

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II	
	핵심개념 및 용어	정적분, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 절대부등식	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

정적분과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 상관관계를 이해하는지를 확인하고, 다항식의 정적분 계산 능력을 확인한다. 절대부등식을 사용하여 최댓값을 구하고, 등호가 성립할 조건을 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”		
	■ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
	(가)	성취기준 1	[12수학 II 03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(나)	성취기준 1	[10수학03-08]절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학II	이준열 외	천재교육	2020	134	(가)	
수학II	고성은 외	좋은책 신사고	2020	137	(가)	
수학	김원경 외	비상	2020	192	(나)	
수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	196	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(1-1) 제시문 (가)를 통해서 도형의 넓이를 이용하면 $S(t) + \int_0^t f(x)dx = tf(t)$ 의 관계식을 얻어낼 수 있다. 이를 통해 $S(t)$ 를 다항식으로 표현할 수 있다.

(1-2) (1-1)에서 구체적으로 얻은 $S(t)$ 를 이용하여 $\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{xf(x)}\right)$ 를 계산하여 양수임을 확인할 수 있다. 즉, $\frac{S(x)}{xf(x)}$ 가 증가함수임을 알 수 있다. 또한 $x \rightarrow 0$ 및 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $\frac{S(x)}{xf(x)}$ 의 극한값을 구하여 $\frac{S(x)}{xf(x)}$ 의 범위를 찾을 수 있다. 경계값에 관련해서는 $\frac{S(x)}{xf(x)} = 0, \frac{3}{4}$ 를 만족하는 x 가 존재하지 않음을 확인할 수 있다.

(1-3) (1-1)에서 얻은 등식을 $x > 0$ 일 때, 양변을 $xf(x)$ 로 나누면 $\frac{S(x)}{xf(x)} + \frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)} = 1$ 을 얻을 수 있다. 또한 제시문 (나)를 이용하면 $h(x) \leq (1/2)^2$ 임과 $2S(x) = xf(x)$ 일 때 등호가 성립함을 알 수 있다. 방정식 $2S(x) = xf(x)$ 는 대수방정식의 풀이로 해결된다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	$S(t) + \int_0^t f(x)dx = tf(t)$ 를 얻으면	3점
	$S(x)$ 를 구하면	3점
	극한을 구하면	2점
(1-2)	도함수를 구하여 증가함수임을 확인하면	5점
	두 극한을 구하여 범위를 찾으면	5점
(1-3)	넓이를 이용하여 $A(x) + B(x) = 1$ 을 구하면	3점
	제시문 (나)를 정확히 이용하여 최댓값을 구하면	3점
	제시문 (나)의 등호 조건을 이용하여 최댓값을 가질 조건(방정식)을 구하면	2점
	대수방정식을 정확히 유도하여 풀면	4점

7. 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)를 이용하면 $S(t) + \int_0^t f(x)dx$ 가 원점과 $(t, f(t))$ 를 대각선의 양 끝점으로 하는 직사각형의 넓이이므로 $S(t) + \int_0^t f(x)dx = tf(t)$ 가 됨을 알 수 있다. $f(x) = x^3 + x + 1$ 을 대입하면 $S(t) = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2$ 을 얻을 수 있다. 따라서 구하고자 하는 극한값은 $\frac{3}{4}$ 이 된다.

(1-2) (1-1)에서 얻은 $S(x)$ 를 이용하면 $x > 0$ 일 때, $\frac{d}{dx} \left(\frac{S(x)}{xf(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{(3/4)x^4 + (1/2)x^2}{x^4 + x^2 + x} \right) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 2}{4(x^3 + x + 1)^2} > 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 $x > 0$ 일 때, $\frac{S(x)}{xf(x)}$ 는 증가한다. 또한 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{xf(x)} = 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{xf(x)} = \frac{3}{4}$ 이므로 $0 < \frac{S(x)}{xf(x)} < \frac{3}{4}$ 이다.

(1-3) $A(x) = \frac{S(x)}{xf(x)}$ 라 하고 $B(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)}$ 라 하자. 그러면 (1-1)과 같이 제시문 (가)를 이용하면 $A(x) + B(x) = 1$ 임을 알 수 있다. 또한 (1-2)에서 $0 < A(x) < \frac{3}{4}$ 이다. 제시문 (나)를 이용하면 $h(x) = A(x)B(x) \leq \left(\frac{A(x) + B(x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$ 이 성립하고 등호는 $A(x) = \frac{1}{2}$ 일 때 성립한다. $A(x) = \frac{1}{2}$ 을 풀면 $x^4 - 2x = 0$ 이므로 $x > 0$ 을 만족하는 x 의 값은 $\sqrt[3]{2}$ 가 된다. 따라서 $a = \sqrt[3]{2}$ 이고 $h(a) = \frac{1}{4}$ 이다.

[별해] $h(x)$ 를 $A(x) + B(x) = 1$ 을 이용하여 $h(x) = A(x)(1 - A(x)) = -\left(A(x) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다.

따라서 (1-2)로부터 $0 < A(x) < \frac{3}{4}$ 이므로 $A(x) = \frac{1}{2}$ 일 때, $h(x)$ 가 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖고, $A(x) = \frac{1}{2}$ 이면

$x^4 - 2x = 0$ 이므로 $x = \sqrt[3]{2}$ 이다. 따라서 $a = \sqrt[3]{2}$ 이고 $h(a) = \frac{1}{4}$ 이다.

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I	
	핵심개념 및 용어	집합과 명제, 삼각함수	
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

좌표평면에서 기본적인 개념만으로 구성된 명제에 대해 이해하고 상황을 파악해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 문제를 해결하는 과정에서 수학 I 에서 배우는 삼각함수를 활용하는 계산을 통해 정답을 구할 수 있으므로 삼각함수를 이해하고 있는지도 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”		
	■ 수학 ■ 수학 I □ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학 I)
	제시문	성취기준 1	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
		성취기준 1	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 I	이준열 외	천재교육	2020	98-107	제시문	재구성
수학 I	권오남 외	교학사	2020	97-104	제시문	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우:

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(2-1) 문제의 조건에서 원에서 한 점이 주어졌을 때 그 점에서 특정한 거리에 있는 점이 단 하나일 조건이 두 점이 지름의 양 끝점이라는 것을 파악할 수 있는지 평가한다.

(2-2) 문제의 조건을 정확하게 이해하고 있는지 평가하고 다음 문제를 해결하는 힌트를 제공하고자 하였다.

(2-3) 최대/최소의 문제의 조건에서 정의된 X_n 이 n 이 증가함에 따라서 어떤 성질을 갖는지 파악할 수 있는지를 평가한다. 이러한 성질을 이해하고 삼각함수와 문제에서 제시된 계산과정을 이용해서 최종 정답에 이를 수 있다.

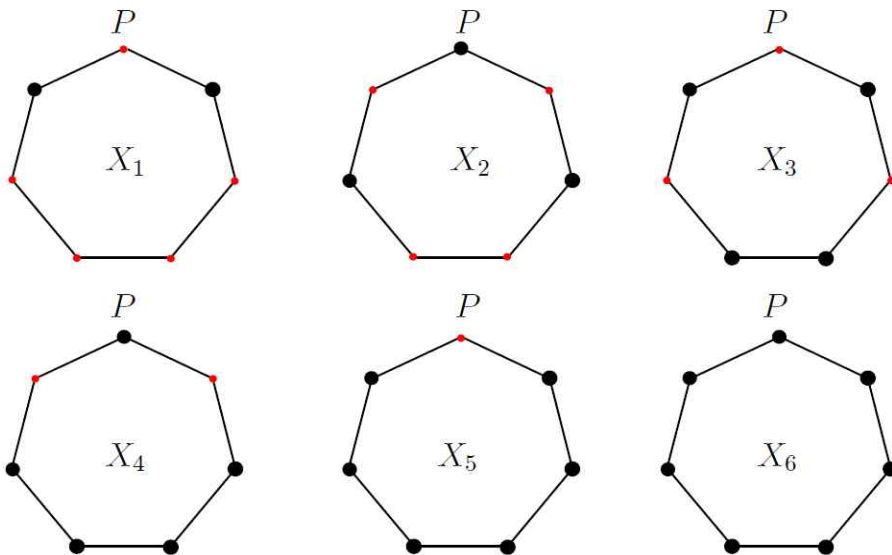
6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	원에서 주어진 한 점이 주어졌을 때 그 점에서 특정한 거리에 있는 점이 단 하나일 조건이 두 점이 지름의 양 끝점이라는 것을 파악하고 답을 구하면	7점
(2-2)	집합 X_n 을 순차적으로 구하는 과정에서 정의를 잘 이해하고 있으면	4점
	$n = 6$ 을 정확하게 구하면	4점
(2-3) (a)	모든 X_n 에 속한 점들의 집합의 원소의 개수가 6 이하임을 파악하면	4점
	문제의 조건을 만족하는 r 을 정확히 구하면	6점
(2-3) (b)	(2-3) (a)에서 구한 r 중에서 $r = 1$ 을 제외한 다른 경우가 답이 된다는 것을 파악하면	4점
	문제의 조건을 만족하는 r 을 정확히 구하면	6점

7. 예시 답안

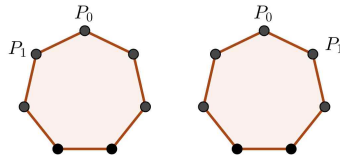
(2-1) 문제의 조건으로부터 원 위의 점 중 P 와의 거리가 1인 점이 원 위에 단 한 개 존재해야 하므로 원의 지름이 1이어야 한다. 따라서 $r = \frac{1}{2}$ 이다.

(2-2) X_n 이 구해지면 X_{n+1} 의 점들은 X_n 의 점들로부터 거리가 1인 X 위의 점들이다. 따라서 X_1, X_2, \dots 을 다음과 같이 차례대로 구할 수 있고, $n = 6$ 이다.

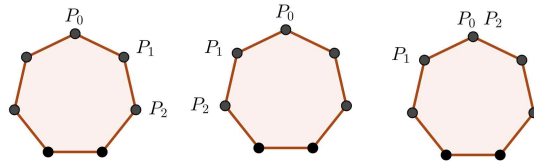


[별해] 문제의 조건을 n 개의 점 P_0, P_1, \dots, P_n 이 만족하면, $n+2$ 개의 점 $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n-1}, P_n$ 이 문제의 조건을 만족하므로 $X_n \subset X_{n+2}$ 임을 알 수 있다.

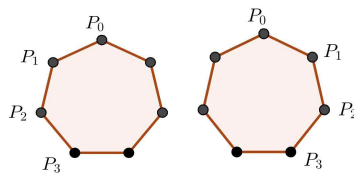
- $n(X_1) = 2$



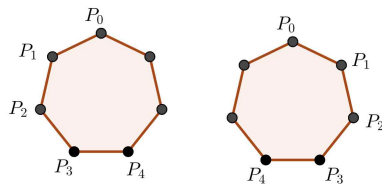
- $n(X_2) = 3$



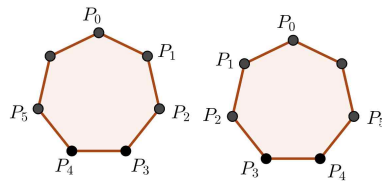
- 다음 경우를 고려하면 $n(X_3) = n(X_1) + 2 = 4$



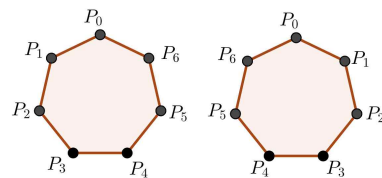
- 다음 경우를 고려하면 $n(X_4) = n(X_2) + 2 = 5$



- 다음 경우를 고려하면 $n(X_5) = n(X_3) + 2 = 6$



- 다음 경우를 고려하면 $n(X_6) = n(X_4) + 2 = 7$



따라서 $n = 6$ 이다.

(2-3) X_n ($n \geq 1$)의 임의의 점을 Q 라고 하면 Q 로부터 거리가 1인 집합 X 의 점이 존재하고 이 점은 X_{n+1} 에 속하므로 Q 는 X_{n+2} 의 원소이기도 하다.

따라서 $X_1 \subset X_3 \subset X_5 \subset \dots$ 이고 $X_2 \subset X_4 \subset X_6 \subset \dots$ 이다.

그러므로 어떤 n 에 대하여 X_n 에 속하는 점들의 집합을 Y 이라고 하면, Y 의 임의의 점은 어떤 자연수 n 에 대하여 $X_n \cup X_{n+1}$ 에 속한다.

또한 $r > \frac{1}{2}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여 X_n 의 원소는 2개 이상이다.

(a) 문제의 조건에 의하여 Y 의 원소는 기껏해야 6개이다. $r > \frac{1}{2}$ 이므로 Y 는 원소의 개수가 적어도 3개이다.

$n(Y) = 3$ 인 경우 세 점들 사이의 거리는 1이어야 하므로 원 X 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형에 외접하고

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

$n(Y) = 4$ 이면 원 X 는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 외접하고 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$n(Y) = 5$ 이면 어떤 n 에 대하여 $X_n = X_{n+2} = \dots = 2$ 이고 $X_{n+1} = X_{n+3} = \dots = 3$ 이어야 하는데 이런 경우는 X 가 원일 때는 불가능하다.

마지막으로 $n(Y) = 6$ 이라고 하자. 어떤 n 에 대하여 $X_n = X_{n+2} = \dots = 2$ 이고 $X_{n+1} = X_{n+3} = \dots = 4$ 인 경우는 불가능하므로, 어떤 n 에 대하여 $X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \dots = 3$ 이다. 이 경우 원 X 가 한 변의 길이가 1인 정육각형에 외접하므로 $r = 1$ 이다.

(b) 문제의 조건에서 $n(Y) \leq 5$ 이어야 한다. (a)에 의하여 $n(Y) = 3$ 이면 $r^2 = \frac{1}{3}$, $n(Y) = 4$ 이면 $r^2 = \frac{1}{2}$ 이다.

마지막으로 $n(Y) = 5$ 이라고 하자. 원래의 P 대신에 Y 의 P 가 아닌 네 점 중 하나를 P 로 대체해도 집합 Y 는 변하지 않으므로, Y 의 임의의 이웃하는 두 점 사이의 거리는 모두 같다. 따라서 Y 는 정오각형의 꼭짓점의 집합이고, 원 X 는 이 정오각형의 외접원이다. 이때 정오각형의 한 변의 길이가 1이거나 대각선의 길이가 1이어야 하는데, 제시문을 이용하면 각각의 경우

$$r^2 = \left(\frac{1}{2 \sin(\pi/5)} \right)^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \text{ 또는 } r^2 = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \text{이다.}$$

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분학	
	핵심개념 및 용어	합성함수의 미분법, 지수함수와 로그함수의 극한	
예상 소요 시간	50분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

합성함수의 미분을 이용하여 부등식에 관한 문제를 해결할 수 있는지와 자연로그에 대하여 이해하고 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”		
	□ 수학 □ 수학 I □ 수학 II ■ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분학)
	(가), (다)	성취기준 1	[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
	(나)	성취기준 2	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분학	류희찬 외	천재교과서	2020	54-60	(가)	
미적분학	이준열 외	천재교육	2020	55-59	(가)	
미적분학	류희찬 외	천재교과서	2020	103-106	(나)	재구성
미적분학	이준열 외	천재교육	2020	88-91	(나)	재구성
미적분학	류희찬 외	천재교과서	2020	54-60	(다)	재구성
미적분학	이준열 외	천재교육	2020	55-59	(다)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(3-1) 주어진 관계식을 정리하여 두 함수를 구할 수 있다.

(3-2) 합성함수의 미분을 이용하여 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다.

(3-3) 자연로그의 뜻을 이해하고 주어진 제시문을 활용하여 문제에서 요구하는 최소의 자연수를 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$b = a^t = ta$ 임을 보임.	5점
	$f(t) = t^{\frac{1}{t-1}}, g(t) = t^{\frac{t}{t-1}}$ 임을 보임.	5점
(3-2)	$h'(t) = \frac{(t-1)^2 - t(\ln t)^2}{(t-1)^3} e^{\frac{\ln t}{t-1}}$ 임을 보임.	5점
	$h'(t) > 0$ 임을 보임.	5점
	h 의 치역이 (e, ∞) 임을 보임.	5점
(3-3)	b^a 의 범위가 (e^e, ∞) 임을 보임.	4점
	$15 < e^e < 16$ 임을 보임.	4점
	$n = 16$ 임을 보임.	2점

7. 예시 답안

(3-1) $\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{b}{a} = t$ 이므로 $b = a^t = ta$ 이다. 따라서 $a = t^{\frac{1}{t-1}}, b = t^{\frac{t}{t-1}}$ 이고 $f(t) = t^{\frac{1}{t-1}}, g(t) = t^{\frac{t}{t-1}}$ 이다.

(3-2) $h(t) = \frac{t \ln t}{t-1} e^{\frac{\ln t}{t-1}}$ 이므로 제시문 (나)의 미분법을 이용하면

$$h'(t) = \frac{(\ln t + 1)(t-1) - t \ln t}{(t-1)^2} e^{\frac{\ln t}{t-1}} + \frac{t \ln t}{t-1} e^{\frac{\ln t}{t-1}} \times \frac{1 - \frac{1}{t} - \ln t}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2 - t(\ln t)^2}{(t-1)^3} e^{\frac{\ln t}{t-1}}$$

이다. $k(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \ln t$ 로 두면, $t > 1$ 일 때 $k'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2t\sqrt{t}}(\sqrt{t}-1)^2 > 0$ 이고

$k(1) = 0$ 이므로 $k(t) > 0$ 이다. 그러므로 $h'(t) > 0$ 이고 $h(t)$ 는 $t > 1$ 일 때 증가한다. 또한 $\lim_{t \rightarrow 1} h(t) = e$ 이고

$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ 이므로 h 의 치역은 (e, ∞) 이다.

(3-3) (3-2)의 결과에 의해 $b^a = g(t)^{f(t)} = e^{h(t)}$ 의 범위는 (e^e, ∞) 이다. 제시문 (가), (다)에 의하면

$$\ln e^e = e = 2.718 \dots, \ln 15 = 2.708 \dots, \ln 16 = 2.772 \dots$$

이므로 $15 < e^e < 16$ 이다. 따라서 a^b 가 될 수 있는 최소의 자연수는 16이다.