=\dfrac{x-x_{n-1}}{a}$을 $y=y(t)=b_n(t-t_{n-1})-\dfrac{1}{2}g(t-t_{n-1})^2$에 대입하면 $t_{n-1} \le t \le t_n$인 동안에 M이 그리는 곡선의 방정식은

$$y = \frac{b_n}{a}(x - x_{n-1}) - \frac{g}{2a^2}(x - x_{n-1})^2 \qquad (x_{n-1} \le x \le x_n)$$

이 된다. 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n은

$$A_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{b_n}{a}(x - x_{n-1}) - \frac{g}{2a^2}(x - x_{n-1})^2 \right) dx = \int_0^{x_n - x_{n-1}} \left(\frac{b_n}{a}u - \frac{g}{2a^2}u^2 \right) du$$

$$= \left[\frac{b_n}{2a}u^2 - \frac{g}{6a^2}u^3 \right]_0^{x_n - x_{n-1}} = \frac{b_n}{2a}(x_n - x_{n-1})^2 - \frac{g}{6a^2}(x_n - x_{n-1})^3 = \frac{2ab_n^3}{3g^2}$$

이다. 여기서 $x_n - x_{n-1} = at_n - at_{n-1} = \frac{2ab_n}{g}$을 사용하였다. 따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{2ab^3}{3g^2}$이고 공비가 $\frac{1}{8}$인 등비수열을 이루므로 구하고자 하는 도형의 넓이는

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{2ab^3}{3g^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2ab^3}{3g^2} + \frac{1}{8^2} \cdot \frac{2ab^3}{3g^2} + \cdots = \frac{2ab^3}{3g^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{16ab^3}{21g^2}$$

이 된다.

(3) 위 (2)번의 풀이에서 $t_{n-1} \le t \le t_n$인 동안에 M이 그리는 곡선의 방정식은

$$y = \frac{b_n}{a}(x - x_{n-1}) - \frac{g}{2a^2}(x - x_{n-1})^2 \qquad (x_{n-1} \le x \le x_n)$$

이 됨을 구하였다. 이제 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피 V_n은

$$V_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{b_n}{a}(x - x_{n-1}) - \frac{g}{2a^2}(x - x_{n-1})^2 \right)^2 dx = \int_0^{x_n - x_{n-1}} \left(\frac{b_n}{a}u - \frac{g}{2a^2}u^2 \right)^2 du$$

$$= \left[\frac{g^2}{20a^4}u^5 - \frac{bg}{4a^3}u^4 + \frac{b^2}{3a^2}u^3 \right]_0^{x_n - x_{n-1}} = \frac{4ab_n^5}{15g^3}$$

이 된다. 따라서 수열 $\{V_n\}$은 첫째항이 $\frac{4ab^5}{15g^3}$이고 공비가 $\frac{1}{32}$인 등비수열이므로 구하고자 하는 입체도형의 부피는

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{4ab^5}{15g^3} + \frac{1}{32} \cdot \frac{4ab^5}{15g^3} + \frac{1}{32^2} \cdot \frac{4ab^5}{15g^3} + \cdots = \frac{4ab^5}{15g^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{32}} = \frac{128ab^5}{465g^3}$$

이 된다.