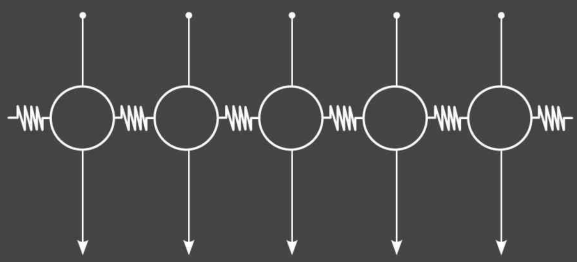
11강

장과 고전 역학



연습 문제 11.1:

T^{0n}이 포인팅 벡터임을 보여라.

※포인팅 벡터: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$

해답:

※식 11.42: $T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\ \sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$

식 11.42를 이용해 성분별로 계산해 보자. 이때 계측 텐서 η는 $\eta^{00} = -1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$ 외에는 0이므로 식 11.42의 우변에서 첫째 항만 고려하면 된다.

T^{01}를 먼저 계산해 보면 다음과 같다.

$$T^{01} = F^{0\sigma} F^{1}_{\ \sigma} - \frac{1}{4} \eta^{01} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{0\sigma} F^{1}_{\ \sigma}$$

$$= F^{00} F^{1}_{\ 0} + F^{01} F^{1}_{\ 1} + F^{02} F^{1}_{\ 2} + F^{03} F^{1}_{\ 3}$$

$$= E_y B_z - E_z B_y.$$

이는 포인팅 벡터 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$의 x 성분과 같다.

동일한 방식으로 T^{02}와 T^{03}도 계산한다.

$$T^{02} = F^{0\sigma} F^{2}{}_{\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{02} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{0\sigma} F^{2}{}_{\sigma}$$

$$= F^{00} F^{2}{}_{0} + F^{01} F^{2}{}_{1} + F^{02} F^{2}{}_{2} + F^{03} F^{2}{}_{3}$$

$$= E_z B_x - E_x B_z$$

$$= (E \times B)_y$$

$$T^{03} = F^{0\sigma} F^{3}{}_{\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{03} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{0\sigma} F^{3}{}_{\sigma}$$

$$= F^{00} F^{3}{}_{0} + F^{01} F^{3}{}_{1} + F^{02} F^{3}{}_{2} + F^{03} F^{3}{}_{3}$$

$$= E_x B_y - E_y B_x$$

$$= (E \times B)_z .$$

T^{0n}이 $(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B})_n$ 성분과 일치하므로, T^{0n}는 포인팅 벡터이다.

$$\therefore T^{0n} = (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B})_n .$$

연습 문제 11.2:

장 성분 (E_x, E_y, E_z)와 (B_x, B_y, B_z)를 써서 T^{11}과 T^{12}를 계산하라.

해답:

10.2.4절에서, 다음의 결과를 얻었다.

$$F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau} = 2(-E^2 + B^2).$$

이를 이용해 연습 문제 11.1과 동일하게 성분별로 계산하면 다음과 같다. 이때 계측 텐서 η는 $\eta^{11} = +1$을 대입한다.

$$T^{11} = F^{1\sigma}F^{1}{}_{\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{11}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{1\sigma}F^{1}{}_{\sigma} + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$= F^{10}F^{1}{}_{0} + F^{11}F^{1}{}_{1} + F^{12}F^{1}{}_{2} + F^{13}F^{1}{}_{3} + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$= -E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$= \frac{1}{2}(-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{2}(-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2).$$

T^{12}의 경우, $\eta^{12} = 0$ 을 대입한다.

$$T^{12} = F^{1\sigma} F^{2}{}_{\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{12} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{1\sigma} F^{2}{}_{\sigma}$$

$$= F^{10} F^{2}{}_{0} + F^{11} F^{2}{}_{1} + F^{12} F^{2}{}_{2} + F^{13} F^{2}{}_{3}$$

$$= -E_x E_y - B_x B_y.$$