제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

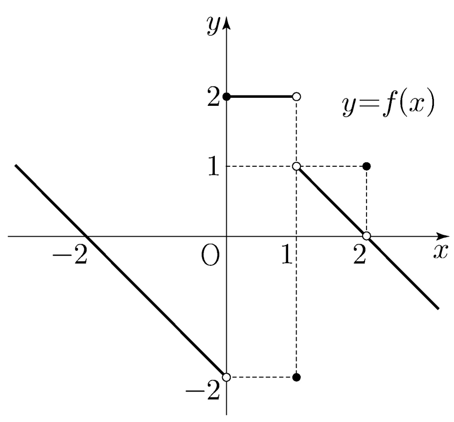
2. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
>
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

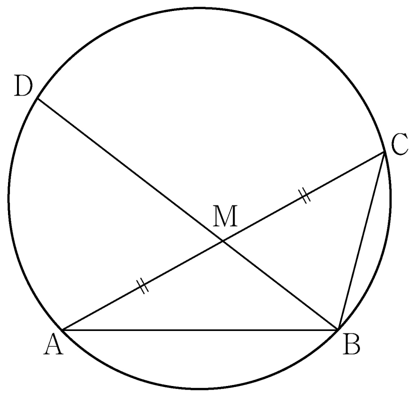
가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

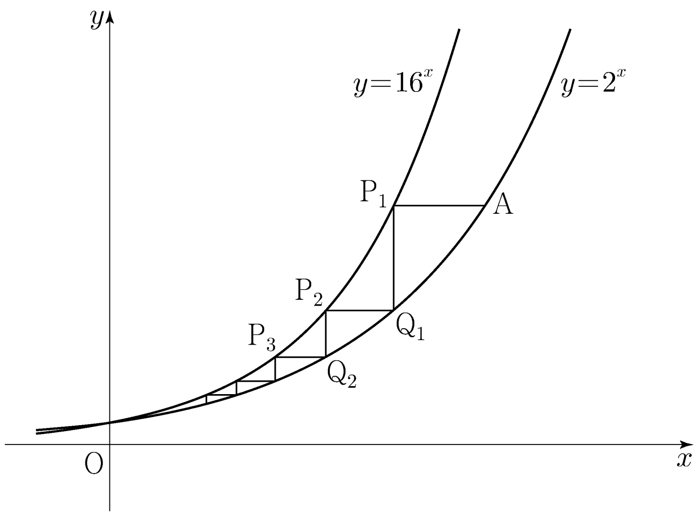
12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\left|a_{k+6}\right| = 6+\sum_{k=1}^{6}\left|a_{2k}\right|$

① $\dfrac{21}{2}$ ② 11 ③ $\dfrac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\dfrac{25}{2}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2 < f(1) < 4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 <u>존재하지 않는</u> 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

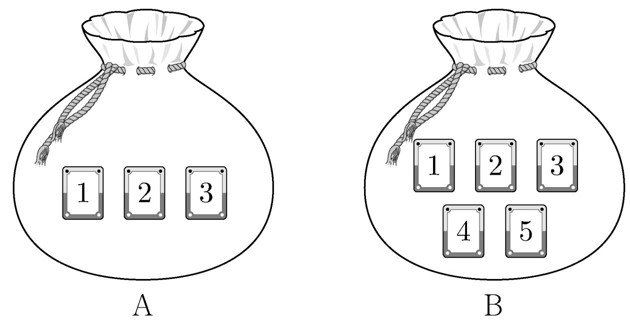
5지선다형

23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16　② 20　③ 24　④ 28　⑤ 32

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{7}{15}$　④ $\frac{8}{15}$　⑤ $\frac{3}{5}$



25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
>
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$

(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \ge 5$일 때, $c-a \ge 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

24. 곡선 $x^2 - y\ln x + x = e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

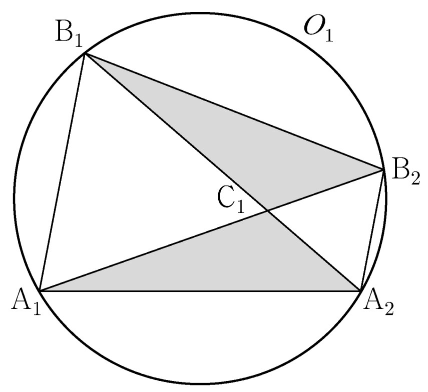
① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

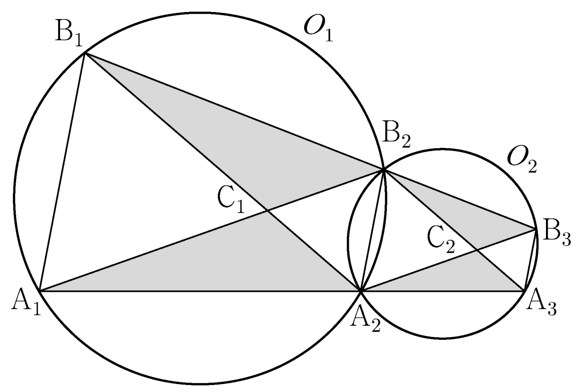
① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$, $\overline{\mathrm{B_1A_2}}=3$이고 $\angle \mathrm{A_1B_1A_2}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{B_1A_2}$가 만나는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 할 때, 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2C_1}$, $\mathrm{B_1C_1B_2}$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{B_1A_2}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{A_1A_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{A_3}$이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A_2A_3B_2}$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_2}$를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

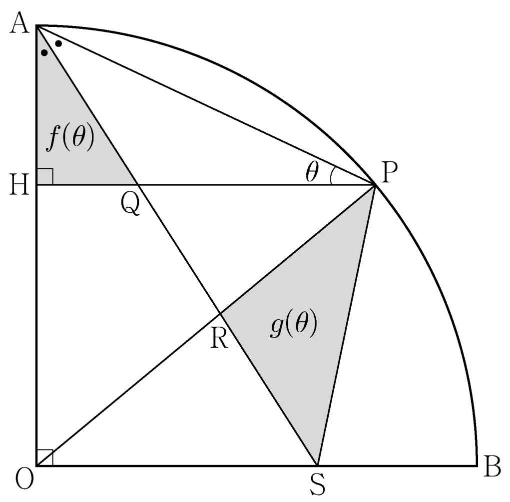
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.

(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \text{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5) + \lim_{t \to 5} g(t) = 5$일 때, $\lim_{t \to k-} g(t) \neq \lim_{t \to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 직선

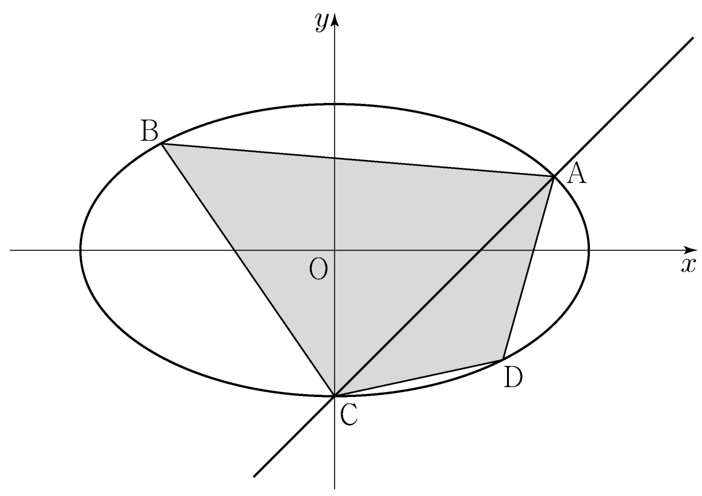
$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

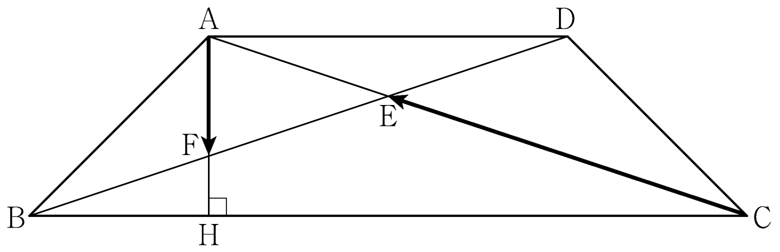
26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



27. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45°$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$

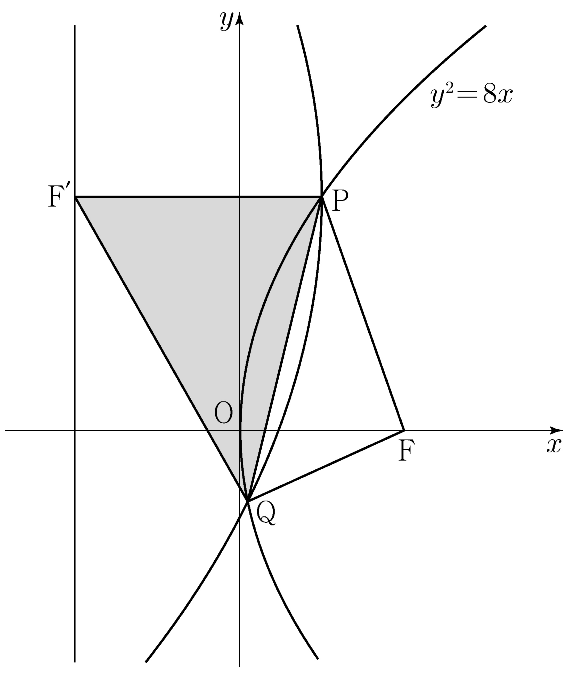


28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 A$(c, 0)$, B$(-c, 0)$ $(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3, 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

단답형

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

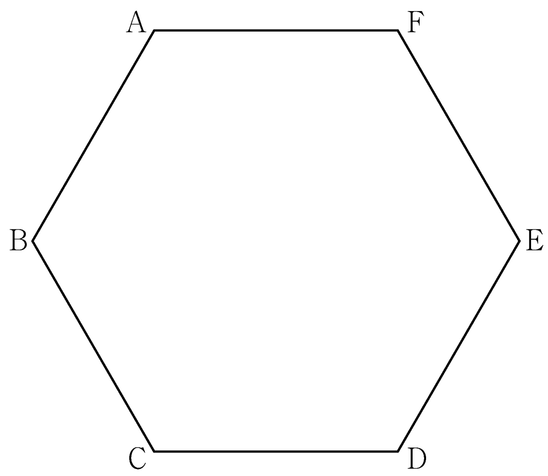


30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$

(나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]

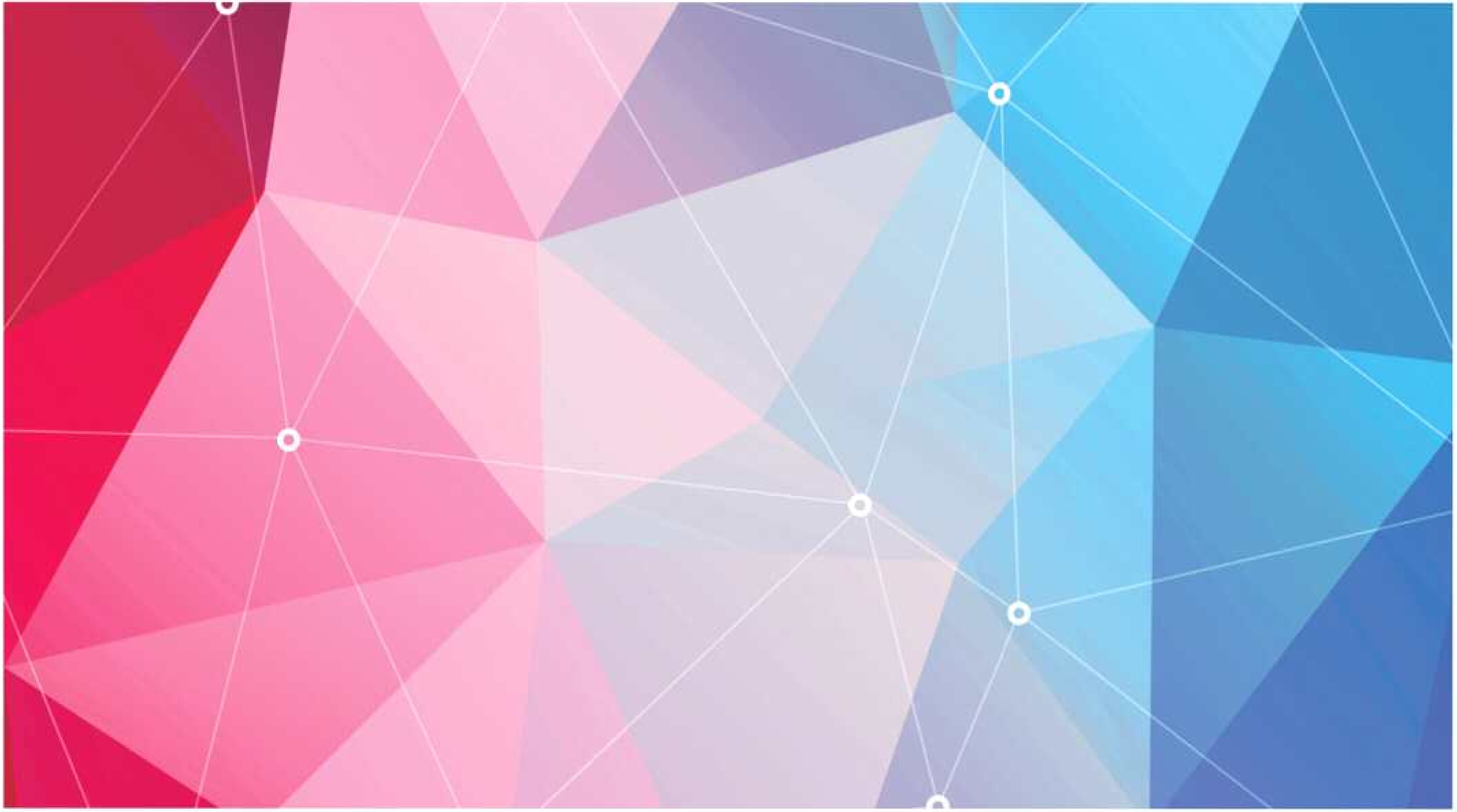


* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

수학 전문가 그룹 N.G.D

2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 해설



2023년도
6월 모평

수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

R a y - 세종나성동 - 4차원수학 - ☎ 010.8449.1974
강 혁 - 서울대치 - 모아시스 - ☎ 010.3790.1715
고동섭 - 인천연수 - 정훈수학 - ☎ 010.7210.1713
구수관 - 경기화성 - M&SAcademy - ☎ 010.4560.1252
권준환 - 경기용인 - 와이솔루션 - ☎ 010.8973.0438
김광현 - 인천송도 - 선행과심화수학학원 - ☎ 010.4215.3265
김군용 - 경기남양주 - 매쓰메카수학 - ☎ 010.7142.9927
김미선 - 경기분당 - 에이블매쓰 - ☎ 010.3056.5452
김상운 - 대구범어 - 진솔수학 - ☎ 010.3473.8797
김성민 - 충남천안 - GoMSLab.수학 - ☎ 010.6315.3720
김영민 - 서울서초 - 다온수학 - ☎ 02.532.6650
김영태 - 대구수성 - 가인수학 - ☎ 010.5307.2638
김지선 - 서울반포 - 에프엑스수학 - ☎ 02.594.4888
김태현 - 서울대치 - 미투스카이 - ☎ 010.4953.1211
김태현 - 서울송파 - 고스에듀수학 - ☎ 010.4114.0714
김하늘 - 서울대치 - 역경패도수학전문 - ☎ 02.566.7854
김호영 - 서울노량진 - 미래영재 - ☎ 010.3125.1141
남기석 - 성남위례 - 더착한수학 - ☎ 010.2771.3822
남성현 - 경기안양평촌 - 김통영해병수학 - ☎ 010.3886.6642
문보나 - 인천송도 - MOON'Tonepick - ☎ 010.4141.6848
박기태 - 부산동래 - 프리미엄수학 - ☎ 010.8878.4254
박연배 - 경기고양 - 대수학중심학원 - ☎ 031.994.5250
박영우 - 서울목동 - 미래탐구(오목관) - ☎ 010.6758.1796
박원식 - 서울중계 - 수아인수학 - ☎ 010.9472.7526
박정균 - 하당교연학원 - ☎ 010.7370.7719
박정수 - 서울대치 - 개념상상&해를학원 - ☎ 010.9043.8353
박준석 - 서울대치 - 대치해냄 - ☎ 010.8644.1080
박현철 - 서울마포 - 시그마식스수학학원 - ☎ 02.322.4786
박효선 - 경기분당 - 백산교육대찬수학 - ☎ 010.9750.2600
배용제 - 대전 - 엘엔케이한울학원 - ☎ 010.2626.2280
서민국 - 서울대치 - 대치시대인재 - ☎ 010.8346.7440
송동일 - 서울대치 - 미래탐구대치 - ☎ 010.9368.4406
신혜영 - 경기분당 - 신혜영수학 - ☎ 031.8039.7825
오창용 - 경기광명 - 시스템수학학원 - ☎ 02.898.0982
이경덕 - 부산동래 - 수학으로물들어가다 - ☎ 051.924.2358
이광희 - 서울대치 - 메이드학원 - ☎ 010.4134.7134
이기섭 - 서울강남 - 다른수학 - ☎ 010.9080.3864
이성우 - 서울강남 - 러셀 - ☎ 010.2525.9876
이정빈 - 서울강서 - allpass청산 - ☎ 010.5764.0917
이정환 - 경기분당 - 수학의아침.분당청솔 - ☎ 010.3266.3884
이종환 - 서울마포 - 카이수학전문학원 - ☎ 02.706.6173
이창석 - 서울송파 - 핵수학전문학원 - ☎ 010.9432.0003
이호연 - 서울대치 - 이치옥수학 - ☎ 010.2110.9571
임준홍 - 서울대치 - SNT학원 - ☎ 010.6538.9914
임혜민 - 서울중계 - 싸인매쓰 - ☎ 02.931.3748
장석원 - 서울목동 - 미래탐구목동관 - ☎ 010.4744.2481
전종현 - 서울대치 - 강안교육 - ☎ 010.4125.7715
정다움 - 서울서초 - 러셀강남&정다움수학학원 - ☎ 02.2209.9981
정은민 - 서울목동 - 작살수학 - ☎ 010.7463.2302
정은혁 - 부천옥길 - 퀸즈아카데미 - ☎ 010.7311.0710
정하윤 - 서울중계 - 랑수학 - ☎ 010.3278.3420
조인상 - 경기성남 - 이소프학원 - ☎ 010.5294.9645
조현탁 - 서울중계 - 전문가집단 - ☎ 010.4439.1633
지요한 - 부산사직 - 트리플수학 - ☎ 010.9074.5658
최성훈 - 전주인후 - 최성훈수학 - ☎ 010.2680.5281
최승인 - 서울마포 - 종로학원 - ☎ 010.3787.7779
한연호 - 서울서초 - 상운학원 - ☎ 02.3474.9452
황완수 - 경기안양 - 황선생수학 - ☎ 010.5549.1138

2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 공통									
1	①	2	②	3	④	4	②	5	③
6	⑤	7	④	8	③	9	⑤	10	③
11	⑤	12	③	13	①	14	④	15	②
16	6	17	15	18	3	19	2	20	13
21	426	22	19						

2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 확통									
23	②	24	①	25	④	26	②	27	③
28	④	29	115	30	9				

2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 미적분									
23	①	24	①	25	②	26	②	27	③
28	⑤	29	50	30	16				

2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 기하									
23	③	24	②	25	②	26	⑤	27	④
28	①	29	23	30	8				

<2023학년도 6월 평가원 수학(공통)>

1) 정답 ①

문제 해설

$(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}} = 2^2 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{2+3\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = 2^0 = 1$

2) 정답 ②

문제 해설

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(2) = 12$

3) 정답 ④

문제 해설

$\cos^2\theta = \frac{4}{9}$에서 $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ $\left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

또, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서 $\sin^2\theta = \frac{5}{9}$

$\therefore \sin^2\theta + \cos\theta = \frac{5}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}$

4) 정답 ②

문제 해설

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = -2+1 = -1$

5) 정답 ③

문제 해설

$a_1 = \frac{1}{4}$이므로 공비를 r이라 하면

$a_2 + a_3 = \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{2}$

$r^2 + r - 6 = 0$

$(r+3)(r-2) = 0$

모든 항이 양수이므로 $r=2$이다. 그러므로

$a_6 + a_7 = \frac{1}{4} \times 2^5 + \frac{1}{4} \times 2^6 = 24$

6) 정답 ⑤

문제 해설

$\lim_{x \to -1-} |f(x)| = |-1+a|$이고 $|f(-1)| = \lim_{x \to -1+} |f(x)| = 1$이므로

$|-1+a| = 1$에서 $a=2$ $(\because a>0)$

$\lim_{x \to 3-} |f(x)| = 3$이고 $|f(3)| = \lim_{x \to 3+} |f(x)| = |3b-2|$이므로

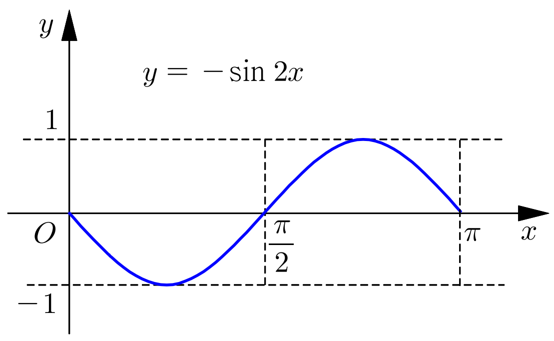
$|3b-2| = 3$에서 $b = \frac{5}{3}$ $(\because b>0)$

$\therefore a+b = \frac{11}{3}$

7) 정답 ④

문제 해설

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$의 주기는 π이고 그래프는 다음과 같다.



$2x = \frac{3}{2}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$에서 최댓값을 가지므로 $a = \frac{3}{4}\pi$,

$2x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$에서 최솟값을 가지므로 $b = \frac{\pi}{4}$이다.

따라서 두 점은 각각 $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$이다.

두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-1}{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{\pi}$이다.

8) 정답 ③

문제 해설

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 연속함수이다.
$1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이므로
$f(x)$는 증가함수다.
$1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 기울기의 최솟값을 5라 했을 때
x가 4만큼 증가할 때, y는 20만큼 증가한다.
따라서 $f(5)$의 최솟값은 $20+3=23$이다.

9) 정답 ⑤

문제 해설

$f(x)\geq g(x)$

$x^3-x+6\geq x^2+a$

$x^3-x^2-x\geq a-6$

$h(x)=x^3-x^2-x$라고 설정하자.

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$x\geq 0$의 범위에서 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 $h(1)\geq a-6$ 이면 주어진 부등식을 만족한다.

$h(1)=1-1-1=-1\geq a-6$

$\therefore\ a\leq 5$

10) 정답 ③

문제 해설

$\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면, 코사인법칙에 의해

$$2^2=3^2+x^2-2\times3\times x\times\frac{7}{8}$$

$$4x^2-21x+20=0 \qquad (x-4)(4x-5)=0$$

$$\therefore\ x=4\ (\because\ x>3)$$

이때, 점 M이 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CM}}=2$이다.

$\triangle$ABC에서 삼각형의 중선 정리에 의해

$$2^2+3^2=2\times(2^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BM}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{DM}}\times\overline{\mathrm{BM}}$$

$$2\times2=\overline{\mathrm{DM}}\times\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{DM}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

11) 정답 ⑤

문제 해설

점 P의 시각 $t=a$에서의 위치는

$$\int_0^a v_1(t)dt=\int_0^a(2-t)dt=\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_0^a=2a-\frac{a^2}{2}$$

원점으로 돌아오는 시각에서 위치가 0이므로

$2a-\dfrac{a^2}{2}=0,\ a=4$

점 Q가 시각 $t=b$까지 움직인 거리는

$$\int_0^b|v_2(t)|dt=\int_0^b|3t|dt=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^b=\frac{3}{2}b^2$$

4초까지 움직인 거리는 $b=4$일 때

$\dfrac{3}{2}\times4^2=24$

12) 정답 ③

문제 해설 수열 $\{a_n\}$의 초항을 a라고 하자.

조건 (가)에서 $(a+12)(a+18)<0,\ -18<a<-12$

$$\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=|a_7|+|a_8|+|a_9|+|a_{10}|+|a_{11}|+|a_{12}|$$

$$6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$$

$|a_7|+|a_9|+|a_{11}|=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|$

$|a+18|+|a+24|+|a+30|=6+|a+3|+|a+9|+|a+15|$

조건 (가)에서 $a+18>0,\ a+24>0,\ a+30>0,\ a+3<0,\ a+9<0$

(ⅰ) $-18<a<-15$일 때

$a+15<0$이므로

$(a+18)+(a+24)+(a+30)=6-(a+3)-(a+9)-(a+15)$

$6a=-93,\ a=-\dfrac{31}{2}$

(ⅱ) $a=-15$일 때, 만족하는 값이 나올 수 없다.

(ⅲ) $-15<a<-12$일 때

$a+15>0$이므로

$(a+18)+(a+24)+(a+30)=6-(a+3)-(a+9)+(a+15)$

$4a=-69,\ a=-\dfrac{69}{4}$, 주어진 범위를 만족하지 않는다.

따라서 $a=-\dfrac{31}{2}$이고 $a_n=-\dfrac{31}{2}+(n-1)3$

$\therefore\ a_{10}=-\dfrac{31}{2}+27=\dfrac{23}{2}$

13) 정답 ①

문제 해설

A$(64,\ 2^{64})$에서 x축에 평행하게 $y=16^x$과 만나는 점인 P_1의 좌표는 $\mathrm{P}_1(16,\ 2^{64})$이고 y축에 평행하게 내린 Q_1의 좌표는 $\mathrm{Q}_1(16,\ 2^{16})$이다.

이와 같은 방식으로 유추해 나가면 Q_1의 x좌표인 x_n은 초항이 16이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다.

이 때, $x_5=\dfrac{1}{16},\ x_6=\dfrac{1}{64}$이므로, $x_n<\dfrac{1}{k}$ 를 만족하는 n의 최솟값이 6이 되기 위해서는 자연수 k가 $\dfrac{1}{64}<\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{16}$을 만족해야만 한다.

따라서 가능한 k값의 범위는 $16\leq k<64$ 이고, k값의 개수는 48개 이다.

14) 정답 ④

문제 해설

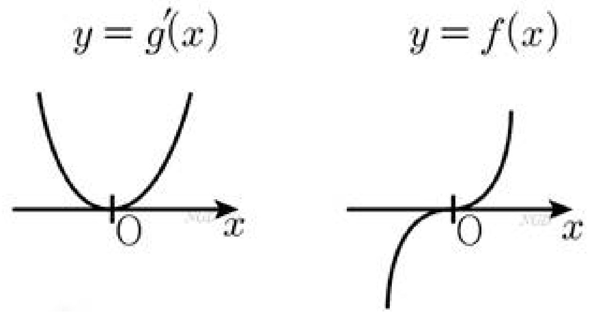
ㄱ. $g'(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, $x=0$에서 연속이다. 또, $f(x)$도 $x=0$에서 연속이므로

$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$에서 $f(0)=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $f(0)=g'(0)=0$이므로 $g'(x)=3x^2-ax$로 놓으면

(ⅰ) $a=0$일 때

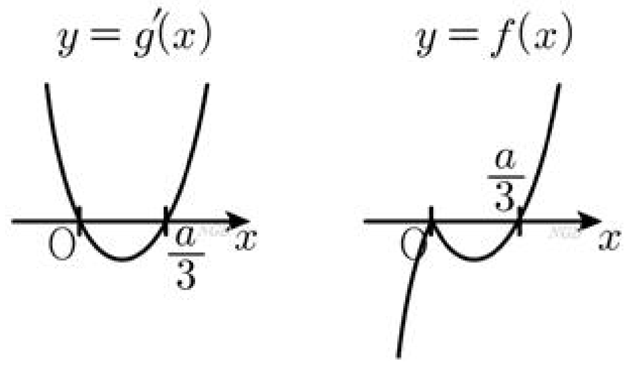
$y=g'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$는 모든 실수에서 증가하므로 극댓값을 갖지 않는다.

(ⅱ) $a>0$일 때

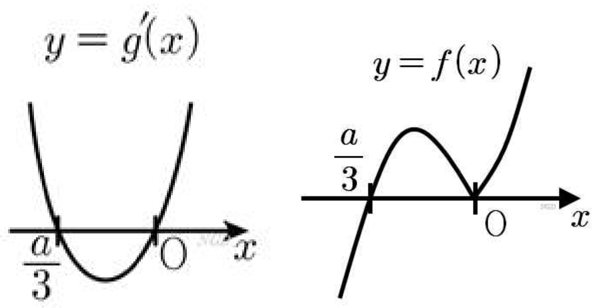
$y=g'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

(ⅲ) $a<0$일 때

$y=g'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$는 $x=\frac{a}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $f(x)$는 $a=0$일 때 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$, $g'(x)=3x^2-ax$에서

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+ax & (x<0)\\ 3x^2-ax & (x\geq 0)\end{cases}$

$f(1)=3-a$이므로 $2<3-a<4$에서 $-1<a<1$

$f(x)-x=\begin{cases}-3x^2+(a-1)x & (x<0)\\ 3x^2-(a+1)x & (x\geq 0)\end{cases}$

이므로 $f(x)-x=0$에서

(ⅰ) $-3x^2+(a-1)x=0$일 때

$x=0$ 또는 $x=\frac{a-1}{3}$ $(x<0)$

이때, $-2<a-1<0$이므로 $\frac{a-1}{3}<0$이다.

(ⅱ) $3x^2-(a+1)x=0$일 때

$x=0$ 또는 $x=\frac{a+1}{3}$

이때, $0<a+1<2$이므로 $\frac{a+1}{3}>0$이다.

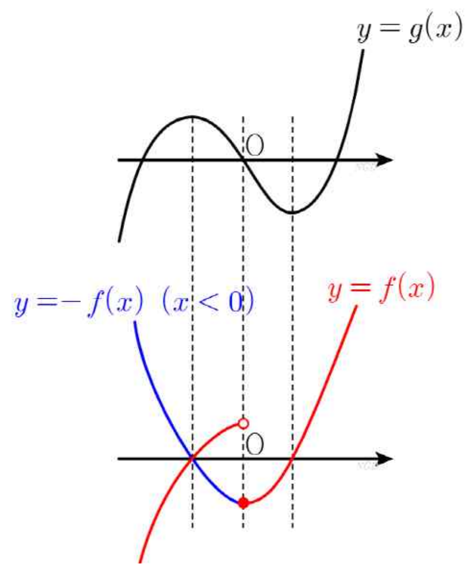
(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=f(x)$와 $y=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

다른풀이

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $g(0)=0$이다.

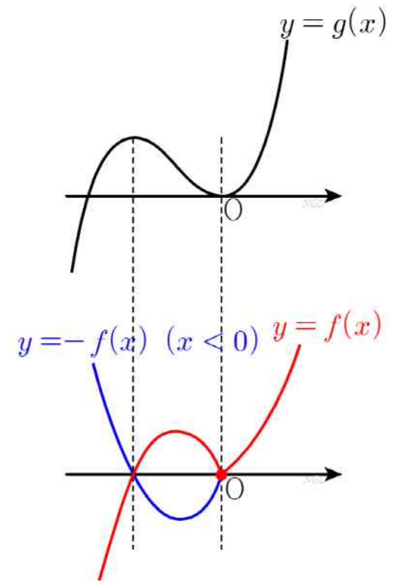
(ⅰ) $y=g(x)$가 x축과 세 점에서 만나는 경우



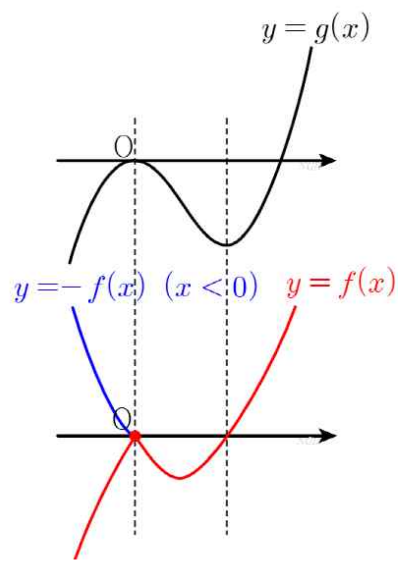
[그림1]

그림과 같이 $y=f(x)$가 연속함수가 아니므로 주어진 조건에 맞지 않다.

(ⅱ) $y=g(x)$가 x축과 접하는 경우 (두 점에서 만나는 경우)



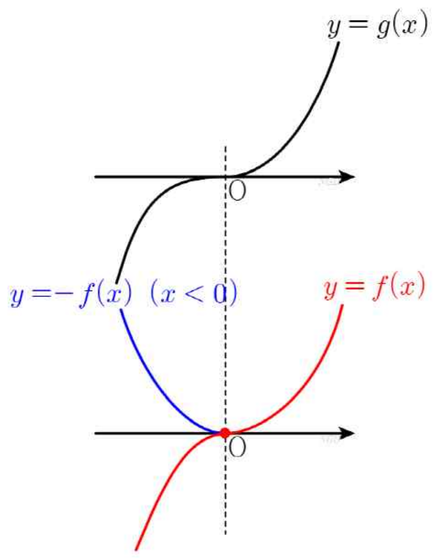
[그림2-1]



[그림2-2]

그림과 같이 $y=f(x)$가 연속함수 이므로 주어진 조건에 맞다.

(ⅲ) $y=g(x)$가 원점에서 삼중근을 갖는경우



[그림3]

그림과 같이 $y=f(x)$가 연속함수 이므로 주어진 조건에 맞다.

ㄱ. 조건에 맞는 [그림2], [그림3]은 모두 $f(0)=0$이다. [참]

ㄴ. [그림2] 에서는 극댓값을 가지지만, [그림3]은 극댓값을 가지지 않는

다. [거짓]

ㄷ. [그림2-1]에서 $g(x)=(x+3\alpha)x^2$이라 두면

$f(x)=\begin{cases}-3x(x+2\alpha) & (x<0)\\ 3x(x+2\alpha) & (x\geq 0)\end{cases}$에서 $2<f(1)<4$일 때

즉, $2<3(1+2\alpha)<4$이므로 $\frac{2}{3}<1+2\alpha<\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{6}<\alpha<\frac{1}{6}$이다.

이때, $f'(0^+)=2\alpha$이고 $-\frac{1}{3}<2\alpha<\frac{1}{3}$이므로 $y=x$와 $f(x)$가 원점 근방에서는 교점이 두개 이므로 [그림2-1]에서는 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. [그림2-2]에서 [그림2-1]과 대칭인 경우 이므로 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

[그림3]에서 $f'(0)=0$이므로 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. [참]

15) 정답 ②

문제해설

주어진 수열을 나열해 보면

$a_1=0$

$a_2=\frac{1}{k+1}$

$a_3=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$

$a_4=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}$

$\vdots$

$a_{m-1}=\frac{k}{k+1}-\frac{k}{k}$

$a_m=\frac{k+1}{k+1}-\frac{k}{k}=0$

최초로 0 이 되는 m값은 $m=2k+1$ 이 된다.

따라서 $a_{22}=0$이 되기 위해서는 m은 21의 약수가 되어야 하고 k는 자연수이므로 $m=3, 7, 21$ 이므로 $k=1, 3, 10$이다.

따라서 모든 k값의 합$=1+3+10=14$

다른 풀이

주어진 수열을 나열하면

$a_1=0$

$a_2=\frac{1}{k+1}$

$a_3=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$

$a_4=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}$

$\vdots$

이다.

$\frac{1}{k+1}\times(k+1)=\frac{1}{k}\times(k)$이므로

$a_{1+(2k+1)m}=0$이다. (단, m은 자연수)

$a_{22}=0$이므로

$a_{22}=a_{1+(2k+1)m}$

$(k+1)+k=2k+1$은 21의 약수이어야 한다.

$\therefore\ 2k+1=3$ or 7 or 21

$\therefore\ k=1$ or 3 or 10

모든 k값의 합$=1+3+10=14$

16) 정답 6

문제해설

진수 $x+2>0$, $x-2>0$ 에서 $x>2$

$\log_2(x^2-4)=5$

$x^2-4=32$

$x^2=36$

진수조건에서 $x>2$ 이므로 $x=6$이다.

17) 정답 15

문제해설 $f(x)=2x^4+2x^3+C$

$f(0)=C=-1$

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

$f(-2)=32-16-1=15$

18) 정답 3

문제해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(4k+a)&=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}a\\&=4\times\frac{10\times11}{2}+10\times a\\&=220+10a\end{aligned}$$

$220+10a=250$

$10a=30$

$\therefore\ a=3$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(4k+a)&=\frac{10\{(4+a)+(40+a)\}}{2}\\&=220+10a\end{aligned}$$

$220+10a=250$

$10a=30$

$\therefore\ a=3$

19) 정답 2

문제해설

$x=1$에서 극소이므로

$f'(x)=4x^3+2ax$이고

$x=1$을 대입하면 $f'(1)=4+2a=0$, $a=-2$

또, $a=-2$를 대입하면 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)=0$

이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서, $f(0)=b=4$이다.

$\therefore\ a+b=-2+4=2$

20) 정답 13

문제해설

$g(x)$는 $x=1$, $x=4$에서 극솟값을 가지므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$이다.

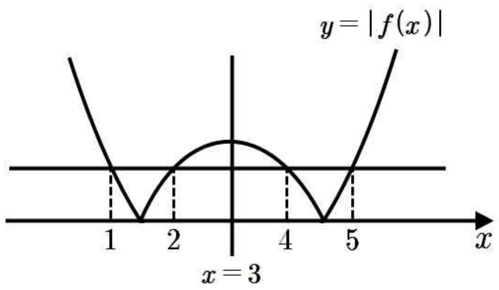
$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$에서 양변을 x에 대해 미분하면

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$이고,

$g'(1)=0$, $g'(4)=0$이므로 $g'(1)=|f(2)|-|f(1)|=0$,

$g'(4)=|f(5)|-|f(4)|=0$이고 $|f(1)|=|f(2)|$, $|f(4)|=|f(5)|$이다.

따라서, 조건을 만족하는 그래프는 아래 그림과 같다.



이차함수의 대칭성에 의하여 축의 방정식은 $x=3$이고,

$f(x)=2(x-3)^2+k$로 나타낼 수 있다.

$f(1)=-f(2)$이므로

$8+k=-(2+k)$

$k=-5$

따라서 $f(x)=2(x-3)^2-5$이고, $f(0)=13$이다.

21) **정답** 426

문제 해설

$4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=\dfrac{2}{3}\log_2\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=k$ (k는 정수) 이다.

$\dfrac{3}{4n+16}=2^{3k}$ (k는 정수)

따라서 $4n+16=3\times 2^{-3k}$ (k은 정수) 이다.

$n=3\times 2^{-3k-2}-4$ 이다. n이 자연수이므로

이를 만족하도록 k에 정수를 대입하면

$k=-1$이면 $n=2$

$k=-2$이면 $n=44$

$k=-3$이면 $n=380$ ($\because$ $1\le n\le 1000$) 이다.

따라서 모든 n의 값의 합은 $2+44+380=426$이다.

22) **정답** 19

문제 해설 함수 $g(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $3f(0)=af(-b)$.

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 $t\neq-3,\,6$ 인 실수 t에 대해 존재하므로 극한 식을 정리해보자.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}\times\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

이때, 극한값이 존재하고 (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $f(x)=(x+3)(x+k)$

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+k)|}{\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$$=\frac{|(-3+k)|}{2|g(t)|}\quad(\because g(-3)=0)$$

이 값이 존재하지 않는 실수 t가 -3과 6뿐이라는 것은 $g(t)=0$의 해가 $t=-3,\,6$뿐이라는 것이다.

$g(t)=\begin{cases}(t+3)^2(t+k) & (t<0)\\(t+a)(t+3-b)(t+k-b) & (t\ge 0)\end{cases}$의 해를 조사하면,

$g(t)=0$의 해는 $t=-3,\,-k(k>0),\,b-3,\,b-k$이므로 해가 -3과 6뿐이기 위한 값은 $b=9$, $k=3$이다.

따라서 $f(x)=(x+3)^2$, $b=9$

연속조건 $3f(0)=af(-b)$에 대입하여 정리하면 $a=\dfrac{3}{4}$.

따라서 $g(4)=(4+a)f(4-b)=\left(4+\dfrac{3}{4}\right)\times 4=19$

다른 풀이

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}\times\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이므로 $g(x)=(x+3)^2(x-\alpha)$, $g(-3)=0$, $g(6)=0$이다.

$f(x)=(x+3)(x-\alpha)$라고 하면,

$g(x)=\begin{cases}(x+3)(x+3)(x-\alpha) & (x<0)\\(x+a)(x-b+3)(x-\alpha+3) & (x\ge 0)\end{cases}$

$g(x)=(x+a)(x-b+3)(x-\alpha-b)$ $(x\ge 0)$에서

(i) $g(x)=(x+a)(x-6)(x+3)$ $(x\ge 0)$ $b=9$, $\alpha=-12$

(ii) $g(x)=(x+a)(x-6)(x-6)$ $(x\ge 0)$ $b=9$, $\alpha=-3$

인 경우로 나누어 보면

$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속

이므로 $3f(0)=af(-b)$

(i)에서 $f(x)=(x+3)(x+12)$ 이므로 $108=a(-6)(3)$에서 $a<0$이므로 양수 a 조건에 모순

(ii)에서 $f(x)=(x+3)(x+3)$ 이므로 $27=36a$에서 $a=\dfrac{3}{4}$

$g(x)=\begin{cases}(x+3)^3 & (x<0)\\\left(x+\dfrac{3}{4}\right)(x-6)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$

$g(4)=\dfrac{19}{4}\times 4=19$

<2023학년도 6월 평가원 수학(확통)>

23) **정답** ②

문제 해설

5개의 문자를 모두 나열하는 경우의 수는 5개의 문자 중 a가 3개인 같은 것이 있는 순열의 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{3!}=20$

24) 정답 ①

문제해설

두 주머니에서 각각 하나의 카드를 꺼내는 전체 경우의 수는

$3\times5=15$

두 주머니에서 각각 임의로 한 장씩 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1인 경우는

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (3, 2)로 5가지

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

25) 정답 ④

문제해설

6의 약수가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

점 P의 좌표가 2일 때 ${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$

점 P의 좌표가 3일 때 ${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$

점 P의 좌표가 4일 때 ${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$

$\therefore\ \frac{24}{81}+\frac{32}{81}+\frac{16}{82}=\frac{72}{81}=\frac{8}{9}$

다른 풀이

6의 약수가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

점 P의 좌표가 1일 때 ${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

점 P의 좌표가 0일 때 ${}_4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

여사건의 확률로 구해주면

$\therefore\ 1-\frac{8}{81}-\frac{1}{81}=\frac{72}{81}=\frac{8}{9}$

26) 정답 ②

문제해설 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$에서 x^5의 계수는 $(x^2+1)^4$의 x^2항과 $(x^3+1)^n$에서 x^3항의 계수의 곱이다.

$(x^2+1)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}={}_4C_rx^{8-2r}$$

x^2의 계수는 $r=3$일 때이다.

따라서 $r=3$일 때의 x^2의 계수는 ${}_4C_3=4$

x^5의 계수가 12이므로 $(x^3+1)^n$의 x^3의 계수는 3이어야 한다.

$(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^3)^{n-r}={}_nC_rx^{3n-3r}$$

x^3의 계수가 3이려면 $n=3$, $r=2$이다.

$(x^2+1)^4(x^3+1)^3$에서 x^6의 계수는

(ⅰ) $(x^2+1)^4$의 x^6항과 $(x^3+1)^3$의 상수항의 곱

$(x^2+1)^4$의 전개식에서 x^6항은 $r=1$일 때이므로

$${}_4C_1x^{8-2}=4x^6$$

$(x^3+1)^3$의 상수항은 1

따라서 $4x^6\times1=4x^6$

(ⅱ) $(x^2+1)^4$의 상수항과 $(x^3+1)^3$의 x^6항의 곱

$(x^2+1)^4$의 상수항은 1이고

$(x^3+1)^3$의 전개식에서 x^6항은 $r=1$일 때이므로

$${}_3C_1x^{9-3}=3x^6$$

따라서 $1\times3x^6=3x^6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 x^6의 계수는 $4x^6+3x^6=7x^6$이므로 7

27) 정답 ③

문제해설

①	②	③	④	⑤	⑥

조건 (가)에서 양끝에는 대문자가 나와야 하므로 ①과 ⑥에는 대문자 X, Y 중에서 중복을 허락하여 나열하면 되고 이때 경우의 수는 $2^2=4$

조건 (나)에서 a는 한 번만 쓸 수 있으므로 ②, ③, ④, ⑤ 중에서 a가 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 자리에는 a를 제외한 b, X, Y를 중복허락하여 나열하면 되므로 $3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times4\times27=432$가 된다.

28) 정답 ④

문제해설

1, 2, 3, 4, 5를 이용하여 네 자리의 수를 구해주면

$5\times4\times3\times2=120$

(ⅰ) 5의 배수가 되는 경우

일의 자리에 5를 배치하고 네 자리의 수를 구한다.

$4\times3\times2=24$

(ⅱ) 3500이상인 경우

천의 자리에 3, 백의 자리에 5를 배치하고 네 자리의 수를 구한다.

$3\times2=6$

천의 자리에 4를 배치하고 네 자리의 수를 구한다.

$4\times3\times2=24$

천의 자리에 5를 배치하고 네 자리의 수를 구한다.

$4\times3\times2=24$

(ⅲ) 5의 배수이면서 3500이상인 경우

천의 자리에 4를 배치하고 일의 자리에 5를 배치하여 네 자리의 수를 구한다.

$3\times2=6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 5의 배수의 경우와 3500이상인 경우를 더하고 5의 배수이면서 3500이상인 경우를 제외시켜준다.

$24+6+24+24-6=72$

전체 경우의 수를 이용하여 확률을 구해주면

$\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$

29) 정답 115

문제해설 $f(1)$의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(ⅰ) $f(1)=2$일 때

(가) 조건에 따라 $f(2)=4$이고,

(나) 조건에 따라 $f(1)=2\le f(3)\le f(5)\le 5$이다.
$f(4)$는 특별한 조건이 없으므로 모두 가능하다.
따라서 ${}_4H_2\times 5=50$

(ⅱ) $f(1)=3$일 때
(가) 조건에 따라 $f(3)=4$이고,
(나) 조건에 따라 $f(1)\le f(3)=4\le f(5)\le 5$이다.
$f(2)$, $f(4)$는 조건이 없으므로 모두 가능하다.
따라서 ${}_2H_1\times 5^2=50$

(ⅲ) $f(1)=4$일 때
(가) 조건에 따라 $f(4)=4$이고,
(나) 조건에 따라 $f(1)=4\le f(3)\le f(5)\le 5$이다.
$f(2)$는 모두 가능하다.
따라서 ${}_2H_2\times 5=15$

$\therefore\ 50+50+15=115$

다른 풀이

(ⅰ) $f(1)=2$이면 $f(2)=4$이고,
(나)를 만족하는 $f(3)$, $f(5)$를 결정하는 경우의 수는
${}_4H_2={}_5C_2=10$
$f(4)$ 결정하는 경우의 수는 5가지이므로
$10\times 5=50$

(ⅱ) $f(1)=3$이면 $f(3)=4$이므로
$f(5)$ 가능한 경우는 4 또는 5 두가지
$f(2)$, $f(4)$는 각각 5가지씩이므로
$2\times 5^2=50$

(ⅲ) $f(1)=4$이면 $f(4)=4$이고
$f(3)$, $f(5)$를 결정하는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2=3$
$f(2)$ 결정하는 경우의 수는 5가지이므로
$3\times 5=15$

(ⅳ) $f(1)=5$이면 $f(5)=4$이므로 (나) 만족하지 않는다.
따라서 $50+50+15=115$이다.

30) **정답** 9

문제 해설

1부터 12까지의 자연수에서 3개의 공을 뽑을 때, a보다 작은 수의 개수를 x, a와 b사이의 개수를 y, b와 c사이의 개수를 z, c보다 큰 수의 개수를 w라 하면,
$x+y+z+w=9$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $w\ge 0$이라 할 수 있다.

(ⅰ) $b-a\ge 5$가 성립하려면, $y\ge 4$이므로,
$y=y'+4$, $y'\ge 0$이라 하면,
$x+y'+z+w=5$를 만족하는 순서쌍은 ${}_4H_5={}_8C_5=56$

(ⅱ) $b-a\ge 5$, $c-a\ge 10$이 성립하려면
$y\ge 4$, $y+z\ge 8$이어야 한다.
$y+z=8$일 때, $x+w=1$이므로
순서쌍 $(x,\ w)$는 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$이고
순서쌍 $(y,\ z)$는 $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(7,\ 1)$, $(8,\ 0)$이므로
만족하는 경우의 수는 10가지

$y+z=9$일 때, $x+w=0$이므로 $x=w=0$
만족하는 순서쌍 $(y,\ z)$는 $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$, $(6,\ 3)$, $(7,\ 2)$, $(8,\ 1)$, $(9,\ 0)$이므로
만족하는 경우의 수는 6가지

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 확률은 $\dfrac{16}{56}=\dfrac{2}{7}$

다른 풀이

$b-a\ge 5$인 사건을 A, $c-a\ge 10$인 사건을 B라 하면

ⅰ) 사건 A의 경우의 수
$a=1$일 때, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12에서 b, c 두 수를 뽑는 경우이므로 ${}_7C_2=\dfrac{7\times 6}{2}=21$
$a=2$일 때, 7, 8, 9, 10, 11, 12에서 b, c 두 수를 뽑는 경우이므로
${}_6C_2=\dfrac{6\times 5}{2}=15$
$a=3$, $a=4$, $a=5$, $a=6$도 같은 방법으로 경우의 수를 구하면
${}_5C_2+{}_4C_2+{}_3C_2+{}_2C_2=\dfrac{5\times 4}{2}+\dfrac{4\times 3}{2}+\dfrac{3\times 2}{2}+\dfrac{2\times 1}{2}=20$
따라서 $21+15+20=56$

ⅱ) 사건 $A\cap B$의 경우의 수
$a=1$일 때, $c=11$ 또는 12가 될 수 있다.
$a=1$, $c=11$일 때, 6, 7, 8, 9, 10에서 b를 선택하는 경우의 수는 5가지,
$a=1$, $c=12$일 때, 6, 7, 8, 9, 10, 11에서 b를 선택하는 경우의 수는 6가지이다.
$a=2$일 때, $c=12$이므로 7, 8, 9, 10, 11에서 b를 선택하는 경우의 수는 5가지이다.
따라서 $11+5=16$가지

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{16}{56}=\dfrac{2}{7}$

$p+q=9$

<2023학년도 6월 평가원 수학(미적)>

23) **정답** ①

문제 해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}$$
$$=1$$

24) **정답** ①

문제 해설

주어진 식을 미분하면
$2x-\dfrac{y}{x}-\dfrac{dy}{dx}\ln x+1=0$
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\ln x}\left(2x-\dfrac{y}{x}+1\right)$
$(e,\ e^2)$을 대입하여 접선의 기울기를 구하자.
$\dfrac{dy}{dx}=2e-e+1=e+1$

25) 정답 ②

문제 해설

$f(x)=x^3+2x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2$이고

$g(3)=k$라면 $f(k)=3$에서 $k=0$

$g(3)=0$

$f(g(x))=x$을 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$$

26) 정답 ②

문제 해설

$\angle A_1B_1A_2=\angle A_1B_2A_2=\frac{\pi}{3}$ ($\because$ 원주각)

$\angle A_1B_1A_2=\angle B_1A_2B_2=\frac{\pi}{3}$ ($\because$ 엇각)

따라서 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형

$\therefore\ \overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1A_1}=2$

$\angle B_1A_2B_2=\angle B_1A_1B_2=\frac{\pi}{3}$ ($\because$ 원주각)

따라서 삼각형 $C_1A_1B_1$도 정삼각형

$\therefore\ \overline{C_1B_2}=\overline{B_2A_2}=\overline{A_2C_1}=1$ $\left(\because\ \overline{B_1A_2}=3\right)$

삼각형 $B_1C_1B_2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot \sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because\ \angle B_1C_1B_2=\frac{2\pi}{3}\right)$

삼각형 $B_1C_1B_2$와 삼각형 $A_1C_1A_2$는 합동이므로 $R_1=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

사각형 $A_1A_2B_2B_1$과 사각형 $A_2A_3B_3B_2$의 닮음비가 $2:1$이므로 $\left(\because\ \overline{A_1B_1}=2,\ \overline{A_2B_2}=1\right)$ 넓이비는 $4:1$, 즉 공비는 $\frac{1}{4}$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

27) 정답 ③

문제 해설 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{n+2}=3$

$a_n=3n+k$

$a_1=4$이므로 $k=1$

$\therefore\ a_n=3n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

28) 정답 ⑤

문제 해설

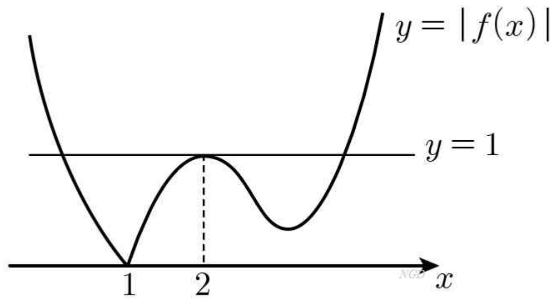
$g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $f(1)=0$이다.

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad(f(x)\neq 0)$$

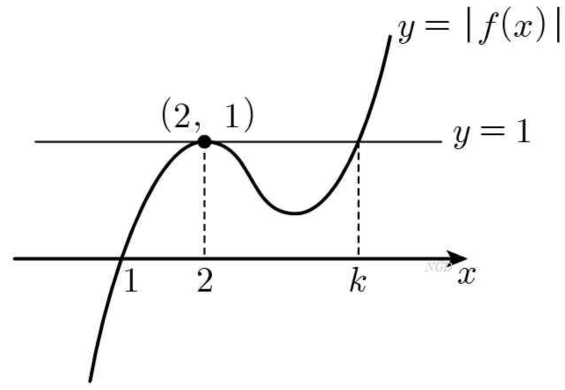
$g(x)$가 $x=2$에서 극대를 가지려면 $f(x)$가 $x=2$에서 극대를 가져야 한다. 또한 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소가 되기 위해서는 $\ln|f(2)|\le 0$이어야 하므로 $0<f(2)\le 1$이다.

한편, $g(x)=0$의 실근은 $\ln|f(x)|=0$의 실근의 개수와 같으므로 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 한다.

따라서 $|f(x)|$의 개형은 다음과 같다.



$f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 개형은 다음과 같다.



$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$

$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$

$\frac{1}{2}(1-k)=-1$

$\therefore\ k=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$이다.

$$f'(x)=(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$$

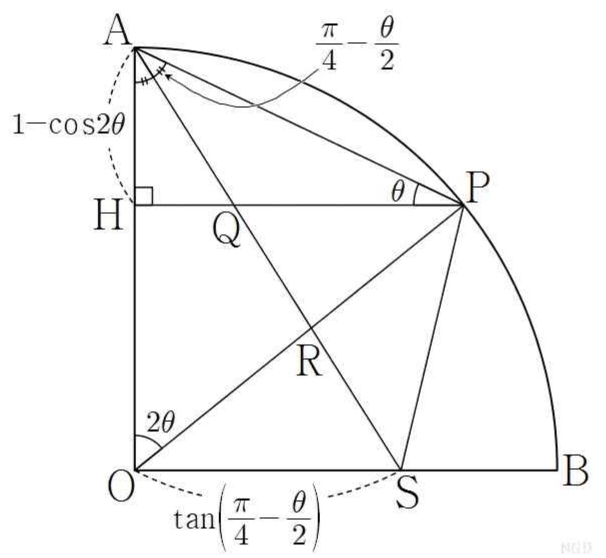
$x=\frac{8}{3}$일 때 $f(x)$가 극솟값을 가지므로 $g(x)$도 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{25}{27}$$

$\therefore\ g\left(\frac{8}{3}\right)=\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\frac{25}{27}$

29) 정답 50

문제 해설



$\angle\mathrm{QAH}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이므로, $\angle\mathrm{AOP}=2\theta$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=\cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{AH}}=1-\cos 2\theta$이다.

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

한편,

$\triangle\mathrm{POS}$의 넓이는 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos 2\theta$ 이므로, $\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos 2\theta$이다.

이때, $\overline{\mathrm{AP}}=2\sin\theta$와 각의 이등분선의 성질에 의해,

$g(\theta)=\triangle\mathrm{POS}\times\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos 2\theta\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$이다.

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\theta^3\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos 2\theta\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}}{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$이고,

이 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}=4$, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 이므로

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\theta^3\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}}{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2}=k$

$\therefore 100k=50$

다른 풀이

$\angle\mathrm{PAH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고 $\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{APO}$이므로

$\angle\mathrm{OPH}=\frac{\pi}{2}-2\theta$, $\angle\mathrm{POH}=2\theta$이다.

$\therefore$ 삼각형 OPH에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sin 2\theta$,

삼각형 PAH에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sin 2\theta\cdot\tan\theta$ 이다.

또한, $\angle\mathrm{QAH}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{AH}}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\quad=\sin 2\theta\cdot\tan\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$이다.

$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\theta\cdot\tan^2\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

삼각형 OAS에서 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$이고 $\angle\mathrm{POS}=\frac{\pi}{2}-2\theta$이므로

$\triangle\mathrm{OPS}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\quad=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos 2\theta$이다.

$\overline{\mathrm{AR}}$은 $\angle\mathrm{OAP}$의 이등분선이므로 $\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{RO}}:\overline{\mathrm{RP}}$ ⋯ ㉠이다.

$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 M이라 하면,

$\angle\mathrm{AOM}=\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AP}}=2\sin\theta$이다.

㉠에서 $1:2\sin\theta=\overline{\mathrm{RO}}:\overline{\mathrm{RP}}$이므로 $\overline{\mathrm{RP}}=\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{PSR}=\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PO}}}\cdot\triangle\mathrm{OPS}=\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}\cdot\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos 2\theta$

$\therefore\ g(\theta)=\frac{\sin\theta}{1+2\sin\theta}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos 2\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\cdot\frac{\sin\theta}{1+2\sin\theta}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\theta\cdot\tan^2\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^4\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot4\theta^2\cdot\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\cdot\theta^2\cdot(1+2\sin 2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 100k=100\times\frac{1}{2}=50$

30) 정답 16

문제 해설

$f(x)=(x^2-ax)e^{-x}$의 그래프를 분석해 보자.

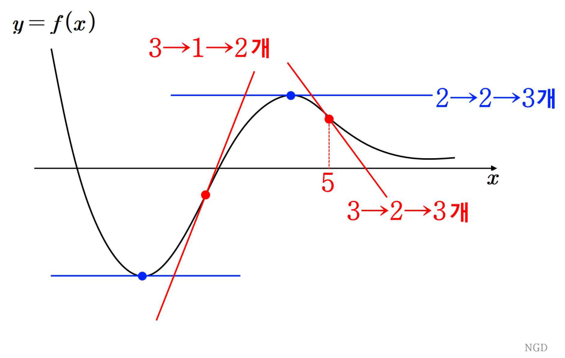
$f'(x)=(2x-a)e^{-x}-(x^2-ax)e^{-x}=(-x^2+(2+a)x-a)e^{-x}$

이므로 극값을 최대 두 개 가질 수 있다. 그리고

$f''(x)=(-2x+(2+a))e^{-x}-(-x^2+(2+a)x-a)e^{-x}$

$=(x^2-(4+a)x+(2+2a))e^{-x}$

이므로 변곡점이 없거나, 최대 두 개 가질 수 있다.



$y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 $(t,\ f(t))$에서 $y=f(x)$에 그린 접선의 방정식이고 이 접선이 $y=f(x)$와 두 개 또는 세 개의 점에서 만날 수 있는 방법은 다음과 같다.

따라서 $x=5$에서 $f(x)$는 변곡점을 갖는다.

$f''(5)=(25-20-5a+2+2a)e^{-5}=0$에서 $7-3a=0$, $a=\frac{7}{3}$이고

$\lim\limits_{t \to k-} g(t) \neq \lim\limits_{t \to k+} g(t)$을 만족시키는 경우는

$f'(x)=0$인 점이다.

(두 변곡점에서는 $g(t)$의 값이 바뀌지만, 좌극한과 우극한은 같으므로 주어진 식을 만족시키지 않는다.)

따라서 $2+a=\dfrac{13}{3}$이고 $p+q=16$이다.

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{x^2-ax}{e^x}$ (단, $a>0$)에서

$f(0)=f(a)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이다.

$f'(x)=\dfrac{\{-x^2+(a+2)x-a\}}{e^x}$이고

$-x^2+(a+2)x-a=0$에서

$D=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$이므로

$f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고

함수 $f(x)$는 서로 다른 두 극점을 갖는다.

이때 두 극점의 x좌표를 m, n(단, $m<n$)라 하자.

$f''(x)=\dfrac{\{x^2-(a+4)x+2a+2\}}{e^x}$이고

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$에서

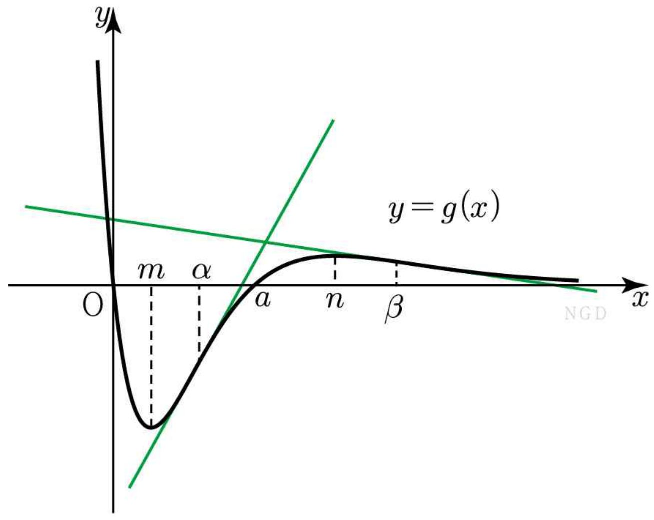
$D=(a+4)^2-4(2a+2)=a^2+8>0$이므로

$f''(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고

함수 $f(x)$는 서로 다른 두 변곡점을 갖는다.

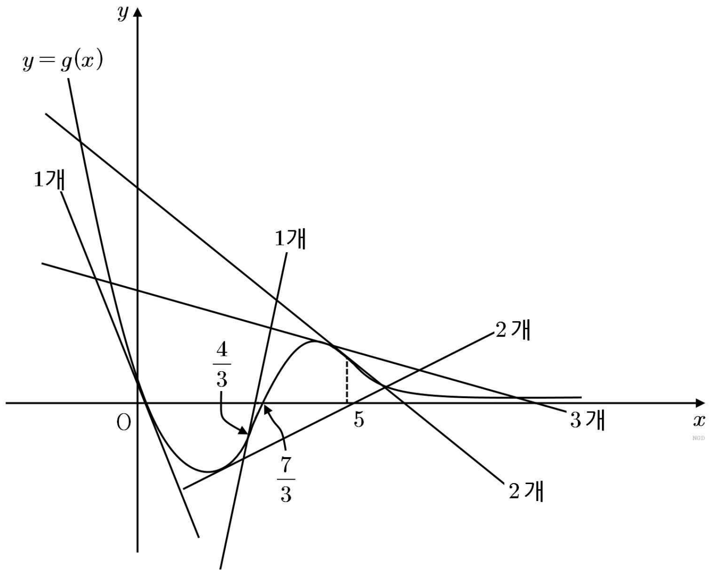
이때 두 변곡점의 x좌표를 α, β(단, $\alpha<\beta$)라 하자.

따라서, 함수 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$y=f(x)$와 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$의 교점 개수가 $g(t)$이므로 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선과 함수 $y=f(x)$의 교점 개수를 세는 것과 같고 x좌표 t의 위치에 따라서 근의 개수는 다음과 같다. (단, m, n는 극점의 x좌표, α, β는 변곡점의 x좌표이다.)

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t\le m) \\ 2 & (m<t<\alpha) \\ 1 & (t=\alpha) \\ 2 & (\alpha<t\le n) \\ 3 & (n<t<\beta) \\ 2 & (t=\beta) \\ 3 & (t>\beta) \end{cases}$$



따라서, $g(5)+\lim\limits_{t\to5} g(t)=5$를 만족하는 t값은 $g(5)=2$, $\lim\limits_{t\to5} g(t)=3$인 $t=\beta$일 때이므로 $f''(\beta)=f''(5)=0$이고 $a=\dfrac{7}{3}$이다.

$\lim\limits_{t\to k-} g(t) \neq \lim\limits_{t\to k+} g(t)$을 만족하는 $t=k$는 좌우에서 교점이 개수가 달라지는 극점 $t=m$ 또는 $t=n$일 때이고

$f'(x)=\dfrac{-x^2+\dfrac{13}{3}x-\dfrac{7}{3}}{e^x}$이므로

구하려는 k값의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $\dfrac{13}{3}$이다.

따라서, $p=3$, $q=13$이고 $p+q=16$이다.

<2023학년도 6월 평가원 수학(기하)>

23) **정답** ③

문제해설 $\vec{a}+2\vec{b}$,와$3\vec{a}+k\vec{b}$ 가 서로 평행하려면

$\vec{a}+2\vec{b}=t(3\vec{a}+k\vec{b})$

$\vec{a}+2\vec{b}=3t\vec{a}+kt\vec{b}$

$3t=1$, $kt=2$

$t=\dfrac{1}{3}$, $k=6$

24) **정답** ②

문제해설 $2a=6$, $a=3$

$\dfrac{b}{a}=2$, $b=6$

초점을 c라 하면 $c^2=a^2+b^2$

$c^2=9+36=45$, $c=\pm3\sqrt{5}$

두 초점사이의 거리는 $6\sqrt{5}$

25) **정답** ②

두 직선 $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-5}{3}$, $x-1=\dfrac{2-y}{3}$ 의

방향벡터를 각각 $\vec{u_1}=(4,\ 3)$, $\vec{u_2}=(1,\ -3)$이라 하자.

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$$
$$=\frac{|4\times1+3\times(-3)|}{\sqrt{4^2+3^2}\times\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$
$$=\frac{|-5|}{5\times\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

26) 정답 ⑤

문제해설

$x^2+3y^2-3=0$에 $y=x-1$를 대입하면

$(y+1)^2+3y^2-3=0$

$2y^2+y-1=0$

$(2y-1)(y+1)=0$

$y=\frac{1}{2}$ or -1

즉, 두 점 A, C의 좌표는 각각 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $C(0,\ -1)$이다.

선분 AC의 기울기가 $\dfrac{\frac{1}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-0}=1$이므로 두 점 B, D에서 타원에 접하는 직선의 기울기가 1일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되므로

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하는 기울기 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1+1}$

$\ =x\pm2$

이므로 점 $C(0,\ -1)$두 직선 $x-y+2=0$과 $x-y-2=0$ 사이의 거리를 구하면

$\frac{|0+1+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이므로 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$=3$$

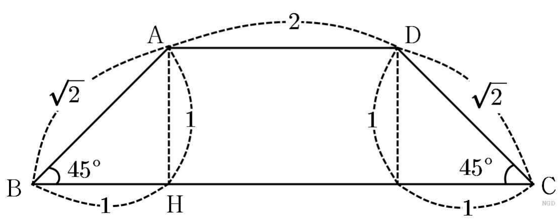
이다.

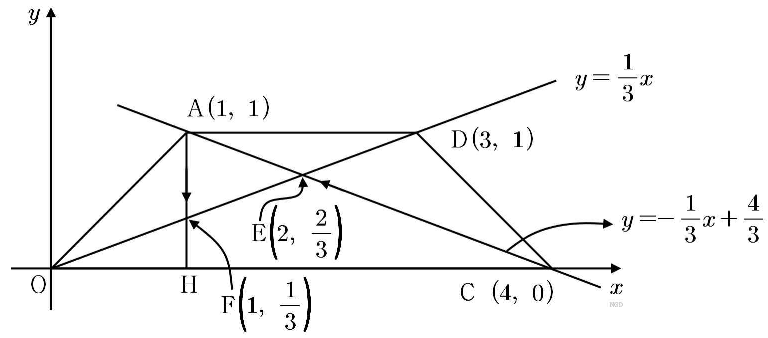
27) 정답 ④

문제해설

$\angle ABC=45^\circ$이므로 삼각형 ABH는 직각이등변삼각형이다.

다음 그림과 같이 $\overline{BH}=1$, $\overline{AH}=1$이다.





그림과 같이 사각형 ABCD의 점 B를 원점, $\overline{BC}$를 x축 위에 올리면 $A(1,\ 1)$, $C(4,\ 0)$, $D(3,\ 1)$이다.

이때 직선 BD는 $y=\frac{1}{3}x$, 직선 AC는 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$이다.

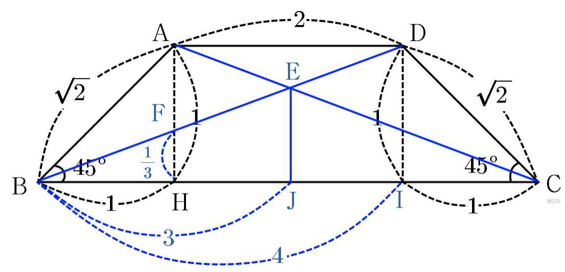
두 직선을 연립하면 점 E의 좌표는 $\left(2,\ \frac{2}{3}\right)$이다.

따라서 $\overrightarrow{AF}=\left(1,\ \frac{1}{3}\right)-(1,\ 1)=\left(0,\ -\frac{2}{3}\right)$,

$\overrightarrow{CE}=\left(2,\ \frac{2}{3}\right)-(4,\ 0)=\left(-2,\ \frac{2}{3}\right)$이다.

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(0,\ -\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-2,\ \frac{2}{3}\right)$$
$$=0\times(-2)+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{4}{9}$$

다른 풀이



점 E의 선분 BC위로의 수선의 발을 J라 하자.

삼각형 AED와 삼각형 BEC는 서로 1 : 2 닮음이므로

$\overline{EJ}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$이다.

또한 삼각형 FBH와 삼각형 DBI는 서로 1 : 3 닮음이므로

$\overline{FH}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$이다.

따라서 $\overline{AF}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

선분 CE와 선분 EJ가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{CE}$$
$$=\overrightarrow{EJ}\cdot(-\overrightarrow{EC})$$
$$=-|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{EC}|\cos\theta$$
$$=-\overline{EJ}\times\overline{EJ}$$
$$=-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{4}{9}$$

28) 정답 ①

문제해설

두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$라 두자.

문제의 조건을 만족하려면 직선 $y=2x-3$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 $(3,\ 3)$에서 접해야 한다.

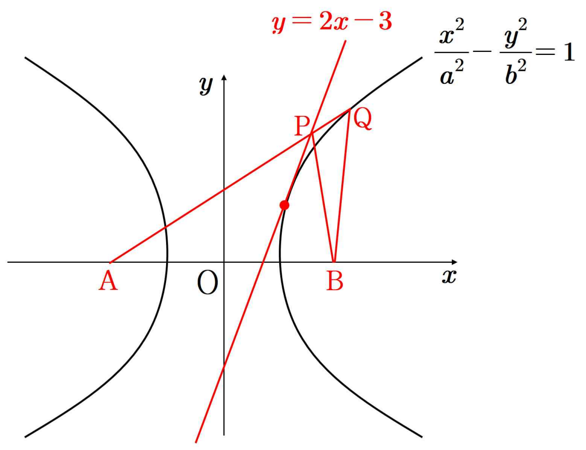
점 $(3,\ 3)$에서의 접선 $\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1 \rightarrow y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$의 계수를

$y=2x-3$과 비교하면, $a^2=\frac{9}{2}$, $b^2=9$

쌍곡선의 초점 $(c,\ 0)\,(c>0)$에 대하여 $c^2=a^2+b^2=\frac{27}{2}$

$\therefore\ c=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ $(\because\ c>0)$

[참고]



$(\overline{QA}-\overline{QB})-(\overline{PA}-\overline{PB})$

$=(\overline{PA}+\overline{PQ}-\overline{QB})-(\overline{PA}-\overline{PB})$

$=\overline{PQ}-\overline{QB}+\overline{PB}\geq 0$

$\rightarrow\ \overline{PA}-\overline{PB}\leq\overline{QA}-\overline{QB}$

즉, P가 접점일 때 $\overline{PA}-\overline{PB}$의 값이 최대이다.

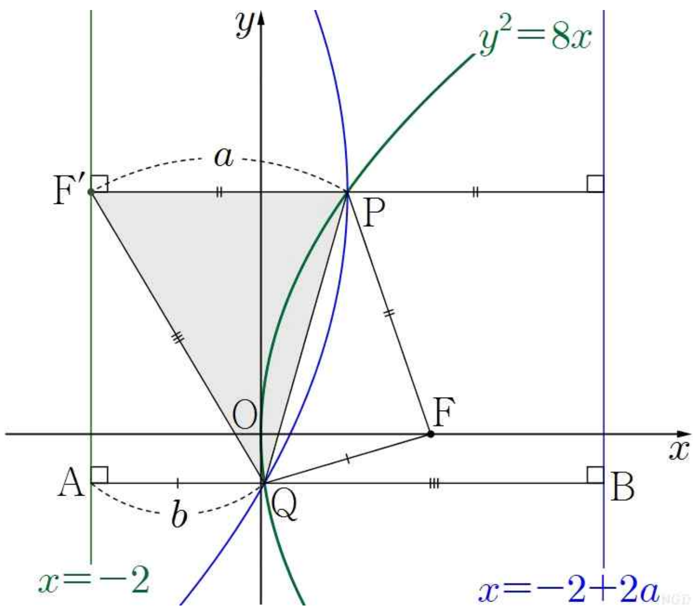
29) **정답** 23

문제 해설 $y^2=8x$의 포물선에서 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

선분 PF와 선분 PF′는 포물선의 정의에 의하여 길이가 같고 그 길이를 a라 하자.

그러면 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 준선의 방정식은 $x=-2+2a$이다.

점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 $x=-2$, $x=-2+2a$와 각각 만나는 점을 A, B라 하자.



$\overline{PF}=\overline{PF'}=a$, $\overline{FQ}=\overline{QA}=b$, $\overline{F'Q}=\overline{QB}$

여기서 $\overline{QA}+\overline{QB}$의 길이의 합은 $x=-2$, $x=-2+2a$ 의 거리와 같으므로 $2a$이다.

사각형의 둘레의 길이 $\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{FQ}+\overline{QF'}$은

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{AQ}+\overline{QB}$ 와 같으므로 둘레의 길이는 $4a$

$4a=12$

$a=3$이다.

위에서 찾은 a의 길이를 이용하여 점 P는 $(1,\ 2\sqrt{2})$다.

따라서 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은 $(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$이다.

점 Q의 좌표는 $(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$, $y^2=8x$를 연립하면

$Q\left(\frac{1}{25},\ -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

[삼각형의 넓이 구하기]

$\overline{QA}=\frac{51}{25}$라 하면 $\overline{QF'}=\frac{99}{25}$

선분 PF′와 선분 QA는 평행하므로 $\angle F'QA=\angle PF'Q=\theta$

삼각형 AQF′는 직각삼각형이므로 $\cos\theta=\frac{\frac{51}{25}}{\frac{99}{25}}=\frac{17}{33}$

$\sin\theta=\frac{20\sqrt{2}}{33}$

삼각형 PF′Q의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{F'Q}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times3\times\frac{99}{25}\times\frac{20\sqrt{2}}{33}=\frac{18\sqrt{2}}{5}$

따라서, $p+q=23$이다.

다른 풀이 (마지막 계산과정만 다르게 추가합니다.)

삼각형 PF′Q의 넓이는,

$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times$(P, Q의 y좌표의 차이)

$=\frac{1}{2}\times3\times\left(2\sqrt{2}+\frac{2}{5}\sqrt{2}\right)$

$=\frac{18}{5}\sqrt{2}$

따라서, $p+q=23$이다.

다른 풀이

초점 F의 좌표는 $F(2,\ 0)$이므로 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 $P(a,\ \sqrt{8a})$, $Q(b,\ -\sqrt{8b})$라 하면 ($\because$ 점 P는 제1사분면이고, 점 Q는 제2사분면이다.)

또한, 포물선의 성질에 의하여

$\overline{F'P}=\overline{PF}=a+2$, $\overline{FQ}=b+2$, $\overline{F'Q}=(2a+2)-b$

점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 준선의 방정식은

$x=2a+2$

이고, 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12이므로

$2(a+2)+(b+2)+\{(2a+2)-b\}=12$

따라서 $a=1$이고, 점 P의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이다.

이때, 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$

이를 $y^2=8x$와 연립하면

$$Q\left(\frac{1}{25},\ -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$$

따라서 삼각형 PF′Q의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\sqrt{8a}+\sqrt{8b})\times(a+2)=\frac{18}{5}\sqrt{2}$$

30) **정답** 8

조건 (가)에서 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CP'}$으로 놓으면, 점 P′은 정육각형 A′B′CD′E′F′위의 점이 되고, 이 때 B′, D′은 각각 $\overline{CB}$, $\overline{CD}$의 중점이다.

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP'}+\overrightarrow{CQ}$ ....①

이므로 점 X는 정육각형 A′B′CD′E′F′ 둘레로 단위원을 이동시킬 때 그 단위원이 지나가는 영역에 존재하게 된다.

조건 (나)에서 벡터의 시점을 점 C로 바꾸면

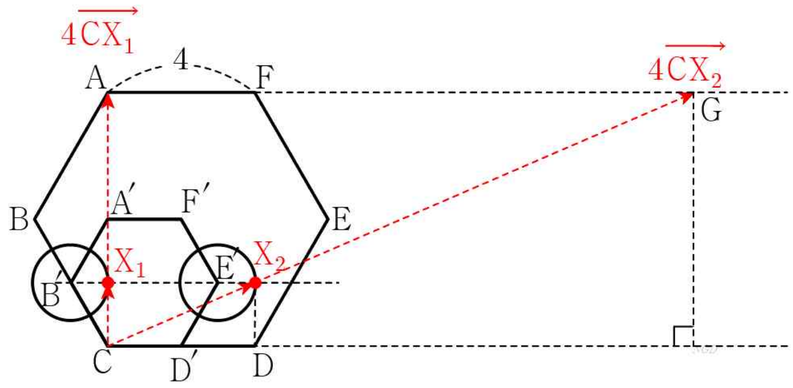
$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX})-\overrightarrow{CX}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CX})=k\overrightarrow{CD}$

$4\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}+(2-k)\overrightarrow{CD}$ ....②

식 ②에서 우변 벡터의 종점은 직선 AG 위에 있으므로 점 X는 직선 B′E′ 위에 존재하게 된다.

그러므로 $\overrightarrow{CX}$의 종점 X는 직선 B′E′위에 있으면서 단위원이 지나가는 영역의 둘레 또는 내부에 있어야 된다.



이러한 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{CX}|$이 최소가 되는 것은 위 그림에서 점 X_1에 있을 때이고, 최대가 되는 것은 점 X_2에 있을 때이다.

(i) $|\overrightarrow{CX}|$이 최소일 때

$4\overrightarrow{CX_1}=\overrightarrow{CA}$이므로 이 때 $k=2$, 즉 $\alpha=2$

(ii) $|\overrightarrow{CX}|$이 최대일 때

$4\overrightarrow{CX_2}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CD}$이므로 이 때 $k=-2$, 즉 $\beta=-2$

따라서, $\alpha^2+\beta^2=8$이다.

다른 풀이

선분 AD, CD의 중점을 각각 M_1, M_2라 가정하자.

(나) 조건에서 $(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XD})+(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD})=2\overrightarrow{XM_1}+2\overrightarrow{XM_2}$이다.

$2\overrightarrow{XM_1}+2\overrightarrow{XM_2}=k\overrightarrow{CD}$와 같다.

$2\overrightarrow{XM_1}+2\overrightarrow{XM_2}$는 $\overrightarrow{CD}$와 평행하므로 점 X는 직선 B′E′위에 존재한다.

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$이므로 점 C에 가장 가까운 점은 X_1이고 가장 멀리 떨어진 점은 X_2이다.

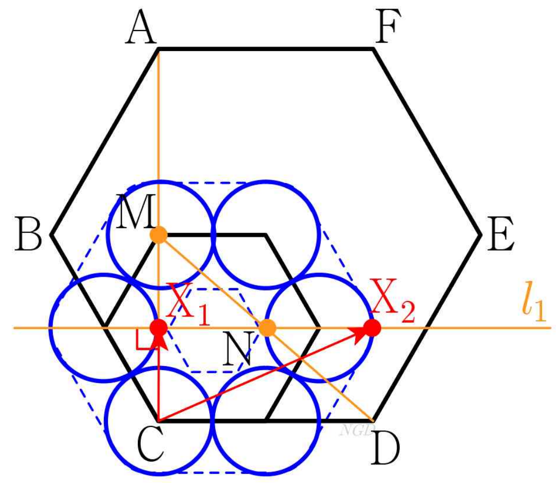
$\overrightarrow{CX_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$이므로 $\alpha=2$

$\overrightarrow{CX_2}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}$이므로 $\beta=-2$이다.

따라서 $\alpha^2+\beta^2=8$

다른 풀이

조건(가)를 만족하는 X의 자취를 조사하자. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$는 C를 시점으로 하고, 한 변의 길이가 2인 다음과 같은 정육각형 위의 점을 종점으로 하는 벡터이다.



또한 $\overrightarrow{CQ}$에서 Q는 C를 중심으로 하고 반지름이 1인 원 위를 움직이므로, 조건(가)를 만족하는 X는 두 점선으로 이루어진 도형의 경계 또는 그 내부에 존재한다. …… ㉠

한편 조건(나)에서 $\overline{AC}$의 중점을 M, $\overline{MD}$의 중점을 N이라 하면 $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=2\overrightarrow{XM}$이고 $2\overrightarrow{XM}+2\overrightarrow{XD}=4\overrightarrow{XN}=k\overrightarrow{CD}$이므로, 이를 만족하기 위해서는 N을 지나고 $\overline{CD}$에 평행한 직선 l_1위에 점 X가 존재해야 한다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overrightarrow{CX}$가 최소가 되도록 하는 X를 X_1, 최대가 되도록 하는 X를 X_2라 하자. $|\overrightarrow{X_1N}|=2$, $|\overrightarrow{X_2N}|=2$이므로

$4\overrightarrow{X_1N}=2\overrightarrow{CD}$, $4\overrightarrow{X_2N}=-2\overrightarrow{CD}$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=8$