

제2교시

수학 영역(가형)



5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(1, 3)$, $\vec{b}=(-1, 1)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은?
[2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. 함수 $f(x)=e^{3x-2}$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ e ④ $3e$ ⑤ $3e^2$

3. $\int_0^\pi (\cos x + 2\sin x) dx$ 의 값은? [2점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

4. 서로 독립인 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = \frac{5}{8}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. $\cos \theta = \frac{2}{3}$ 일 때, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [3점]

- ① $\frac{\sqrt{10}+2}{12}$ ② $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{6}$
 ④ $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{4}$

7. 매개변수 $t(t > 0)$ 로 나타내어진 곡선

$$x = t^2 + 2t, \quad y = t^3 - \ln t$$

위의 $t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

6. 같은 종류의 꽃 9송이를 같은 종류의 꽃병 3개에 빈 꽃병이 없도록 나누어 꽂는 경우의 수는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

8. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 두 함수 $f(x) = \sin x$ 와 $g(x) = -\cos x + t$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, $h(0) + h(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 변광성의 한 종류인 고전 세페이드 변광성의 변광주기를 P , 광도를 M 이라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

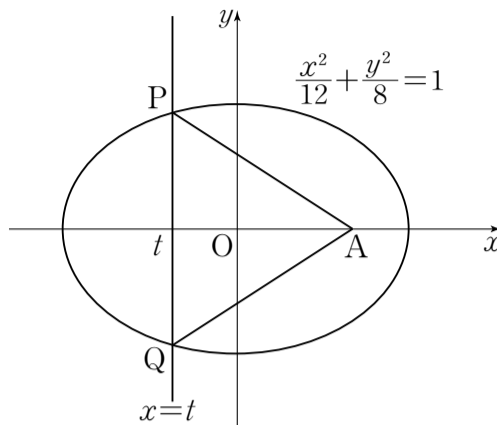
$$M = -2.81 \log P - 1.43$$

변광주기가 P_1 인 고전 세페이드 변광성의 광도를 M_1 , 변광주기가 P_2 인 고전 세페이드 변광성의 광도를 M_2 라 할 때,

$M_2 - M_1 = 5.62$ 이다. $\frac{P_1}{P_2}$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{10}$ ② 10 ③ $10\sqrt{10}$
 ④ 100 ⑤ $100\sqrt{10}$

10. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 과 직선 $x = t (t \neq 2)$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 A(2, 0)에 대하여 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최댓값은? [3점]



- ① $6\sqrt{3}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ $12\sqrt{2}$

11. 정의역이 $X=\{1, 2, 3\}$, 공역이 $Y=\{1, 2, 4, 8\}$ 인 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$ 라 할 때, $f(1) \times f(2) = f(3)$ 이 성립할 확률은? [3점]

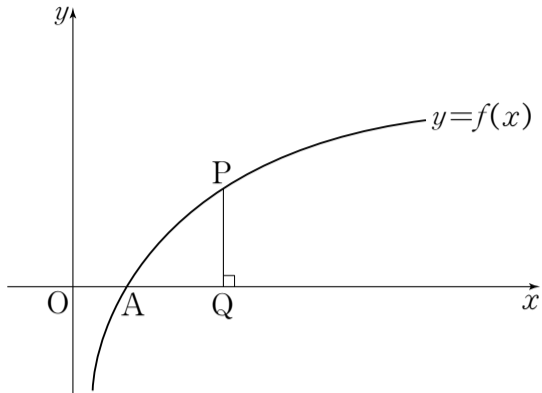
- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{5}{32}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

12. 직선 $x+2y+1=0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)$ 의 값은?

(단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) [3점]

- ① $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

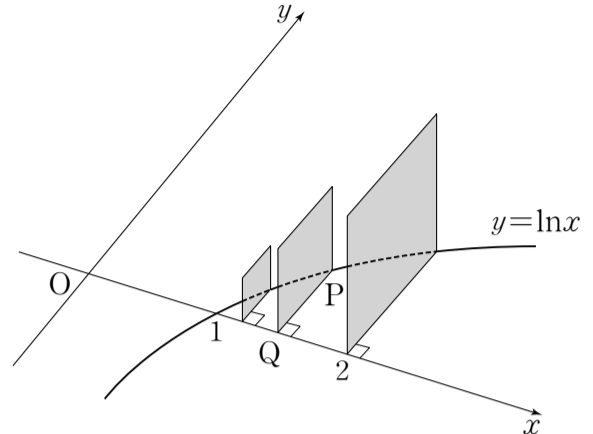
[13~14] 함수 $f(x)=\log_a x(a>1)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 A라 하고, 이 곡선 위의 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, 점 P는 제1사분면에 있다.)



13. 점 P의 y 좌표가 2이고 $\overline{AQ}=\overline{PQ}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

14. $a=e$ 일 때, 그림과 같이 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형을 x 축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x 좌표가 $x=1$ 에서 $x=2$ 까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는? [4점]



- ① $(\ln 2-1)^2$ ② $2(\ln 2-1)^2$ ③ $(\ln 2+1)^2$
 ④ $4(\ln 2-1)^2$ ⑤ $2(\ln 2+1)^2$

15. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 역함수가 존재한다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x^2) - 1}{x - 3} = 3$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

16. 다음은 2 이상인 두 자연수 n, r 에 대하여 등식

$${}_n H_r = \boxed{(가)} H_r + {}_n H_{r-1}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

$1 \leq k < m$ 을 만족시키는 두 자연수 m, k 에 대하여

$${}_m C_k = {}_{m-1} C_k + {}_{m-1} C_{k-1}$$

이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & {}_{m-1} C_k + {}_{m-1} C_{k-1} \\ &= \frac{(m-1)!}{(m-k-1)!k!} + \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{(m-1)!(m-k) + (m-1)! \times \boxed{(나)}}{(m-k)!k!} \\ &= \frac{m!}{(m-k)!k!} = {}_m C_k \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} {}_n H_r &= {}_{n+r-1} C_r \\ &= {}_{n+r-2} C_r + {}_{n+r-2} C_{r-1} \\ &= \boxed{(가)} H_r + {}_n H_{r-1} \end{aligned}$$

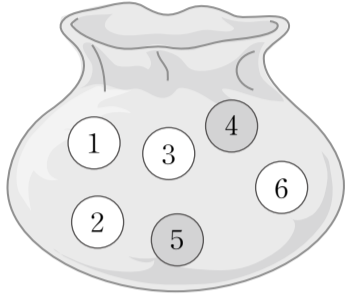
이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(k)$ 라 할 때, $f(10) + g(10)$ 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

17. 주머니에 1, 2, 3, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 흰 구슬 4개와 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 검은 구슬 2개가 들어있다. 이 주머니에서 임의로 동시에 꺼낸 2개의 구슬의 색이 서로 달랐을 때, 꺼낸 2개의 구슬에 적힌 수의 곱이 짝수일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



18. 좌표평면 위의 점 $A(2, a)$ 와 벡터 $\vec{u}=(3, 1)$ 에 대하여 점 P가

$$\vec{OP}=\vec{OA}+t\vec{u} \quad (t \text{는 실수})$$

를 만족시킨다. 점 P가 나타내는 직선과 직선 OA가 이루는 예각의 크기가 60° 가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

19. 1부터 9까지 9개의 자연수를 일렬로 나열하려고 한다. k 번째 나열된 수를 a_k 라 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수는? (단, $k=1, 2, 3, \dots, 9$) [4점]

(가) $a_1 > a_4 > a_7$

(나) $a_2 < a_5 < a_8$

(다) $a_3 > a_6 > a_9$

- ① 1600 ② 1620 ③ 1640
 ④ 1660 ⑤ 1680

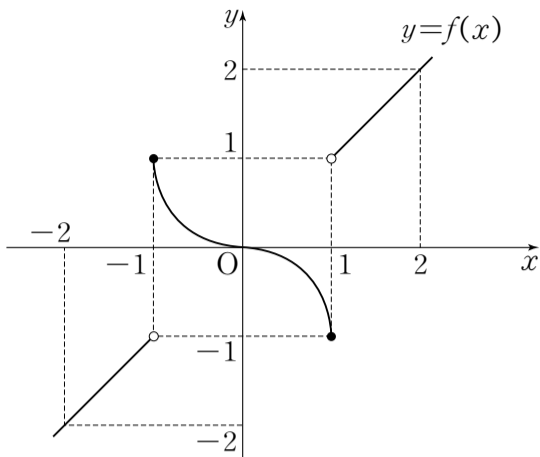
20. 함수 $f(x) = xe^{x^2-1}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$$

의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ ② $1 - \frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right)$
 ④ $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ ⑤ $1 + \frac{1}{e}$

21. 열린 구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (f \circ f)(x)$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $f(0)=0$ 이고, $-1 < x < 0$ 에서 $f''(x) > 0$, $0 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$ 이다.) [4점]

<보 기>

- ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
- ㄴ. 방정식 $g'(x)=1$ 을 만족시키는 실수 x 가 열린 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 2개 존재한다.
- ㄷ. 함수 $g(x)$ 의 그래프는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 아래로 볼록하다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 곡선 $y = \frac{1}{x^2} + 6$ 위의 점 $(-1, 7)$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

23. 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$ 라 하자. $f(2)=9$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

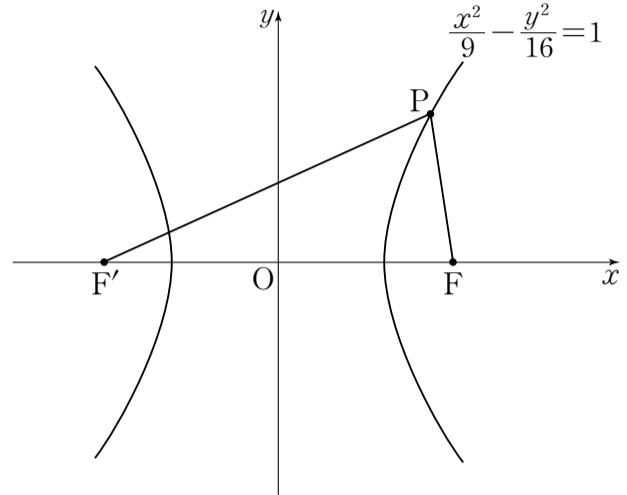
24. 부등식

$$(\log_3 x)(\log_3 9x) < 24$$

를 만족시키는 정수 x 의 최댓값을 구하시오. [3점]

25. $1 \leq x \leq 3$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ 의 길이가 a 일 때, $6a$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P 에 대하여 세 선분 PF, FF', PF' 의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\overline{PF} \times \overline{PF}'$ 의 값을 구하시오. (단, 점 P 는 제1사분면에 있는 점이고, 점 F 의 x 좌표는 점 F' 의 x 좌표보다 크다.) [4점]



27. 넓이가 60인 삼각형 ABC에 대하여 점 P가

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

을 만족시킬 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오. [4점]

28. k 가 음의 상수일 때, 함수 $f(x) = \frac{3}{x} + k (x > 0)$ 에 대하여

함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = mx + \int_1^x |f(t)| dt \quad (x > 0)$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 실수

m 의 최댓값이 -3 일 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]

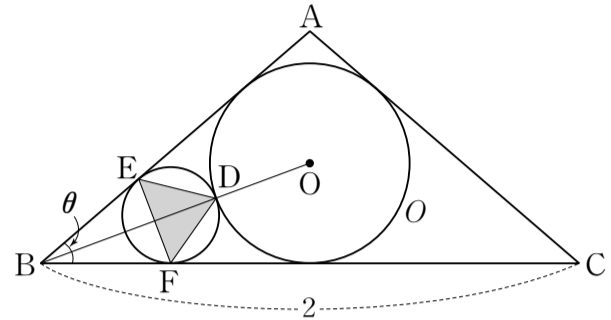
29. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5장의 카드에서 한 번에 한 장씩 임의로 2장의 카드를 차례대로 뽑았을 때, 각 카드에 적힌 수를 뽑힌 순서대로 a, b 라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$5^{2x} \geq 2(a-1)5^x - b - 4$$

가 항상 성립할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, 한 번 뽑은 카드는 다시 되돌려놓지 않는다.) [4점]

30. 그림과 같이 $\angle B = \angle C = \theta$, $\overline{BC} = 2$ 인 이등변삼각형 ABC 에 내접하는 원을 O 라 하고, 원 O 의 중심을 O 라 하자. 선분 BO 와 원 O 가 만나는 점을 D 라 할 때, 두 선분 AB, BC 에 동시에 접하고 점 D 를 지나는 원 O 가 아닌 원이 두 선분 AB, BC 에 접하는 점을 각각 E, F 라 하자. 삼각형 DEF 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $100 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값을 구하시오. [4점]



♣ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.