● 수학 영역 ●

수학 정답

1	③	2	②	3	④	4	⑤	5	①
6	④	7	⑤	8	③	9	②	10	④
11	①	12	③	13	②	14	②	15	④
16	⑤	17	①	18	①	19	⑤	20	③
21	②	22	8	23	24	24	5	25	1
26	17	27	12	28	130	29	33	30	50

해 설

1. [출제의도] 다항식의 뺄셈을 계산한다.

$$\begin{aligned} A-B &= (3x^2-2xy+y^2)-(x^2+xy-y^2) \\ &= (3x^2-x^2)+(-2xy-xy)+(y^2+y^2) \\ &= 2x^2-3xy+2y^2 \end{aligned}$$

2. [출제의도] 조건의 부정을 이해한다.

실수 x에 대한 조건 'x는 1보다 크다.'의 부정은 'x는 1보다 크지 않다.', 즉 '$x \le 1$'이다.

3. [출제의도] 조합과 순열의 수를 계산한다.

$${}_5\mathrm{C}_3 \times 3! = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times(3\times2\times1)=5\times4\times3=60$$

4. [출제의도] 합성함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$$\begin{aligned} (g\circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g(3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

5. [출제의도] 두 직선의 평행 조건을 이해하여 직선의 y절편을 구한다.

직선 $3x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다. 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}(x-2)+3$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+6$

이므로 구하는 y절편은 6이다.

[다른 풀이]

직선 $3x+2y-5=0$과 평행한 직선의 방정식은 $3x+2y+a=0$(단, a는 상수)로 놓을 수 있다.

이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3\times2+2\times3+a=0$, $a=-12$

따라서 직선 $3x+2y-12=0$의 y절편은 6이다.

6. [출제의도] 복소수의 실수부분과 허수부분을 이해하여 실수의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{a+3i}{2-i} &= \frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2a+ai+6i+3i^2}{4-i^2} \\ &= \frac{(2a-3)+(a+6)i}{5} \\ &= \frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i \end{aligned}$$

이므로 복소수 $\frac{a+3i}{2-i}$의 실수부분은 $\frac{2a-3}{5}$이고 허수부분은 $\frac{a+6}{5}$이다.

실수부분과 허수부분의 합이 3이므로

$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=\frac{3a+3}{5}=3$

따라서 $a=4$

7. [출제의도] 순열을 이해하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

먼저 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

이 각각에 대하여 1, 3, 5가 적혀 있는 세 장의 카드의 사이사이와 양끝의 네 곳 중에서 두 곳을 선택하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 하나씩 나열하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$

[다른 풀이]

5장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

2, 4가 적혀 있는 두 장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고 이 각각에 대하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는 $2!$이므로 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$4!\times2!=48$

따라서 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$120-48=72$

8. [출제의도] 선분의 내분을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -4)$에 대하여

선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times2+1\times a}{3+1},\ \frac{3\times(-4)+1\times0}{3+1}\right)$

즉, $\left(\frac{6+a}{4},\ -3\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{6+a}{4}=0$에서

$a=-6$

따라서 점 A의 좌표는 $(-6,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{\{2-(-6)\}^2+(-4-0)^2} \\ &= \sqrt{80}=4\sqrt{5} \end{aligned}$$

9. [출제의도] 곱셈 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^3-3\times(-2)\times\sqrt{2}}{-2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{-2} \\ &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 직선의 기울기를 구한다.

점 $(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m\{x-(-1)\}$

즉, $y=mx+m$

$y=mx+m$을 $y=x^2+x+4$에 대입하면

$mx+m=x^2+x+4$

$x^2+(1-m)x+4-m=0$

직선 $y=mx+m$이 곡선 $y=x^2+x+4$에 접하므로 이차방정식 $x^2+(1-m)x+4-m=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이다.

$$\begin{aligned} D &= (1-m)^2-4(4-m) \\ &= m^2+2m-15 \\ &= (m+5)(m-3)=0 \end{aligned}$$

에서 $m=-5$ 또는 $m=3$

$m>0$이므로 $m=3$

11. [출제의도] 무리함수를 이해하여 함수의 치역을 구한다.

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로

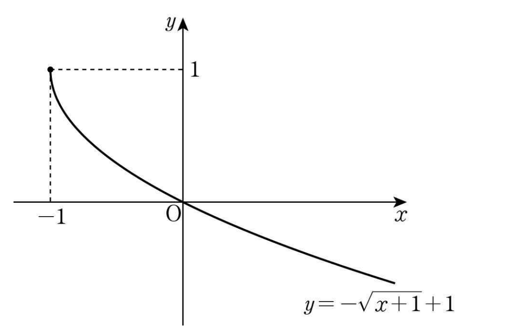
$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$

$2a=-2$, $a=-1$

함수 $y=-\sqrt{x}$의 치역은 $\{y\,|\,y\le0\}$이고

함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\le1\}$이다.

[참고]



12. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이해하여 이차방정식의 계수를 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고, 한 근이 $\frac{b}{2}+i$로 허수이므로 다른 근은 $\frac{b}{2}+i$의 켤레복소수인 $\frac{b}{2}-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합은 $-a$이고 두 근의 곱은 b이다.

$\left(\frac{b}{2}+i\right)+\left(\frac{b}{2}-i\right)=-a$에서

$b=-a$ …… ㉠

$\left(\frac{b}{2}+i\right)\left(\frac{b}{2}-i\right)=b$에서

$\frac{b^2}{4}+1=b$, $b^2-4b+4=(b-2)^2=0$

$b=2$

㉠에서 $a=-2$

따라서 $ab=(-2)\times2=-4$

13. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 부분집합의 개수를 구한다.

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고 $B\cap X=\varnothing$이므로

집합 X는 집합 $A-B$의 부분집합이다.

집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로 $A-B=\{6,\ 18,\ 30,\ 42\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $A-B$의 부분집합의 개수인 $2^4=16$이다.

14. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.

$f(1)+2f(3)=12$이고 f는 일대일대응이므로

$f(1)=2$, $f(3)=5$ …… ㉠

$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서 $f^{-1}(1)\in X$, $f^{-1}(3)\in X$이므로

$f^{-1}(1)=3$, $f^{-1}(3)=1$

또는 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$

또는 $f^{-1}(1)=5$, $f^{-1}(3)=3$이다.

㉠에서 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(5)=3$이고 함수 f^{-1}도 일대일대응이므로 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$이다.

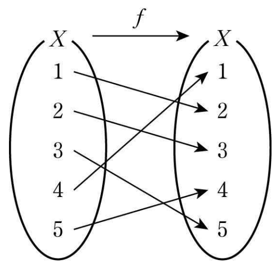
즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=1$이고

함수 f는 일대일대응이므로 $f(5)=4$이다.

즉, $f^{-1}(4)=5$

따라서 $f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

[참고]



15. **[출제의도] 연립부등식을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수를 구한다.**

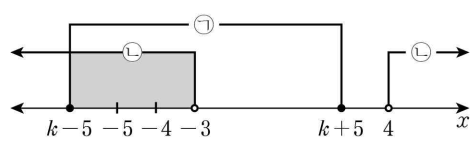
$|x-k|\le 5$에서 $-5\le x-k\le 5$

$k-5\le x\le k+5$ …… ㉠

$x^2-x-12>0$에서 $(x+3)(x-4)>0$

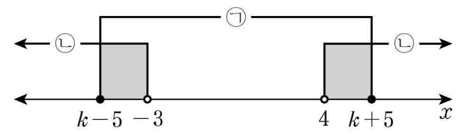
$x<-3$ 또는 $x>4$ …… ㉡

(i) $k+5\le 4$, 즉 $k\le -1$일 때



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 모두 -3보다 작으므로 그 합은 7보다 작게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

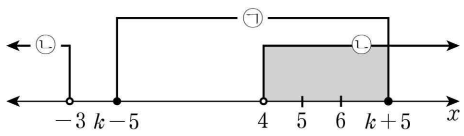
(ii) $k-5<-3$이고 $k+5>4$, 즉 $-1<k<2$일 때



$k=0$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -5, -4, 5이고 그 합은 -4가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$k=1$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -4, 5, 6이고 그 합은 7이 되어 조건을 만족시킨다.

(iii) $k-5\ge -3$, 즉 $k\ge 2$일 때



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 두 개 이상이고 모두 4보다 크므로 그 합은 7보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=1$이다.

16. **[출제의도] 삼차방정식의 근에 대한 조건을 이용하여 문제를 해결한다.**

$x^3-x^2-kx+k=0$에서

$x^2(x-1)-k(x-1)=0$

$(x-1)(x^2-k)=0$

$x=1$ 또는 $x^2=k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k>0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k<0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x=1$뿐이고, α, β 중에서 실수가 존재하므로 $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$이다.

(i) $\alpha=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\beta=-\frac{1}{2}\alpha^2=-\frac{1}{2}$이므로

α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=\alpha^2=-2$이고 $\gamma^2=k=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$

따라서 $\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$

17. **[출제의도] 이차부등식을 포함한 문장이 참인 명제가 되도록 하는 문제를 해결한다.**

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1\le 0$

$(a+1)(a-1)\le 0$, $-1\le a\le 1$

그러므로 정수 a는 -1, 0, 1이다.

이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로

$Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$

$(b+3)(b-3)<0$, $-3<b<3$

그러므로 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3\times 5=15$이다.

18. **[출제의도] 유리함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.**

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$ …… ㉠

$f(x)=\frac{a}{x}+b$, 즉 $y=\frac{a}{x}+b$에서

$\frac{a}{x}=y-b$, $x=\frac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$

그러므로 $f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$이다.

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ …… ㉡

㉡에서 $b\ne 2$이므로 ㉠에서 $b=-2$이다.

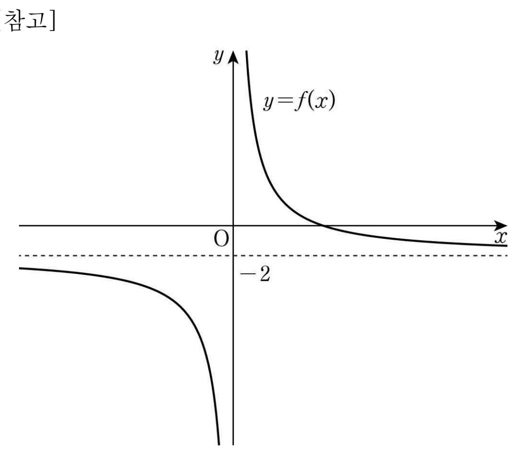
㉡에 $b=-2$를 대입하면

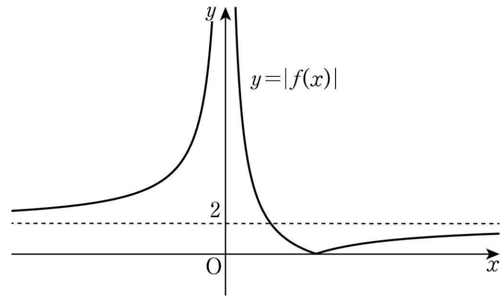
$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3$, $a=12$

따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

[참고]





19. **[출제의도] 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.**

드모르간의 법칙에 의하여

$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이므로 조건 (가)에서

$n(A\cup B^C)=n((B-A)^C)=7$

$B-A=\{4, 7\}$에서 $n(B-A)=2$

$(B-A)\cup(B-A)^C=U$, $(B-A)\cap(B-A)^C=\varnothing$

이므로

$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^C)$

$=n(B-A)+n(A\cup B^C)$

$=2+7=9$

그러므로 $k=9$이고 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

조건 (가)에서 $B-A=\{4, 7\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.

따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(i) $m=6$일 때

집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.

이때 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의 원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

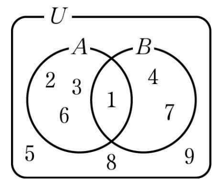
(ii) $m=9$일 때

집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.

이때 집합 $A-B$의 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=6$이고 이때 $B=\{1, 4, 7\}$이다.

즉, $A\cup B=\{1, 2, 3, 6\}\cup\{1, 4, 7\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$



$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5, 8, 9\}$이므로

집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$5+8+9=22$

20. **[출제의도] 두 직선의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 점을 구하는 문제를 해결한다.**

두 식 $2x+y+2=0$, $x-2y-4=0$을 연립하면

$x=0$, $y=-2$이므로

두 직선 l_1, l_2의 교점 A는

A$(0, -2)$

직선 l_1이 x축과 만나는 점 B는

$2x+0+2=0$, $x=-1$

에서 B$(-1, 0)$

직선 l_2가 x축과 만나는 점 C는

$x-0-4=0$, $x=4$

에서 C$(4, 0)$

ㄱ. 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 -2, $\frac{1}{2}$이다.

두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다. (참)

ㄴ. 점 Q가 삼각형 PBC의 무게중심이므로 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 QBC의 넓이의 3배이다.

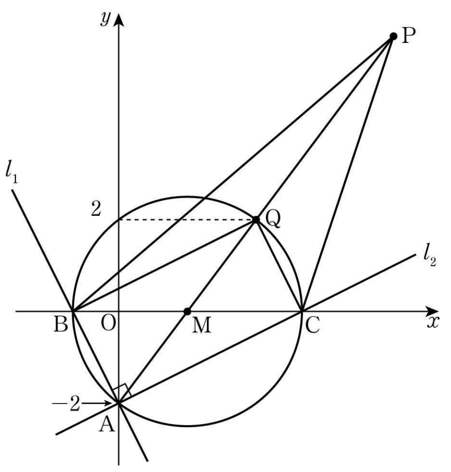
조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 3배이므로 두 삼각형 QBC, ABC

의 넓이는 서로 같다.

두 삼각형 QBC, ABC에서 선분 BC가 공통이므로 점 Q와 직선 BC 사이의 거리는 점 A와 직선 BC 사이의 거리인 2이다. 즉, 점 Q의 y좌표는 2 또는 -2이다. 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 점 P, B, C의 x좌표의 합과 y좌표의 합은 모두 양수이므로 점 Q도 제1사분면에 있는 점이다. 따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다. 원의 중심은 선분 BC의 중점 M이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+4}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$



점 A의 y좌표는 -2, 점 Q의 y좌표는 2이고, 점 Q는 제1사분면에 있으므로 두 점 Q, A는 점 M에 대하여 서로 대칭이다. 따라서 세 점 A, M, Q는 한 직선 위에 있다.

점 Q는 삼각형 PBC의 무게중심이므로 세 점 M, Q, P도 한 직선 위에 있다. 그러므로 네 점 A, M, Q, P는 모두 한 직선 위에 있다. $\overline{AM}=\overline{MQ}$이고 $\overline{MQ}:\overline{QP}=1:2$이므로 $\overline{AP}:\overline{MP}=4:3$이다.

점 P는 선분 AM을 $4:3$으로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{4\times\frac{3}{2}-3\times 0}{4-3},\ \frac{4\times 0-3\times(-2)}{4-3}\right)$, 즉 $(6,\ 6)$

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 12이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. 세 점 $A(0,\ -2)$, $B(-1,\ 0)$, $C(4,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발이 원점 O이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$

이다. 그러므로 조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 15이다.

점 P의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$이라 하고 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times 5\times b=\frac{5}{2}b$

이다.

$\frac{5}{2}b=15$에서 $b=6$이고 점 P의 좌표는 $(a,\ 6)$이다.

이때 삼각형 PBC의 무게중심 Q의 좌표는

$\left(\frac{a+(-1)+4}{3},\ \frac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{3}+1,\ 2\right)$이다.

따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다. 원의 중심은 선분 BC의 중점 M이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+4}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

$\overline{BC}=|4-(-1)|=5$이므로 원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다. 즉, 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

점 Q가 이 원 위의 점이므로

$\left(\frac{a}{3}+1-\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{25}{4}$

$\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\frac{a}{3}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{a}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

$a=6$ 또는 $a=-3$

$a>0$이므로 $a=6$이고 점 P의 좌표는 $(6,\ 6)$이다.

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 $6+6=12$이다. (거짓)

21. [출제의도] 합성함수의 성질을 이용하여 정육각형 위를 움직이는 점의 위치를 추론한다.

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=\frac{9}{32}$에서 $f(a)=b$라 하면

$f(b)=\frac{9}{32}$

이다. 함수 $f(x)$가 삼각형 PFA의 넓이이므로 함수 $f(x)$는 점 P가 선분 CD에 있을 때 최댓값을 갖는다. 선분 AC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 MAB에서 $\angle MAB=30°$이므로

$\overline{AC}=2\overline{AM}$

$=2\times\overline{AB}\cos 30°$

$=2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

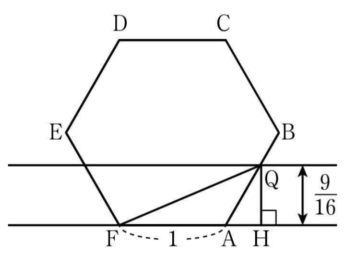
이므로 $0<b\le\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

점 P가 점 A로부터 움직인 거리가 b인 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AB 위에 있고, 삼각형 QFA의 넓이는 $\frac{9}{32}$이다.

점 Q에서 직선 FA에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 QFA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{QH}=\frac{1}{2}\times 1\times\overline{QH}=\frac{9}{32}$

이므로 $\overline{QH}=\frac{9}{16}$



[그림 1]

[그림 1]의 직각삼각형 QAH에서 $\angle QAH=60°$이므로

$b=\overline{AQ}=\overline{QH}\times\frac{1}{\sin 60°}$

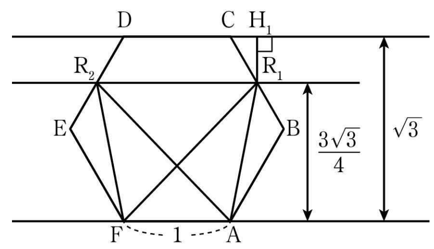
$=\frac{9}{16}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$

같은 방법으로 $f(a)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$을 만족시키는 a의 값을 구하자.

점 P가 점 A로부터 움직인 거리가 a인 점을 R라 하고, 점 R에서 직선 FA에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 RFA의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{RI}$이므로

$f(a)=\frac{1}{2}\times 1\times\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$에서 $\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

$\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이 되는 점 R의 위치는 [그림 2]의 R_1, R_2이다.



[그림 2]

점 R의 위치가 R_1일 때, $a=\overline{AB}+\overline{BR_1}$이다.

점 R_1에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 R_1CH_1에서 $\angle R_1CH_1=60°$이므로

$a=\overline{AB}+\overline{BR_1}$

$=\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{R_1C}$

$=1+1-\overline{R_1H_1}\times\frac{1}{\sin 60°}$

$=2-\left(\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{2}{\sqrt{3}}$

$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$0<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(5-x)$가 성립하므로 점 R의 위치가 R_2일 때의 실수 a의 값은 $5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$이다.

즉, $a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=\frac{7}{2}$

따라서 $(f\circ f)(a)=\frac{9}{32}$를 만족시키는 모든 실수 a $(0<a<5)$의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\boxed{\frac{21}{4}}$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $r=\frac{21}{4}$이므로

$\frac{r}{p\times q}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}}=\frac{28}{3}$

22. [출제의도] 합집합의 성질을 이용하여 미지수를 계산한다.

$10\notin A$이고 $A\cup B=\{6,\ 8,\ 10\}$이므로 $10\in B$이다.

$a=10$이면 $B=\{10,\ 12\}$이고 $A\cup B=\{6,\ 8,\ 10,\ 12\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a+2=10$이면 $B=\{8,\ 10\}$이고 $A\cup B=\{6,\ 8,\ 10\}$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a+2=10$, $a=8$

23. [출제의도] 점의 대칭이동과 평행이동의 성질을 이용하여 점의 좌표를 계산한다.

점 $(5,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4,\ 5)$이다. 점 $(4,\ 5)$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(4,\ 6)$이다.

따라서 $a=4$, $b=6$이므로 $ab=24$

24. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 미지수를 계산한다.

주어진 등식에서 좌변의 이차항은 $2x^2$, 우변의 이차항은 ax^2이므로 이차항의 계수를 비교하면

$a=2$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3\times(-2)+8=0-2b+0$, $b=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0+8=0+0+2c$, $c=4$

따라서 $a+b+c=2+(-1)+4=5$

[다른 풀이]

좌변을 전개하면

$(2x+3)(x-2)+8=2x^2+3x-4x-6+8$

$=2x^2-x+2$ …… ㉠

우변을 전개하면

$$ax(x-2)+b(x-2)+cx=ax^2-2ax+bx-2b+cx$$
$$=ax^2+(-2a+b+c)x-2b \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $a=2$, $-2a+b+c=-1$, $-2b=2$
따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=4$이고 $a+b+c=5$

25. [출제의도] 원과 좌표축의 위치 관계를 이해하여 원의 방정식을 구한다.

원의 중심이 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.
원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$r=r^2+r-1$, $r^2=1$
$r>0$이므로 $r=1$
중심이 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
즉, $x^2+y^2+2x-2y+1=0$
$a=2$, $b=-2$, $c=1$
따라서 $a+b+c=2+(-2)+1=1$

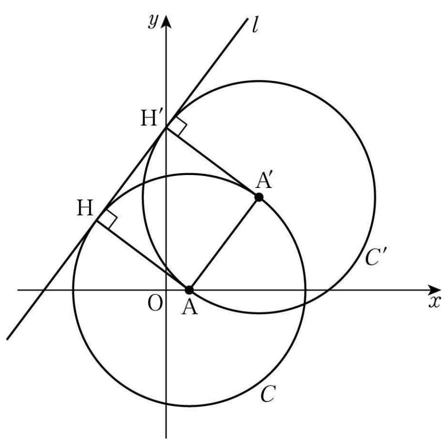
[다른 풀이]

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$의 중심을 A라 하면 점 A는 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 점 A는 직선 $y=-x$ 위에 있다.
또, 점 A는 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$x^2-x-1=-x$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$
점 A의 x좌표는 음수이므로 $\mathrm{A}(-1, 1)$이다.
따라서 주어진 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
즉, $x^2+y^2+2x-2y+1=0$
$a=2$, $b=-2$, $c=1$
따라서 $a+b+c=2+(-2)+1=1$

26. [출제의도] 일대일대응을 이해하여 식의 최댓값을 구한다.

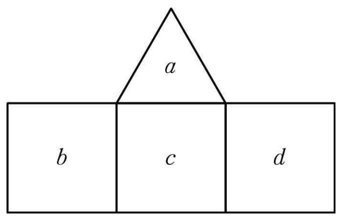
$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$에서 이 함수가 일대일대응이 되기 위해서는 $a\ge 2$이어야 한다.
$a\ge 2$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge f(a)\}$이고 치역이 집합 $Y=\{y\,|\,y\ge b\}$와 같아야 하므로 $b=f(a)$이다.
$$a-b=a-f(a)$$
$$=-a^2+5a-3$$
$$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$
$a\ge 2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이다.
따라서 $p=4$, $q=13$이므로 $p+q=17$

27. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 합을 구하는 문제를 해결한다.



두 원 C, C'의 중심을 각각 A, A′이라 하자.
원 C의 중심은 $\mathrm{A}(1, 0)$이므로 조건 (나)에서
$$r=\frac{|4\times1-3\times0+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$$
원 C'의 방정식은 $(x-a-1)^2+(y-b)^2=25$이고 조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(1, 0)$을 지나므로
$(1-a-1)^2+(0-b)^2=25$
$a^2+b^2=25 \cdots\cdots ㉠$
직선 $4x-3y+21=0$을 l이라 하고 두 점 A, A′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{A'H'}}$이고 $\overline{\mathrm{AH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{A'H'}}\perp l$이므로 직선 AA′은 직선 l과 평행하다.
직선 l의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로
$\frac{b-0}{(1+a)-1}=\frac{4}{3}$, $b=\frac{4}{3}a \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 $a^2+b^2=a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2=\frac{25}{9}a^2=25$
$a>0$, $b>0$이므로 $a=3$, $b=4$
따라서 $a+b+r=3+4+5=12$

28. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.



그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.
조건 (가)에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$이다.
조건 (나)에서 $b\ne c$, $c\ne d$이다.
(ⅰ) $b\ne d$일 때
a, b, c, d가 서로 다르다.
6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4=15$
이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times3!=6$
따라서 $b\ne d$인 경우의 수는 $15\times6=90$
(ⅱ) $b=d$일 때
$a>b=d$, $a>c$이므로 a, b, c, d 중 서로 다른 수의 개수는 3이다.
6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$
이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times2!=2$
따라서 $b=d$인 경우의 수는 $20\times2=40$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $90+40=130$

[다른 풀이]

조건 (가), (나)에서 a보다 작은 수가 적어도 2개 존재해야 하므로 $a\ge3$
(ⅰ) $a=3$일 때
c는 1, 2 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2 중 c가 아닌 수이면 되므로 $1\times1=1^2$
따라서 $a=3$인 경우의 수는 $2\times1^2=2$
(ⅱ) $a=4$일 때
c는 1, 2, 3 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3 중 c가 아닌 수이면 되므로 $2\times2=2^2$
따라서 $a=4$인 경우의 수는 $3\times2^2=12$
(ⅲ) $a=5$일 때
c는 1, 2, 3, 4 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4 중 c가 아닌 수이면 되므로 $3\times3=3^2$
따라서 $a=5$인 경우의 수는 $4\times3^2=36$
(ⅳ) $a=6$일 때
c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4, 5 중 c가 아닌 수이면 되므로 $4\times4=4^2$
따라서 $a=6$인 경우의 수는 $5\times4^2=80$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$2+12+36+80=130$

29. [출제의도] 다항식의 나눗셈과 항등식을 이용하여 다항식을 구하는 문제를 해결한다.

다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫은 $x+2$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2 \cdots\cdots ㉠$
이고 이때 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수는 $x^2+g(x)$의 차수보다 작다.
$g(x)$의 차수가 $n\,(n\ge2)$이면 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $2n$으로 $x^2+g(x)$의 차수인 n보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다. $g(x)$가 상수이면 $x^2+g(x)$의 차수와 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 2로 같게 되어 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(x)$의 차수는 1이다.
이때 $x^2+g(x)$는 이차식이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$은 일차식 또는 상수이어야 한다. $g(x)$의 일차항의 계수가 양수이므로 $g(x)=x+a$(단, a는 상수)로 놓을 수 있다.
㉠에서
$$f(x)=(x^2+x+a)(x+2)+(x+a)^2-x^2$$
$$=(x^2+x+a)(x+2)+2ax+a^2$$
조건 (나)에서 $f(x)$가 $g(x)=x+a$로 나누어떨어지므로 $f(-a)=0$이다.
$$f(-a)=(a^2-a+a)(-a+2)-2a^2+a^2$$
$$=-a^3+a^2=0$$
$a^2(a-1)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$
$a=0$이면 $f(x)=(x^2+x)(x+2)$에서 $f(0)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
$a=1$이면 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$에서
$f(0)\ne0$이므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$이고
$f(2)=7\times4+4+1=33$

[다른 풀이]

다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫이 $x+2$이고 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$$
$$=x^2(x+2)+(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2-x^2$$
$$=(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2+x^2(x+2)-x^2$$
$$=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^3+x^2$$
$$=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^2(x+1)$$
이때 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어지므로 $x^2(x+1)$도 $g(x)$로 나누어떨어져야 한다. ······ ㉠
$f(0)=g(0)\{2+g(0)\}\ne0$에서
$g(0)\ne0$이고 $g(0)\ne-2$이다. ······ ㉡
$g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 ㉠, ㉡에 의하여
$g(x)=k(x+1)\ (k>0)$
한편, $x^2+g(x)$로 나눈 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작아야 한다.
$$x^2+g(x)=x^2+k(x+1)$$
$$=x^2+kx+k$$
$$\{g(x)\}^2-x^2=\{k(x+1)\}^2-x^2$$
$$=(k^2-1)x^2+2k^2x+k^2$$
즉, $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작으려면 $k^2-1=0$이어야 한다.
$k>0$이므로 $k=1$
$$f(x)=(x+1)\{x+2+(x+1)\}+x^2(x+1)$$
$$=(x+1)(2x+3)+x^2(x+1)$$
따라서
$$f(2)=(2+1)(2\times2+3)+2^2\times(2+1)$$
$$=3\times7+4\times3=33$$

30. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 함수를 추론한다.

$\alpha\in A$, $\alpha\in B$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=1$이다.
또한 $\beta\in A$, $\beta\notin B$이므로
$f(\beta)=1$, $g(\beta)\ne1$ 또는 $f(\beta)\ne1$, $g(\beta)=1$이다.
즉, 방정식 $f(x)=1$의 모든 실근의 집합을 C, 방정식

$g(x)=1$ 의 모든 실근의 집합을 D 라 하면
$C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 또는 $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$ 이다.

(i) $C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+1$, $g(x)=(x-\alpha)^2+1$ …… ㉠

이때 $\beta+3\in B$ 에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$ 이므로

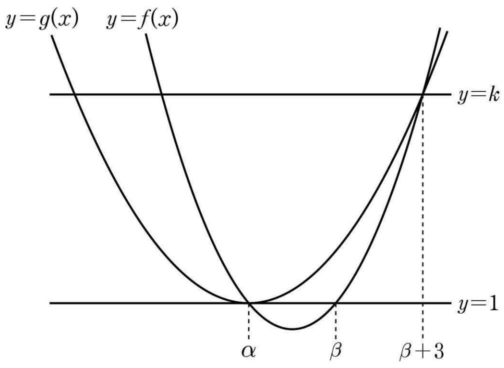
$2(\beta+3-\alpha)\times 3+1=(\beta+3-\alpha)^2+1$

$\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=6$

즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=3$

$\alpha<\beta$ 이므로 $\beta-\alpha=3$ …… ㉡

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=1$ 은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

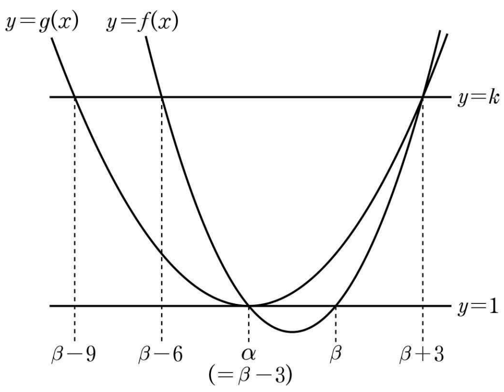
[그림 1]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k 의 값은 $k=g(\beta+3)$ 이다. …… ㉢

곡선 $y=f(x)$ 의 축의 방정식은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는 $\alpha-3$, $\beta+3$ 이다.

이때 $\alpha-3=(\beta-3)-3=\beta-6$ 이다.

또한, 곡선 $y=g(x)$ 의 축의 방정식은 $x=\alpha$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는 $2\alpha-\beta-3$, $\beta+3$ 이다.

이때 $2\alpha-\beta-3=2(\beta-3)-\beta-3=\beta-9$ 이다.



[그림 2]

[그림 2]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$ 의 서로 다른 실근은 $\beta-9$, $\beta-6$, $\beta+3$ 이고 그 합이 12 이므로

$(\beta-9)+(\beta-6)+(\beta+3)=12$, $\beta=8$

㉡에서 $\alpha=5$

㉠에서 $f(x)=2(x-5)(x-8)+1$, $g(x)=(x-5)^2+1$

㉢에서 $k=g(\beta+3)=g(11)=(11-5)^2+1=37$

(ii) $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$ 일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)^2+1$, $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$ 이다.

이때 $\beta+3\in B$ 에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$ 이므로

$2(\beta+3-\alpha)^2+1=(\beta+3-\alpha)\times 3+1$

$\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=\dfrac{3}{2}$

즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=-\dfrac{3}{2}$

이때 두 경우 모두 $\alpha<\beta$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=5$, $\beta=8$, $k=37$

따라서 $\alpha+\beta+k=5+8+37=50$

• 영어 영역 •

정 답

1	①	2	①	3	②	4	⑤	5	③
6	③	7	①	8	②	9	④	10	③
11	④	12	①	13	②	14	①	15	②
16	①	17	④	18	③	19	①	20	③
21	④	22	⑤	23	⑤	24	③	25	④
26	⑤	27	④	28	③	29	④	30	⑤
31	②	32	④	33	③	34	②	35	④
36	②	37	③	38	⑤	39	⑤	40	①
41	①	42	⑤	43	②	44	③	45	⑤

해 설

1. [출제의도] 담화의 목적을 추론한다.

M: Hello, students. This is Mr. Watson, your vice principal. I have an important announcement for all of you. As you know, our school has two drinking fountains installed on each floor. Unfortunately, due to repairs to the water pipes, all the drinking fountains in the school will be out of service starting from tomorrow. It'll take a few days until the water pipes are repaired. Until then, you won't be able to use the school drinking fountains, so make sure you bring your own water. We're very sorry for the inconvenience. Thank you.

announcement 알림
drinking fountain 음수대
install 설치하다

2. [출제의도] 대화자의 의견을 추론한다.

W: Jason, are you shopping online?
M: Yes, Alice. I'm going to buy some clothes. Look! These are my picks.
W: They look nice, but all of them are dark again this time.
M: I think dark colors suit me well and I feel more comfortable with them.
W: I see your point. You always say that you want to be more approachable though. Why don't you try other colors?
M: What colors would you recommend?
W: I think pastel colors would be good. They make the wearer appear more friendly.
M: I see. I'm worried they won't look good on me though.
W: Just give it a try. You won't regret it.
M: All right. I'll go for the pastel clothes this time.
W: Great. I'm sure you'll look more approachable in them.
M: Thanks for your advice.

approachable 가까이하기 쉬운, 사귀기 쉬운
regret 후회하다

3. [출제의도] 대화자의 관계를 추론한다.

M: Hi, Miranda.
W: Oh, hi, Henry. I didn't expect you to be here today. I thought you were still traveling around in Switzerland.
M: I came back earlier than scheduled. I just stopped by to see how the preparations for the exhibition are going.
W: They're almost done. Did you take a look at the exhibition hall?
M: Yes, I did. You did a great job arranging all the pictures.
W: Is there anything you want to change?
M: Well, is it still possible to add some more works? I took some nice photos during my trip.
W: Sure. Do you have them with you now?
M: No, but I can send you the photos by email. We can talk after you check them out.
W: Okay. You're such a great artist. I'm so happy to exhibit your works at our gallery.
M: Thanks for saying so. I'm also glad to work with you.

exhibition 전시회

4. [출제의도] 그림과 대화의 일치 여부를 파악한다.

W: Hi, David. You look happy.
M: I won a prize at the science fair. Look at this photo from the fair.
W: Wow! Congratulations. Oh, the prize ribbon is on the wall above the board. Cool!
M: Yeah, I'm so proud.
W: You set up your board on the round table. I see your topic was 'Lemon Battery.' What did you do?
M: I showed how to make a battery using lemons.
W: Interesting. So that's why there is a basket of lemons next to the battery.
M: That's right.
W: Who is this woman wearing a flower-patterned dress?
M: That's my grandmother. She came to congratulate me.
W: How nice! Oh, you're holding flowers in your hand. They're so beautiful.
M: Thanks. It was a great day.

board 게시판

5. [출제의도] 대화자가 할 일을 파악한다.

M: Amy, are you ready for your presentation for history class this afternoon?
W: Yes, James. I just need to check the file again. *[Clicking sound]* Oh, no. What have I done?
M: What happened?
W: I worked on the presentation file until late last night. I guess I forgot to save the final version.
M: Oh, dear. Do you need to do it all again?
W: Not really. Fortunately, I printed out the final version and brought it with me. It won't take long to update the file.
M: That's good. Do you have a handout for the class?
W: Yes, I printed it out, but I haven't made copies of it yet.
M: I'll go to the library and do it for you.
W: That's so kind of you. Thanks a lot.
M: No problem.

make a copy 복사하다

6. [출제의도] 수치를 파악한다.

M: Honey, we need to buy swim fins for Ben. He's moving up to the advanced swimming class!
W: Oh, that's right. Let's buy them online. *[Typing sound]* Oh, these fins look good. What do you think?