

2024학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 2023.11.17.(금)

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ① 02. ④ 03. ② 04. ① 05. ④
06. ④ 07. ⑤ 08. ② 09. ④ 10. ②
11. ① 12. ③ 13. ① 14. ① 15. ③
16. 2 17. 8 18. 9 19. 32
20. 25 21. 10 22. 483

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{24 \times 3^{\frac{2}{3}}} \\ &= (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= (2^3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{3 \times \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= 2^1 \times 3^1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 5x^2 + 3 \text{ 에서} \\ f'(x) &= 6x^2 - 10x \text{ 이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= f'(2) \\ &= 24 - 20 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta = \frac{1}{3} \text{ 에서}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서도 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - a) \\ &= 6 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + a) \\ &= 4 + a \end{aligned}$$

$$f(2) = 4 + a$$

그러므로

$$6 - a = 4 + a = 4 + a$$

따라서

$$2a = 2. \quad a = 1$$

정답 ①

5. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 1 - 3 + C = 6 \text{ 에서 } C = 8$$

따라서

$$f(2) = 8 - 12 + 8 = 4$$

정답 ④

6. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_4 - S_2 = a_3 + a_4 \text{ 이므로}$$

$$a_3 + a_4 = 3a_4, \quad a_3 = 2a_4$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_5 = \frac{3}{4} \text{ 에서 } r \neq 0 \text{ 이고}$$

$$a_3 = 2a_4 \text{ 에서 } r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = a_1 \times r^4 \text{ 에서}$$

$$a_1 = a_5 \times \frac{1}{r^4} = \frac{3}{4} \times 2^4 = 12$$

$$a_5 = a_2 \times r^3 \text{ 에서}$$

$$a_2 = a_5 \times \frac{1}{r^3} = \frac{3}{4} \times 2^3 = 6$$

따라서 $a_1 + a_2 = 12 + 6 = 18$

정답 ④

7. 출제의도 : 다항함수의 극댓값과 극솟값을 갖는 x 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x - 12$$

$$= (x+2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이고, $x = 6$ 에서 극소이다.

따라서

$$\alpha = -2, \quad \beta = 6$$

이므로

$$\beta - \alpha = 6 - (-2) = 8$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$xf(x) - f(x) = 3x^4 - 3x \text{ 에서}$$

$$(x-1)f(x) = 3x(x-1)(x^2+x+1) \quad \text{..... ㉠}$$

$f(x)$ 가 삼차함수이고

㉠이 x 에 대한 항등식이므로

$$f(x) = 3x(x^2+x+1)$$

따라서

$$\int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 3x(x^2 + x + 1)dx$$

$$= \int_{-2}^2 (3x^3 + 3x^2 + 3x)dx$$

$$= 2 \int_0^2 3x^2 dx$$

$$= 2 \times \left[x^3 \right]_0^2$$

$$= 2 \times 2^3$$

$$= 16$$

정답 ②

9. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수직선 위의 두 점 $P(\log_5 3)$, $Q(\log_5 12)$ 에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 1 이므로

$$\frac{m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3}{m + (1-m)} = 1$$

$$m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3 = 1$$

$$m(\log_5 12 - \log_5 3) = 1 - \log_5 3$$

$$m \times \log_5 \frac{12}{3} = \log_5 \frac{5}{3}$$

$$m \times \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$$

이때,

$$m = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}$$

$$= \log_4 \frac{5}{3}$$

따라서,

$$4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 적분을 이용하여 수직선 위의 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t (t^2 - 6t + 5)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t,$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t (2t - 7)dt$$

$$= t^2 - 7t$$

이므로

$$f(t) = |x_1(t) - x_2(t)| \\ = \left| \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right|$$

이다. 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \text{라 하면}$$

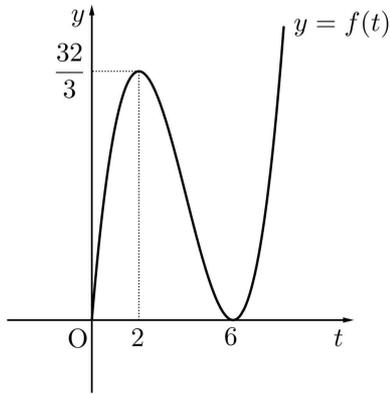
$$g'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t=2 \text{ 또는 } t=6$$

$t \geq 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	2	...	6	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \geq 0$ 이므로 $f(t) = g(t)$ 이고 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(t)$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[2, 6]$ 에서 감소하고, 구간 $[6, \infty)$ 에서 증가한다. 즉, $a=2$, $b=6$ 이다.

시각 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_2^6 |v_2(t)| dt &= \int_2^6 |2t-7| dt \\ &= \int_2^{\frac{7}{2}} (7-2t) dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t-7) dt \\ &= \left[7t - t^2 \right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[t^2 - 7t \right]_{\frac{7}{2}}^6 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|a_6| = a_8$ 에서

$a_6 = a_8$ 또는 $-a_6 = a_8$ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 0이 아니므로

$a_6 \neq a_8$ ㉡

㉠, ㉡에서

$-a_6 = a_8$ 즉,

$a_6 + a_8 = 0$ ㉢

한편, $|a_6| = a_8$ 에서

$a_8 \geq 0$ 이고, $a_6 + a_8 = 0$ 이므로

$a_6 < 0 < a_8$ 이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 양수이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d(d > 0)$ 이라 하면 ㉢에서

$$(a_1 + 5d) + (a_1 + 7d) = 0$$

$$a_1 = -6d \quad \dots\dots \text{㉣}$$

한편, $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$ 에서

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6} \right)$$

$$= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 5d} \right)$$

$$= \frac{1}{d} \times \frac{5d}{a_1(a_1 + 5d)}$$

$$= \frac{5}{a_1(a_1 + 5d)}$$

이므로

$$\frac{5}{a_1(a_1 + 5d)} = \frac{5}{96}$$

$$a_1(a_1 + 5d) = 96 \quad \dots\dots \text{㉤}$$

㉣을 ㉤에 대입하면

$$-6d \times (-d) = 96$$

$$d^2 = 16$$

$d > 0$ 이므로

$$d = 4$$

$d = 4$ 를 ㉠에 대입하면

$$a_1 = -6 \times 4 = -24$$

따라서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} a_k \\ &= \frac{15\{2 \times (-24) + 14 \times 4\}}{2} \\ &= 60 \end{aligned}$$

정답 ①

12. 출제의도 :

곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$ 는 $x \geq t$ 일 때, 점 $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이므로 이 직선은 x 축과 점 $(t+f(t), 0)$ 에서 만난다.

그러므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \int_0^t f(x)dx + \frac{1}{2} \times \{f(t)\}^2$$

이때, 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} S'(t) &= f(t) + f(t) \times f'(t) \\ &= f(t)\{1 + f'(t)\} \end{aligned}$$

한편, $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 이므로

$$0 < t < 6 \text{에서 } f(t) > 0$$

또,

$$\begin{aligned} & 1 + f'(t) \\ &= 1 + \frac{1}{9} \{(t-6)(t-9) + t(t-9) + t(t-6)\} \\ &= 1 + \frac{1}{9} \{(t^2 - 15t + 54) + (t^2 - 9t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (t^2 - 6t)\} \\ &= 1 + \frac{1}{9} (3t^2 - 30t + 54) \\ &= 1 + \frac{1}{3} (t^2 - 10t + 18) \\ &= \frac{1}{3} (t^2 - 10t + 21) \\ &= \frac{1}{3} (t-3)(t-7) \end{aligned}$$

그러므로 $0 < t < 6$ 에서 $S(t)$ 의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

t	(0)	...	3	...	(6)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	(극대)	↘	

그러므로 $S(t)$ 는 $t=3$ 에서 극대이면서 최대이다.

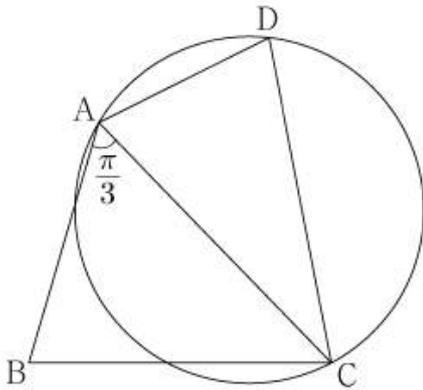
따라서, 최댓값은

$$\begin{aligned} & S(3) \\ &= \int_0^3 f(x)dx + \frac{1}{2} \{f(3)\}^2 \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 x(x-6)(x-9)dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{9} \times 3 \times (-3) \times (-6) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (x^3 - 15x^2 + 54x)dx + 18 \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2 \right]_0^3 + 18 \\ &= \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{4} \times 81 - 5 \times 27 + 27 \times 9 \right) + 18 \\ &= \left(\frac{9}{4} - 15 + 27 \right) + 18 \\ &= \left(\frac{9}{4} + 12 \right) + 18 \\ &= \frac{9}{4} + 30 \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙 및 삼각형의 넓이를 활용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = a (a > 0)$$

이라 하면

코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$-2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)$$

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$a > 0$ 이므로

$$a = 4$$

즉, $\overline{AC} = 4$

삼각형 ABC의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\overline{AD} \times \overline{CD} = 9$$

이므로

삼각형 ACD의 넓이 S_2 는

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle ADC)$$

$$= \frac{9}{2} \sin(\angle ADC)$$

이때, $S_2 = \frac{5}{6} S_1$ 이므로

$$\frac{9}{2} \sin(\angle ADC) = \frac{5}{6} \times 3\sqrt{3}$$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)} = 2R$$

이므로

$$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = 2R$$

$$R = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

$$= \frac{54}{25}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 새롭게 정의된 함수가 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \leq 2$ 일 때,

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표
로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗	5

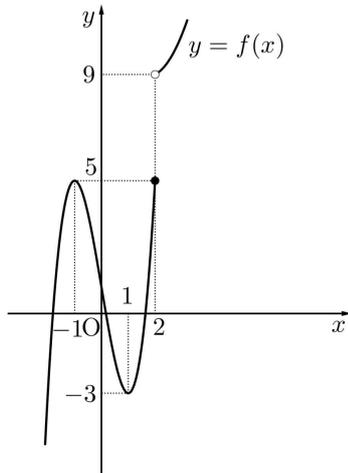
또한, a, b 가 자연수이므로 곡선

$$y = a(x-2)(x-b) + 9$$

는 점 $(2, 9)$ 와 점 $(b, 9)$ 를 지나고 아래
로 볼록한 포물선이다.

(i) $b=1$ 또는 $b=2$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $x > 2$ 에서 증가하고, 함수
 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $-3 < k < 5$ 인 모든 실수 k 에 대하
여

$$g(k) = \lim_{t \rightarrow k^-} g(k) = \lim_{t \rightarrow k^+} g(k) = 3 \quad \text{..... } \textcircled{7}$$

이므로

$$g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(k) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(k) = 9 \quad \text{..... } \textcircled{8}$$

을 만족시키는 실수 k 의 개수가 1 이 아
니다.

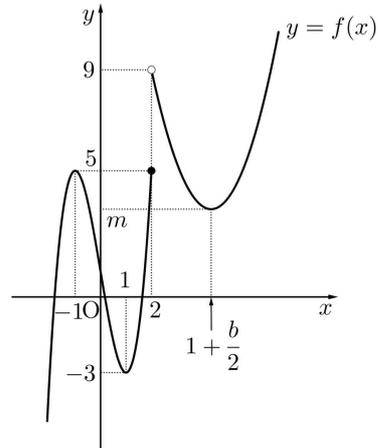
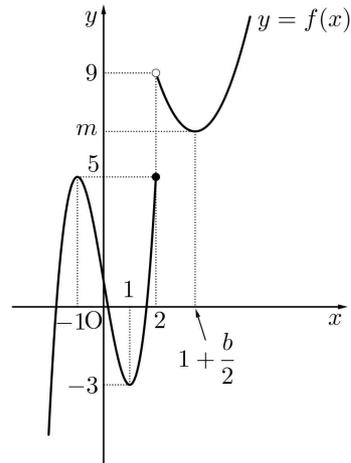
(ii) $b \geq 3$ 인 경우

곡선 $y = a(x-2)(x-b) + 9$ 는 직선

$x = \frac{2+b}{2} = 1 + \frac{b}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

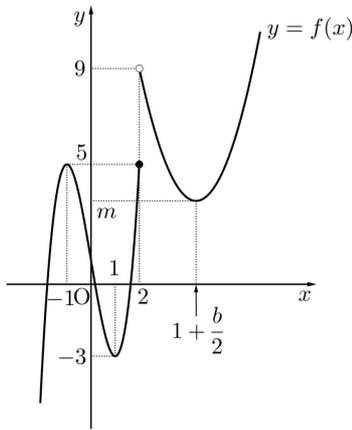
함수 $f(x)$ 는 $x = 1 + \frac{b}{2}$ 에서 극솟값을 갖
는다. 이 극솟값을 m 이라 하자.

(ii - ①) $m > -3$ 인 경우



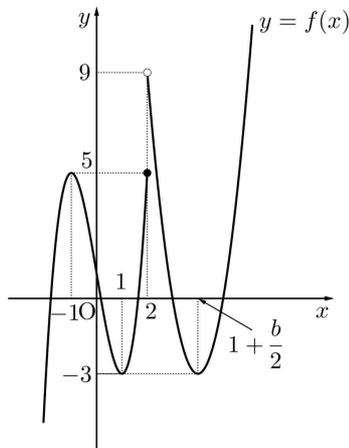
m 과 5 중에 크지 않은 값을 m_1 이라 하
면 $-3 < k < m_1$ 인 모든 실수 k 에 대하
여 $\textcircled{7}$ 이 성립하므로 $\textcircled{8}$ 을 만족시키는 실
수 k 의 개수가 1 이 아니다.

(ii - ②) $m < -3$ 인 경우



$m < k < -3$ 인 모든 실수 k 에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 아니다.

(ii -㉢) $m = -3$ 인 경우



k 의 값에 따라 $g(k)$, $\lim_{t \rightarrow k^-} g(k)$,

$\lim_{t \rightarrow k^+} g(k)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim_{t \rightarrow k^-} g(k)$	$\lim_{t \rightarrow k^+} g(k)$
$k < -3$	1	1	1
$k = -3$	3	1	5
$-3 < k < 5$	5	5	5
$k = 5$	4	5	2
$5 < k < 9$	2	2	2
$k = 9$	1	2	1
$k > 9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k 의 값은 -3 뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $b \geq 3$, $m = -3$ 이다.

$$f\left(1 + \frac{b}{2}\right) = -3 \text{에서}$$

$$a\left(\frac{b}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{b}{2}\right) + 9 = -3$$

$$a(b-2)^2 = 48$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 구하는 두 자연수 a , b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는

$(48, 3)$, $(12, 4)$, $(3, 6)$

이다.

따라서 $a+b$ 의 최댓값은 $48+3=51$ 이다.

정답 ①

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a_n 이 홀수일 때

$$a_{n+1} = 2^{a_n} \text{은 자연수이고}$$

a_n 이 짝수일 때

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{은 자연수이다.}$$

이때 a_1 이 자연수이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이다.

$$a_6 + a_7 = 3 \text{에서}$$

$$a_6 = 1, a_7 = 2 \text{ 또는 } a_6 = 2, a_7 = 1$$

이다.

(i) $a_6 = 1$ 일 때,

$a_6 = 1$ 이고 a_5 가 홀수인 경우

$$a_6 = 2^{a_5} \text{에서}$$

$$1 = 2^{a_5}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_5 의 값은

없다.

$a_6 = 1$ 이고 a_5 가 짝수인 경우

$$a_6 = \frac{1}{2}a_5 \text{에서}$$

$$1 = \frac{1}{2}a_5$$

$$a_5 = 2$$

a_4 를 구해보자.

$a_5 = 2$ 이고 a_4 가 홀수인 경우

$$a_5 = 2^{a_4} \text{에서}$$

$$2 = 2^{a_4}$$

$$a_4 = 1$$

$a_5 = 2$ 이고 a_4 가 짝수인 경우

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 \text{에서}$$

$$2 = \frac{1}{2}a_4$$

$$a_4 = 4$$

a_3 을 구해보자.

$a_4 = 1$ 일 때

$$a_3 = 2$$

$a_4 = 4$ 이고 a_3 이 홀수인 경우

$$a_4 = 2^{a_3} \text{에서}$$

$$4 = 2^{a_3}$$

$$a_3 = 2$$

이때, a_3 이 짝수이므로 모순이다.

$a_4 = 4$ 이고 a_3 이 짝수인 경우

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{에서}$$

$$4 = \frac{1}{2}a_3$$

$$a_3 = 8$$

a_2 를 구해보자.

$a_3 = 2$ 일 때

$$a_2 = 1 \text{ 또는 } a_2 = 4$$

$a_3 = 8$ 이고 a_2 가 홀수인 경우

$$a_3 = 2^{a_2} \text{에서}$$

$$8 = 2^{a_2}$$

$$a_2 = 3$$

$a_3 = 8$ 이고 a_2 가 짝수인 경우

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{에서}$$

$$8 = \frac{1}{2}a_2$$

$$a_2 = 16$$

a_1 을 구해보자.

$a_2 = 1$ 일 때

$$a_1 = 2$$

$a_2 = 4$ 일 때

$$a_1 = 8$$

$a_2 = 3$ 이고 a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1} \text{에서}$$

$$3 = 2^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1 의 값은 없다.

$a_2 = 3$ 이고 a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{에서}$$

$$3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 6$$

$a_2 = 16$ 이고 a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1} \text{에서}$$

$$16 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 4$$

이때 a_1 이 짝수이므로 모순이다.

$a_2 = 16$ 이고 a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{에서}$$

$$16 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 32$$

따라서 a_1 의 값은

2 또는 6 또는 8 또는 32이다.

(ii) $a_6 = 2$ 일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$a_2 = 2$ 또는 $a_2 = 6$ 또는 $a_2 = 8$ 또는

$$a_2 = 32$$

a_1 을 구해보자.

$a_2 = 2$ 이고 a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$2 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 1$$

$a_2 = 2$ 이고 a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 4$$

$a_2 = 6$ 이고 a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$6 = 2^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1 의 값은 없다.

$a_2 = 8$ 이고 a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$8 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 12$$

$a_2 = 8$ 이고 a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$8 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 3$$

$a_2 = 8$ 이고 a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$8 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 16$$

$a_2 = 32$ 이고 a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$32 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 5$$

$a_2 = 32$ 이고 a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$32 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 64$$

따라서 a_1 의 값은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 12 또는 16 또는 64이다.

(i), (ii)에서

모든 a_1 의 값의 합은

$$(2+6+8+32) + (1+3+4+5+12+16+64) = 153$$

정답 ③

16. 출제의도 : 지수에 미지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$$

$$3^{x-8} = (3^{-3})^x$$

$$3^{x-8} = 3^{-3x}$$

그러므로

$$x-8 = -3x$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

정답 2

17. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (x+1)(x^2+3) \text{이므로}$$

$$f'(x) = (x^2+3) + (x+1) \times 2x$$

따라서,

$$f'(1) = (1+3) + 2 \times 2$$

$$= 8$$

정답 8

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -3 \sum_{k=1}^{10} a_k + 33 \quad \dots \textcircled{B}$$

ⓐ을 ⓑ에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -3 \left(2 \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \right) + 33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -6 \sum_{k=1}^{10} b_k + 63$$

$$7 \sum_{k=1}^{10} b_k = 63$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = 9$$

정답 9

19. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식을 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(2+x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은

$$\cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$$

즉,

$$-\frac{1}{2} < \cos \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{C}$$

이다.

$0 < x < 16$ 에서 $0 < \frac{\pi}{4}x < 4\pi$ 이므로 ⓐ에

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4}x < \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{4}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{7}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{10}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{11}{3}\pi$$

이다. 즉,

$$\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{16}{3} < x < \frac{20}{3} \quad \text{또는}$$

$$\frac{28}{3} < x < \frac{32}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{40}{3} < x < \frac{44}{3}$$

이므로 구하는 자연수 x 의 값은

2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$2+6+10+14=32$$

정답 32

20. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$$

$$f'(0) = 2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $O(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 2x$$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구해보자.

$$f(x) = 2x \text{에서}$$

$$-x^3 + ax^2 + 2x = 2x$$

$$x^2(x-a) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = a$$

점 A의 x 좌표는 0이 아니므로 점 A의 x 좌표는 a 이다. 즉, 점 A의 좌표는

$$(a, 2a)$$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle OAB = \frac{\pi}{2}$$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$$f'(a) = -3a^2 + 2a^2 + 2$$

$$= -a^2 + 2$$

이므로

직선 AB의 기울기는 $-a^2 + 2$ 이다.

$$2 \times (-a^2 + 2) = -1 \text{에서}$$

$$a^2 = \frac{5}{2}$$

$$a > \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$a = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

점 A의 좌표는

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10} \right)$$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{\sqrt{10}}{2} \right) + \sqrt{10} \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{\sqrt{10}}{2} \right) + \sqrt{10}$$

$$x = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

점 B의 좌표는

$$\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}, 0 \right)$$

이다.

따라서

$$\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 + (\sqrt{10})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 + (0 - \sqrt{10})^2} = 5\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{OA} \times \overline{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 5\sqrt{2} = 25$$

정답 25

21. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 함수 $g(t)$ 가 최솟값을 갖도록 하는 a 의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=0$ 일 때, 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 5를 가지므로

$$g(0)=5$$

한편, 함수 $y=-x^2+6x$ 는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고 $f(5)=5$ 이므로 $1 \leq t \leq 5$ 일 때,

$$g(t) \geq 5$$

한편,

$$f(5)=5 \text{이고 } f(6)=0$$

또, 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $g(t)$ 가 최솟값을 5로 갖기 위해서는 $t=6$ 일 때, 구간 $[5, 7]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 5 이상이어야 하므로

$$f(7) \geq 5$$

즉,

$$a \log_4(7-5) \geq 5$$

$$a \times \log_2 2 \geq 5$$

$$a \times \frac{1}{2} \geq 5$$

$$a \geq 10$$

따라서, 양수 a 의 최솟값은 10이다.

정답 10

22. 출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건으로부터

함수 $f(x)$ 가 모든 정수 k 에 대하여

$f(k-1)f(k+1) \geq 0$ 을 만족시켜야 한다.

..... ㉠

함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 반드시 실근을 갖는다.

(i) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가

1인 경우

방정식 $f(x)=0$ 의 실근을 a 라 할 때, a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면

$$f(m) < 0 < f(m+2)$$

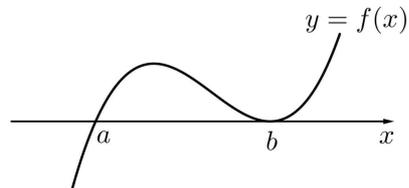
이므로 $f(m)f(m+2) < 0$ 이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f(x)=0$ 의 실근을 $a, b(a < b)$ 라 할 때, $f(x)=(x-a)(x-b)^2$

또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$ 이다.

(ii-㉠) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 일 때



a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면

$$f(m-1) < 0, \quad f(m) < 0, \quad f(m+1) \geq 0, \quad f(m+2) \geq 0$$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$$f(m-1)f(m+1) \geq 0,$$

$$f(m)f(m+2) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$f(m+1)=f(m+2)=0 \text{이어야 한다.}$$

그러므로 $a=m+1, b=m+2$ 이다.

..... ㉡

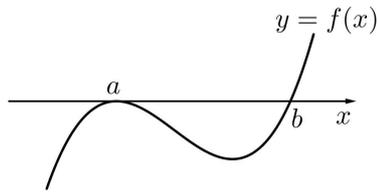
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \text{이므로 } m+1 < \frac{1}{4} < m+2 \text{이고}$$

정수 m 의 값은 -1 이다.

$$\text{즉, } f(x)=x(x-1)^2$$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$ 이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키지 않는다.

(ii-㉢) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$ 일 때



만약 $a < n < b$ 인 정수 n 이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1 이라 하자. 그러면 $f(n_1) < 0 < f(n_1 + 2)$

이므로 $f(n_1)f(n_1 + 2) < 0$ 이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a < n < b$ 인 정수 n 은 존재하지 않는다. ㉡

그러므로 a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면

$$f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0, f(m+2) \geq 0$$

이고, ㉡과 마찬가지로 $a = m+1, b = m+2$ 이다.

$f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 이므로 $m+1 < \frac{1}{4} < m+2$ 이고 정수 m 의 값은 -1 이다.

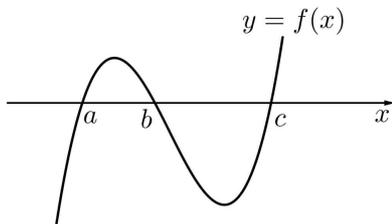
$$\text{즉, } f(x) = x^2(x-1)$$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$ 이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키지 않는다

(iii) 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \quad (a < b < c)$$

라 하자.



이때 ㉡과 마찬가지로 $b < n < c$ 인 정수 n 은 존재하지 않는다. 그러므로 a 보다 작은 정수 중 최댓값을 m 이라 하면

$$f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0, f(m+2) \geq 0$$

이고 ㉡과 마찬가지로 $b = m+1, c = m+2$ 이다.

이때 $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 이므로 $a < \frac{1}{4} < m+1$ 또는 $m+1 < \frac{1}{4} < m+2$ 이다.

(iii-①) $a < \frac{1}{4} < m+1$ 일 때

$m < a < \frac{1}{4} < m+1$ 이므로 정수 m 의 값은 0 이고, $b = 1, c = 2$ 이다.

$$\text{즉, } f(x) = (x-a)(x-1)(x-2)$$

그러나 이때 $-\frac{1}{4} < 0 < a$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$ 이고 그

러므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키지 않는다.

(iii-②) $m+1 < \frac{1}{4} < m+2$ 일 때

정수 m 의 값은 -1 이고 $b = 0, c = 1$ 이다.

$$\text{즉, } f(x) = (x-a)x(x-1) = (x-a)(x^2-x)$$

$$f'(x) = (x^2-x) + (x-a)(2x-1)$$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16} + \left(-\frac{1}{4} - a\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{16} + \frac{3}{2}a$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\frac{11}{16} + \frac{3}{2}a = -\frac{1}{4}, \quad a = -\frac{5}{8}$$

그리고 $a = -\frac{5}{8}$ 이면

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 도 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \left(x + \frac{5}{8}\right)(x^2 - x) \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(8) = \frac{69}{8} \times 56 = 483$$

정답 483

■ [선택: 미적분]

23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ①
28. ② 29. 162 30. 125

23. 출제의도 : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \times \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{5x \times \frac{\ln(1+5x)}{5x}} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x}} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

정답 ③

24. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x = \ln(t^3 + 1)$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

$y = \sin \pi t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = \pi \cos \pi t$$

따라서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3 + 1}} = \frac{\pi(t^3 + 1)\cos \pi t}{3t^2}$$

따라서 $t = 1$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{\pi(1^3 + 1)\cos \pi}{3 \times 1^2} = \frac{\pi \times 2 \times (-1)}{3} = -\frac{2}{3}\pi$$

정답 ②

25. 출제의도 : 역함수의 미분법과 치환적분법을 이용하여 함수를 구하고 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$ 의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$ 의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x 에 대하여

$$f(x) > 0 \cdots \textcircled{7}$$

이다.

모든 양수 x 에 대하여 $g(f(x)) = x$ 이므로

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

따라서

$$\begin{aligned} &\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f'(x)} dx \\ &= \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln |f(x)|]_1^a \\ &= \ln f(a) - \ln f(1) \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \ln f(a) - \ln 8 \\ &= \ln f(a) - 3\ln 2 \end{aligned}$$

이므로

$\ln f(a) - 3\ln 2 = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$ 에서

$$\ln f(a) = 2\ln a + \ln(a+1) + 2\ln 2$$

$$= \ln a^2 + \ln(a+1) + \ln 2^2$$

$$= \ln 4a^2(a+1)$$

즉, $f(a) = 4a^2(a+1)$ 이므로
 $f(2) = 4 \times 2^2 \times (2+1) = 48$

정답 ④

[다른 풀이]

함수 $g(x)$ 의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$ 의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x 에 대하여

$$f(x) > 0 \cdots \textcircled{7}$$

이다.

$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)} dx$ 에서 $f(x) = y$ 라 하면

$$x = 1 \text{ 일 때 } y = f(1) = 8,$$

$$x = a \text{ 일 때 } y = f(a) \text{ 이고}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

이때 역함수의 미분법에 의하여

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'(y)}$$

이때 도함수 $g'(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$g'(y) \neq 0$$

따라서

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)} dx$$

$$= \int_8^{f(a)} \left\{ \frac{1}{g'(y) \times y} \times g'(y) \right\} dy$$

$$= \int_8^{f(a)} \frac{1}{y} dy$$

$$= [\ln|y|]_8^{f(a)}$$

$$= \ln|f(a)| - \ln|8|$$

$$= \ln|f(a)| - 3\ln 2$$

$\textcircled{7}$ 에서 $f(a) > 0$ 이므로 주어진 등식에서

$$\ln f(a) - 3\ln 2 = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

$$\ln f(a) = 2\ln a + \ln(a+1) + 2\ln 2$$

$$= \ln a^2 + \ln(a+1) + \ln 2^2$$

$$= \ln 4a^2(a+1)$$

따라서

$$f(a) = 4a^2(a+1)$$

이므로

$$f(2) = 4 \times 2^2 \times (2+1) = 48$$

26. 출제의도 : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $x = t$ ($\frac{3}{4}\pi \leq t \leq \frac{5}{4}\pi$)를 포함하고

x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{5}{4}\pi(1-2t)\cos t$$

따라서 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$u(t) = 1-2t, \quad v'(t) = \cos t$$

$$u'(t) = -2, \quad v(t) = \sin t$$

라 하면

$$V = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (1-2t)\cos t dt$$

$$= [(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + 2 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \sin t dt$$

$$= [(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + 2[-\cos t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$= \left(1 - \frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{3}{2}\pi\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$+ 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$$

27. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = e^{-x} + e^t \text{이므로}$$

$$y' = -e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(s, e^{-s} + e^t)$ 이라고 하면

접선의 방정식은

$$y = -e^{-s}(x-s) + e^{-s} + e^t$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$se^{-s} + e^{-s} + e^t = 0$$

$$e^t = -(s+1)e^{-s} \dots \textcircled{\ominus}$$

양변을 s 에 대하여 미분하면

$$e^t \frac{dt}{ds} = -e^{-s} + (s+1)e^{-s} = se^{-s} \dots \textcircled{\ominus}$$

또한 $f(t) = -e^{-s}$ 이므로 양변을 s 에 대하여 미분하면

$$f'(t) \frac{dt}{ds} = e^{-s} \dots \textcircled{\omin�}$$

$\textcircled{\omin�}, \textcircled{\omin�}$ 에서

$$\frac{e^t}{f'(t)} = s, \text{ 즉 } f'(t) = \frac{e^t}{s}$$

또한 $f(a) = -e^{-s} = -e\sqrt{e} = -e^{\frac{3}{2}}$ 에서

$$s = -\frac{3}{2}$$

이고 $\textcircled{\omin�}$ 에서 $e^a = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$f'(t) = \frac{e^t}{s} \text{에서}$$

$$f'(a) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

28. 출제의도 : 정적분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x < 0$ 일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$ 이므로

$$f'(x) = -4e^{4x^2} - 4xe^{4x^2} \times 8x \\ = -4e^{4x^2} - 32x^2e^{4x^2} < 0$$

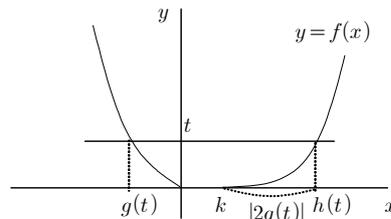
즉, $x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고 양수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

또한, 모든 양수 t 에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k$$

가 성립하므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $\int_0^7 f(x)dx = e^4 - 1$ 에서 $h(t_1) = 7$ 이라 하면

$$\int_{g(t_1)}^0 (-4xe^{4x^2})dx = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_{g(t_1)}^0 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{4\{g(t_1)\}^2} = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

$$g(t_1) = -1$$

즉 $k + |2 \times (-1)| = 7$ 에서 $k = 5$ 이므로

$$f(8) = f\left(-\frac{3}{2}\right), f(9) = f(-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(9)}{f(8)} &= \frac{f(-2)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-4 \times (-2)e^{4(-2)^2}}{-4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\left(-\frac{3}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{4}{3}e^{16-9} \\ &= \frac{4}{3}e^7 \end{aligned}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비 급수를 구하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_n = ar^{n-1}, b_n = bs^{n-1} \quad (a \neq 0, b \neq 0, r \neq 0,$$

$s \neq 0)$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수

렴하므로 $-1 < r < 1, -1 < s < 1$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{ab}{1-rs}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b}{1-s}$$

이므로

$$\frac{ab}{1-rs} = \frac{a}{1-r} \times \frac{b}{1-s}$$

$$1-rs = (1-r)(1-s)$$

$$r+s = 2rs \quad \cdots \textcircled{7}$$

(i) $r > 0$ 인 경우

$a_1 > 0$ 이면 $a_2 > 0, a_3 > 0$ 이므로

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 3 \times \frac{a_2}{1-r^2}$$

$$7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 7 \times \frac{a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3a_2}{1-r^2} = \frac{7a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3}{1-r^2} = \frac{7r}{1-r^3}$$

$$4r^3 - 7r + 3 = 0$$

$$(r-1)(2r-1)(2r+3) = 0$$

따라서 $r = \frac{1}{2}$ 인데 ①을 만족시키는 s 의 값이 존재하지 않으므로 모순이다.

같은 방법으로 $a_1 < 0$ 인 경우도 존재하지 않는다.

(ii) $r < 0$ 인 경우

$a_1 > 0$ 이면 $a_2 < 0, a_3 > 0$ 이고 수열 $\{a_{2n}\}$ 의 공비는 r^2 , 수열 $\{a_{3n}\}$ 의 공비는 $-r^3$ 이므로

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 3 \times \frac{-a_2}{1-r^2}$$

$$7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = 7 \times \frac{a_3}{1+r^3}$$

$$\frac{-3a_2}{1-r^2} = \frac{7a_3}{1+r^3}, \quad \frac{-3}{1-r^2} = \frac{7r}{1+r^3}$$

$$4r^3 - 7r - 3 = 0$$

$$(r+1)(2r-3)(2r+1) = 0$$

따라서 $r = -\frac{1}{2}$ 이므로 ②에 대입하면

$$s = \frac{1}{4} \text{이다.}$$

$a_1 < 0$ 인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

$$b_n = b \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + b\left(\frac{1}{64}\right)^n}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \right\} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{16}} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{60} \\
&= \frac{27}{20}
\end{aligned}$$

따라서 $S = \frac{27}{20}$ 이므로

$$120S = 120 \times \frac{27}{20} = 162$$

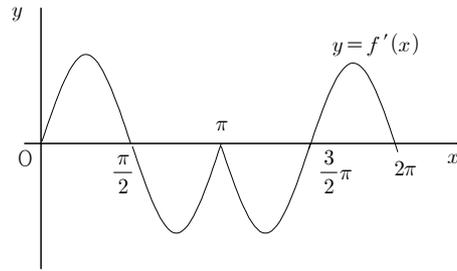
정답 162

30. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 극값을 갖는 x 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= |\sin x| \cos x \\
&= \begin{cases} \sin x \cos x & (\sin x \geq 0) \\ -\sin x \cos x & (\sin x < 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x & (\sin x \geq 0) \\ -\frac{1}{2} \sin 2x & (\sin x < 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

이때 함수 $y = \sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형을 $0 \leq x < 2\pi$ 에서만 그려보면 다음과 같다.



또한

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$$

에서

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

이므로 $h'(x) = 0$ 즉 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키면서 그 값의 좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y = \sin 2x$ 의 대칭성을 이용하여 양수 a 의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$$

이므로

$$a_6 = 2\pi, \quad a_2 = \frac{3}{4}\pi$$

따라서

$$\begin{aligned}
\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2) &= \frac{100}{\pi} \times \left(2\pi - \frac{3}{4}\pi\right) \\
&= 125
\end{aligned}$$

정답 125