2021학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-2교시)

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

2. 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

3. 곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $h(y)$가 닫힌구간 $[c,d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=h(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c, y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |h(y)|\,dy$$

4. 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때,

$D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖고, 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.

$D=0$이면 중근을 갖고, 중근을 가지면 $D=0$이다.

$D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

[1] 함수 $f(x)=\sin\pi x$와 $g(x)=\cos\pi x$에 대하여 전체집합 U의 두 부분집합 A, B를 다음과 같이 정의할 때, 물음에 답하시오.

$$U=\left\{x \mid x=\frac{n}{24},\ 0\le n\le 24\text{인 정수}\right\}$$
$$A=\{x \mid f(4x)=0,\ 0\le x\le 1\},\ B=\{x \mid g(6x)=0,\ 0\le x\le 1\}$$

(1) $A\cup B$과 $A\cap B$을 각각 구하시오. [5점]

(2) $A^C\cap B^C$의 원소의 개수를 구하시오.(단, A^C, B^C는 각각 U에 대한 집합 A, B의 여집합) [5점]

<다음 장 계속>

[2] 삼각형 ABC에 대하여 물음에 답하시오.

(1) A가 직각일 때, $\sin A+\sin B+\sin C$의 최댓값을 구하시오. [9점]

(2) 다음 식의 값을 구하시오. [9점]

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A-2\sin C\sin A\cos B-2\sin A\sin B\cos C$$

[3] 무리함수 $f(x)=\sqrt{-(x+1)}-1$과 함수 $g(x)=kx$에 대하여 물음에 답하시오. (단, k는 상수)

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,b), \mathrm{Q}(c,d)$를 지나는 직선에 수직인 직선의 기울기를 구하시오. (단, $b+d=1$, $a<c\le -1$) [5점]

(2) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나도록 하는 k의 범위를 구하시오. [8점]

(3) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=g(x)$, $y=x$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. [9점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

2. 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

[1] 다음 물음에 답하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5}({}_5\mathrm{C}_i)^2 = {}_p\mathrm{C}_q$일 때, p와 q의 합을 구하시오. (단, $p \ge q \ge 0$) [6점]

(2) 2021^{10}을 3으로 나눈 나머지와 7로 나눈 나머지를 각각 구하시오. [7점]

(3) (2)의 결과를 이용하여 2021^{10}을 21로 나눈 나머지를 구하시오. [9점]

[2] 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$의 함숫값은 다음과 같은 함수 $f(x)$의 값과 함수 $g(x)$의 값 중 크지 않은 값으로 정의한다.

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & (x \ge 0)\\ 3 & (x<0)\end{cases},\qquad g(x)=ax+1\ \ (a\text{는 상수})$$

예를 들어 $a=1$일 때 $f(3)=1,\ g(3)=4$이고 $f(3)<g(3)$이므로 $h(3)=1$이다. 물음에 답하시오.

(1) $a=0$일 때, 두 함수 $y=h(x)$와 $y=x^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [9점]

(2) 직선 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접할 때, 직선 $y=g(x)$의 기울기를 구하시오. [7점]

(3) 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점이 3개가 되도록 하는 a의 범위를 구하시오. [12점]

<끝>

2021학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-2교시1번]

출제 의도

[1] 집합의 개념을 이해하고 표현하는 능력과 집합의 연산을 할 수 있는 능력을 평가한다.
[2] 삼각함수의 뜻을 알고 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 함수의 극대와 극소를 설명할 수 있는지 평가한다.
[3] 무리함수를 이해하고 식을 변형하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하고 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
제시문4	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 1 집합
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 1 집합
	성취기준	[10수학03-03] 집합의 연산을 할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학] - (4) 함수 - 2 유리함수와 무리함수
	성취기준	[10수학04-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식- 5 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [3](3)	교육과정	[수학II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

*: 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	56, 66
	수학 Ⅰ	박교식 외	동아출판	2020	87, 90
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	184
	수학 Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020	86
기타					

문항 해설

[1] (1) 집합의 개념을 이해하고 두 집합의 합집합과 교집합을 구하는 문항이다.
(2) 집합의 연산을 하고 집합의 원소의 개수를 구하는 문항이다.
[2] (1) 사인함수와 코사인함수의 관계를 이용하고 함수의 극대를 구하는 문항이다.
(2) 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 식의 값을 구하는 문항이다.
[3] (1) 무리함수를 이해하고 주어진 직선과 수직인 직선의 기울기를 구하는 문항이다.
(2) 이차함수의 판별식을 활용하여 이차함수와 직선의 관계를 알아내는 문항이다.
(3) 곡선으로 주어진 영역과 넓이를 계산하는 문항이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	A와 B를 구했으면	2
	$A\cup B$와 $A\cap B$를 구했으면	3
[1](2)	$A^C\cap B^C$을 구하거나 $(A\cup B)^C$과의 관계를 표현했으면	2
	원소의 개수 16을 구했으면	3
[2](1)	$B+C=\frac{\pi}{2}$을 이용하여 $1+\sin B+\sqrt{1-\sin^2 B}$을 도출하였으면	3
	$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값을 가짐을 도출하였으면	3
	최댓값 $1+\sqrt{2}$를 구했으면	3
[2](1)	$\frac{1}{4R^2}(a^2+b^2+c^2-2bc\cos A-2ca\cos B-2ab\cos C)$을 얻었으면	5
	$\frac{1}{4R^2}(a^2+b^2+c^2+a^2-b^2-c^2+b^2-c^2-a^2+c^2-a^2-b^2)=0$을 얻었으면	4

하위 문항	채점 기준	배점
[3](1)	수직인 직선의 기울기의 식 $-\dfrac{c-a}{d-b}$을 얻고 $d-b\neq 0$ 임을 언급하였으면	2
	$-\dfrac{c-a}{d-b}=\dfrac{(d+1)^2-(b+1)^2}{d-b}=d+b+2=3$을 얻었으면	3
[3](2)	주어진 두 식을 연립하여 $k^2x^2+(2k+1)x+2=0$을 얻었으면	3
	$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\leq k\leq 1$을 구했으면	5
[3](3)	넓이를 정적분으로 표현하기 위한 위 끝과 아래 끝을 올바로 구했으면	3
	넓이를 정적분으로 올바로 표현하였으면	3
	$\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$을 구했으면	3

예시 답안

[1]

(1) $f(4x)=\sin 4\pi x=0$ 에서 $0\leq x\leq 1$이므로 $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1$ 이고,

$g(6x)=\cos 6\pi x=0$ 에서 $0\leq x\leq 1$이므로 $x=\frac{1}{12},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{3}{4},\ \frac{11}{12}$ 이다.

$A=\left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{12},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{3}{4},\ \frac{11}{12}\right\}$이므로 A와 B의 합집합과 교집합은 각각

$A\cup B=\left\{0,\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{12},\ \frac{3}{4},\ \frac{11}{12},\ 1\right\}$, $A\cap B=\left\{\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right\}$ 이다.

(2) 드 모르간의 법칙에 의하여 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고, $(A\cup B)^C=U-(A\cup B)$이다.

$n(U)=25$, $n(A\cup B)=9$이고 $n(U)=n(A\cup B)+n((A\cup B)^C)$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=25-9=16$

[2]

(1) $A=\frac{\pi}{2}$이므로, $B+C=\frac{\pi}{2}$이다.

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=1+\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\\&=1+\sin B+\cos B\\&=1+\sin B+\sqrt{1-\sin^2 B}\qquad \cdots\cdots\ ①\quad (\because \cos B>0)\end{aligned}$$

$\sin B=x\ (0<x<1)$라 하면

식 ①의 최댓값은 $f(x)=1+x+\sqrt{1-x^2}$ 의 최댓값이다.

$f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$으로부터 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

그러므로 $0 < x < 1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$ 이므로

식 ①의 최댓값은 $1 + \sqrt{2}$

(2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름을 R라고 할 때,

사인법칙으로부터 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ …… ②

문제에서 주어진 식에 ②를 대입하면 $\dfrac{1}{4R^2}(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2ca\cos B - 2ab\cos C)$

코사인법칙으로부터 주어진 식의 값은

$$\frac{1}{4R^2}(a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2 + b^2 - c^2 - a^2 + c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

[3]

(1) 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{d-b}{c-a}$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{c-a}{d-b}$

(여기서 $d - b \neq 0$인데 왜냐하면, 만약 $d = b$이라면 $\sqrt{-(c+1)} - 1 = \sqrt{-(a+1)} - 1$ 이므로 $c = a$가 되지만 문제의 조건에서 $a < c$라고 했기 때문이다.)

점 P, Q가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $(b+1)^2 = -(a+1)$이고 $(d+1)^2 = -(c+1)$

두 식의 차는 $(b+1)^2 - (d+1)^2 = c - a$ 이므로

$$-\frac{c-a}{d-b} = \frac{(d+1)^2 - (b+1)^2}{d-b} = d + b + 2 = 3$$

(2) 직선 $y = g(x)$가 $(-1, -1)$을 지날 때 $k = 1$

곡선 $y = \sqrt{-(x+1)} - 1$와 직선 $y = kx$가 접할 때

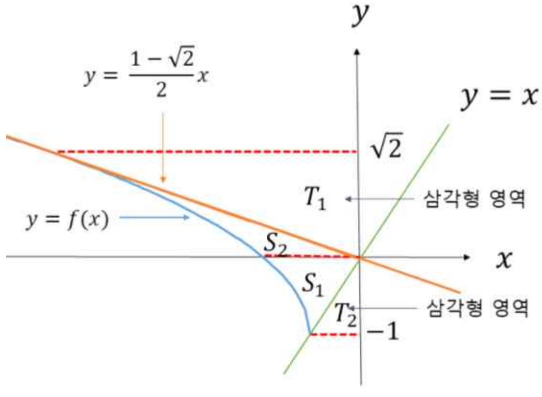
k값을 구하기 위하여 두 식을 연립하면 $kx + 1 = \sqrt{-(x+1)}$

양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식 꼴로 정리하면

$k^2x^2 + (2k+1)x + 2 = 0$ ……①

판별식 $D = (2k+1)^2 - 8k^2 = 0$으로부터

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$



오른쪽 그림과 같이 두 그래프가 만날 때 $k \leq 1$이므로

$$k = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

그러므로 구하는 k값의 범위는 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \leq k \leq 1$

⑶ $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 접할 때 $k=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$이고 식 ①의 판별식이 0이므로 접점의 x좌표는

$$x=\frac{-(2k+1)}{2k^2}=\frac{-(2-\sqrt{2})}{\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2}}=\frac{-2(2-\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}}=-2(2+\sqrt{2})$$

접점의 y좌표는 $y=kx=\sqrt{2}$

$y=f(x)=\sqrt{-(x+1)}-1$에서 x를 y에 대해 정리하면 $x=h(y)=-y^2-2y-2$

구하는 영역의 넓이 (위 그림의 S_1+S_2)는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=-1$, $y=\sqrt{2}$로 둘러싸인 영역의 넓이 S와 삼각형 영역의 넓이 T(위 그림의 T_1+T_2)의 차와 같다.

$$S=\int_{-1}^{\sqrt{2}}|h(y)|\,dy=\int_{-1}^{\sqrt{2}}(y^2+2y+2)\,dy=\left[\frac{y^3}{3}+y^2+2y\right]_{-1}^{\sqrt{2}}=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot 2(2+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{2}+2\sqrt{2}$$

$$S-T=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

2021학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-2교시2번]

출제 의도

[1] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.
[2] 주어진 조건을 만족하는 함수를 구하고 미분계수의 기하학적 의미를 이해하며 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취 기준
제시문1	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 2 이항정리
	성취기준	[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 2 이항정리
	성취기준	[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 2 이항정리
	성취기준	[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [1](3)	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 2 이항정리
	성취기준	[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식- 5 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [2]-(3)	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - 1 미분계수
	성취기준	[12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상	2020	22
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	185
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	66

문항 해설

[1] (1) 이항정리를 이용하여 이항계수들의 관계를 파악하는 문항이다.
(2) 이항정리를 이용하여 주어진 수의 나머지를 구하는 문항이다.
(3) 주어진 조건을 정리하여 주어진 수의 나머지를 구하는 문항이다.
[2] (1) 주어진 조건을 만족하는 함수를 찾고 곡선으로 주어진 영역과 넓이를 계산하는 문항이다.
(2) 이차함수의 판별식을 활용하여 이차함수와 직선의 관계를 알아내는 문항이다.
(3) 미분계수의 기하적 의미를 이해하고 조건을 만족하는 값의 범위를 구하는 문항이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	올바른 논리로 $\sum_{i=0}^{5}({}_5\mathrm{C}_i)^2 = {}_{10}\mathrm{C}_5$ 또는 $\sum_{i=0}^{5}({}_5\mathrm{C}_i)^2 = {}_{252}\mathrm{C}_1$ 또는 $\sum_{i=0}^{5}({}_5\mathrm{C}_i)^2 = {}_{252}\mathrm{C}_{251}$을 얻으면	3
	$p+q=15$ 또는 $p+q=253$ 또는 $p+q=503$을 얻으면	3
[1](2)	올바른 논리로 2021^{10}을 3으로 나눈 나머지가 1임을 보였으면	3
	올바른 논리로 2021^{10}을 7으로 나눈 나머지가 2임을 보였으면	4
[1](3)	올바른 논리로 (2)의 결과를 이용하고 있으면	4
	올바른 논리로 2021^{10}을 21로 나눈 나머지가 16임을 보였으면	5
[2](1)	$a=0$일 때, 함수 $h(x)$를 얻었으면	4
	$S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$을 구했으면	5
[2](2)	$D=(a+4)^2-12=a^2+8a+4=0$을 얻었으면	3
	$a=-4+2\sqrt{3}$을 얻었으면	4
[2](3)	$a\geq 0$일 때, $y=h(x)$가 미분가능하지 않은 점이 2개임을 보인 경우	3
	$a<-4+2\sqrt{3}$일 때, $y=h(x)$가 미분가능하지 않은 점이 1개임을 보인 경우	3
	$-4+2\sqrt{3}<a<0$일 때, $y=h(x)$가 미분가능하지 않은 점이 3개임을 보이면	6

7. 예시 답안

[1]

(1) $(1+x)^5(1+x)^5 = ({}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_5\mathrm{C}_5 x^5)({}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_5\mathrm{C}_5 x^5)$에서

x^5의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_0 \cdot {}_5\mathrm{C}_5 + {}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_5\mathrm{C}_5 \cdot {}_5\mathrm{C}_0$ …… ①

여기서 ${}_5\mathrm{C}_k = {}_5\mathrm{C}_{5-k}$ $(0 \le k \le 5$인 정수)이므로 식 ①을 다시 쓰면

$${}_5\mathrm{C}_0 \cdot {}_5\mathrm{C}_5 + {}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_5\mathrm{C}_5 \cdot {}_5\mathrm{C}_0 = \sum_{i=0}^{5} ({}_5\mathrm{C}_i)^2 \ \cdots\cdots \ ②$$

한편 $(1+x)^{10} = {}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10} x^{10}$에서 x^5의 계수는 ${}_{10}\mathrm{C}_5$ …… ③

$(1+x)^{10}$과 $(1+x)^5(1+x)^5$에서 x^5의 계수는 같다.

그러므로 ②와 ③으로부터

$$\sum_{i=0}^{5} ({}_5\mathrm{C}_i)^2 = {}_p\mathrm{C}_q = {}_{10}\mathrm{C}_5$$

또한 $\sum_{i=0}^{5} ({}_5\mathrm{C}_i)^2 = 252$에서 ${}_{252}\mathrm{C}_1 = 252$, ${}_{252}\mathrm{C}_{251} = 252$이므로

$p+q=15$ 또는 $p+q=253$ 또는 $p+q=503$

(2) $2021^{10} = (-1+3\cdot 674)^{10} = {}_{10}\mathrm{C}_0(-1)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_1(-1)^9 \cdot (3\cdot 674) + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10}(3\cdot 674)^{10}$이므로

2021^{10}을 3으로 나눈 나머지는 1

$2021^{10} = (-2+7\cdot 289)^{10} = {}_{10}\mathrm{C}_0(-2)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_1(-2)^9 \cdot (7\cdot 289) + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10}(7\cdot 289)^{10}$이므로

2021^{10}을 7로 나눈 나머지는 $(-2)^{10} = 1024$를 7로 나눈 나머지와 같다.

$1024 = 7 \cdot 146 + 2$이므로

2021^{10}을 7로 나눈 나머지는 2

(3) (2)로부터

$2021^{10} = 3a+1$ (a는 정수)

$2021^{10} = 7b+2$ (b는 정수)

위의 두 식으로부터 $7b = 2021^{10} - 2 = (3a+1) - 2 = 3(a-1)+2$ …… ④

여기서 b를 3으로 나눈 나머지는 0, 1, 2중 하나이다.

나머지가 0인 경우, 식 ④의 좌변과 우변을 3으로 나눈 나머지가 일치하지 않는다.

나머지가 1인 경우 $7(3c+1) = 3(7c+2)+1$ (c는 정수)이므로 식 ④의 좌변과 우변을 3으로 나눈 나머지가 일치하지 않는다.

그러므로 b를 3으로 나눈 나머지는 2이다. 즉, $b = 3d+2$ (d는 정수)

식 ④로부터 $2021^{10} = 7b+2 = 7(3d+2)+2 = 21d+16$

그러므로 2021^{10}을 21로 나눈 나머지는 16

[2]

⑴ $a=0$일 때, $g(x)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 구하자.

$x<0$에서는 $f(x)=3>1$이고, $x\geq 0$에서는 $(x-2)^2=1$이므로 구하는 $x=1,3$이다.

함수 $h(x)$의 정의로부터 $h(x)=\begin{cases} 1 & (x<1) \\ (x-2)^2 & (1\leq x\leq 3) \\ 1 & (x>3) \end{cases}$

두 함수 $y=x^2$과 $y=h(x)$의 그래프의 교점을 구하면 $x\leq 1$에서 $x^2=1$이므로 $x=-1,1$이다.

구하는 넓이를 S라 하면 $S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$이다.

⑵ 직선 $y=ax+1$이 곡선 $y=f(x)$와 접하는 경우는 $x\geq 0$에서 곡선 $y=(x-2)^2$과 접하는 경우이다.

$x^2-(a+4)x+3=0$으로부터 $D=(a+4)^2-12=a^2+8a+4=0$이고 $a=-4\pm 2\sqrt{3}$를 얻는다.

$a=-4-2\sqrt{3}$일 때는 $y=g(x)$와 곡선 $y=(x-2)^2$이 $x<0$에서 접하는 경우이므로 제외한다.

따라서 $a=-4+2\sqrt{3}$이다.

⑶ 함수 $h(x)$를 이루는 두 함수에 대해, $f(x)$는 0을 제외한 모든 실수에서, $g(x)$는 모든 실수에서 미분가능하므로, 함수 $h(x)$의 미분가능하지 않은 점은 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점일 수 있다.
두 함수 $y=g(x)$와 $y=f(x)$가 접하는 범위는 $x\geq 0$이다. 그때의 기울기는 (2)로부터 $a=-4+2\sqrt{3}$이다.

(i) $a\geq 0$인 경우

$x<0$에서 두 함수 $y=g(x)$와 $y=f(x)=3$은 교점이 없다.

$x\geq 0$에서 두 함수 $y=g(x)$와 $y=f(x)=(x-2)^2$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 접하지 않으므로 그 두 점에서 기울기는 서로 다르다. 즉, 좌우 미분계수가 일치하지 않으므로 $y=h(x)$는 2개의 교점에서 미분가능하지 않다.

(ii) $-4+2\sqrt{3}<a<0$인 경우

함수 $y=g(x)$는 $x<0$에서 직선 $y=f(x)=3$과 한 점에서 만나며, $x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)=(x-2)^2$과 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 $y=h(x)$가 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

(iii) $a<-4+2\sqrt{3}$인 경우

함수 $y=g(x)$는 $x<0$에서 직선 $y=f(x)=3$과 한 점에서 만나며, $x\geq 0$에서 함수 $y=f(x)=(x-2)^2$과는 만나지 않는다. 따라서 $y=h(x)$가 미분가능하지 않은 점은 1개이다.

(i), (ii), (iii)으로부터 함수 $y=h(x)$가 미분가능하지 않은 점이 3개가 되게 하는 a의 범위는
$-4+2\sqrt{3}<a<0$이다.