



## 2021학년도 논술고사

# 자연계열(오후)



성명	
전형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 3

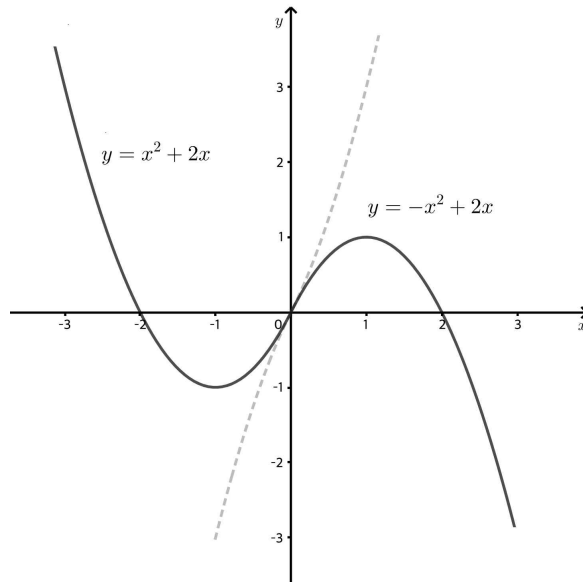
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 에 대하여  $f(a) = g(a)$ 를 만족하면 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 '만난다'고 하고, 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$$

를  $f(x)$ 에서  $g(x)$ 로  $x = a$ 에서 '갈아타는 함수'라 하자. 또한  $x = a$ 에서 만나는 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 에 대하여,  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 각각  $x = a$ 에서 미분가능하고  $f'(a) = g'(a)$ 이면, 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 '부드럽게 만난다'고 하자.

예를 들어, 두 함수  $f(x) = x^2 + 2x$ 와  $g(x) = -x^2 + 2x$ 에 대하여,  $f(0) = g(0) = 0$ 이고  $f'(0) = g'(0) = 2$ 이므로  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는  $x = 0$ 에서 부드럽게 만난다. [그림 1-1]은  $f(x)$ 에서  $g(x)$ 로  $x = 0$ 에서 갈아타는 함수의 그래프이다.



[그림 1-1]

(나) 실수 전체에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여, 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는  $x = a$ 에서의 미분계수  $f'(a)$ 와 같다. 즉, 곡선 위의 점  $P$ 에서의 접선의 방정식을  $y = g(x)$ 라 하면  $g(a) = f(a)$ 이고,  $g'(a) = f'(a)$ 이므로,  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는  $x = a$ 에서 부드럽게 만난다. 따라서 임의의 실수  $a$ 에 대해서  $f(x)$ 와  $x = a$ 에서 부드럽게 만나는 직선은 존재한다.

함수  $f(x)$ 와 두 점에서 부드럽게 만나는 이차함수는 존재하지 않을 수 있다. 가령 함수  $f(x) = e^x$ 과  $x = 0$ ,  $x = 2$ 에서 동시에 만나는 이차함수는 항상 찾을 수 있지만, 두 점 모두에서 부드럽게 만나는 이차함수는 존재하지 않는다.



[문제 1-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수  $c$ 에 대하여 두 함수  $f(x) = x^2 - 3x - 6$ 과  $g(x) = x^3 - 4x + c$ 가  $x = a$ 에서 부드럽게 만난다.  $a$ 가 정수가 아닐 때,  $27c$ 의 값을 구하여라.

(2) 두 함수  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2x$ 와  $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{1}{2}$ 이  $x = a$ 에서 부드럽게 만난다. 함수  $h(x)$ 를  $f(x)$ 에서  $g(x)$ 로  $x = a$ 에서 갈아타는 함수라고 할 때,  $\int_0^2 h(x) dx$ 를 계산하여라.

[문제 1-2] (15점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 양의 정수  $n$ 에 대해, 함수  $f(x) = 2^x$ 과  $x = n$ 에서 부드럽게 만나는 직선의 방정식을  $y = a_n x + b_n$  (단,  $a_n, b_n$ 은 실수)라 할 때,  $\sum_{n=1}^{100} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값을 구하여라.

(2) 함수  $f(x) = e^x$ 과 이차함수  $g(x)$ 는  $x = 0$ 에서 부드럽게 만나고  $x = 2$ 에서 만난다. 점  $P(2, e^2)$ 에서  $y = f(x)$ 의 접선과 점  $P$ 에서의  $y = g(x)$ 의 접선이 이루는 예각을  $\theta$ 라 할 때,  $\tan \theta$ 의 값을 구하여라.

[문제 1-3] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수  $b$ 와  $c$ 에 대하여 두 함수  $f(x) = -x^4 - 2x^2 + b$ 와  $g(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 4x + c$ 가  $x = a$ 에서 부드럽게 만난다고 하자.  $f(x)$ 에서  $g(x)$ 로  $x = a$ 에서 갈아타는 함수의 최댓값이 20 일 때  $3(a + b + c)$ 의 값을 구하여라.

(2) 실수  $d$ 에 대하여 두 함수  $f(x) = \sin 2x + d$ 와  $g(x) = -\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$ 이  $x = a$ 에서 부드럽게 만난다고 하자.  $f(x)$ 에서  $g(x)$ 로  $x = a$ 에서 갈아타는 함수의 최댓값을  $M$ 이라 하면,  $M$ 이 가장 클 때의  $d$ 의 값을 구하여라.



[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 주머니에 빨간 공이  $r$ 개, 파란 공이  $b$ 개 있다. 주머니에서 공 하나를 임의로 꺼내서 색을 확인한 다음 다시 주머니에 넣고, 방금 꺼낸 공과 같은 색의 공을 하나 더 가져와 주머니에 넣는 것을 1회 시행이라고 하자. 즉, 시행을 1회 할 때마다 주머니 속의 공의 개수는 하나씩 늘어난다. 예를 들어  $r=2$  이고  $b=1$ 인 경우 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 파란 공이면, 첫 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공과 파란 공이 각각 정확히 2개씩 있다.

(나) 주머니에 빨간 공이  $r$ 개, 파란 공이  $b$ 개, 흰 공이  $w$ 개 있다. 수열  $\{a_n\}$ 을 음이 아닌 정수로 이루어진 수열이라고 하자. 양의 정수  $n$ 에 대하여  $n$ 번째 시행에서 공 하나를 임의로 꺼내서 색을 확인한 다음 다시 주머니에 넣고, 방금 꺼낸 공과 같은 색의 공을  $a_n$ 개 더 가져와 주머니에 넣는다. 예를 들어  $r=1, b=w=2$ 이고  $a_n=3n$ 인 경우, 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이면 첫 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공이 4개, 파란 공과 흰 공이 각각 2개씩 있다. 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 파란 공이면, 두 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공이 4개, 파란 공이 8개, 흰 공이 2개 있다.

[문제 2-1] (21점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

- (1)  $r$ 과  $b$ 가 양의 정수일 때, 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을  $r, b$ 에 대한 식으로 나타내어라.
- (2)  $r=2$  이고  $b=1$  이라 하자. 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 때, 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 확률을 구하여라.
- (3)  $r=2$  이고  $b=1$  인 경우, 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률을 구하여라.

[문제 2-2] (29점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

- (1) 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_n = n$  이고,  $r=b=1, w=2$  라 하자. 2회 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수를 확률변수  $X$ 라 할 때, 기댓값  $E(X)$ 와 분산  $V(X)$ 를 구하여라.
- (2) 수열  $\{a_n\}$ 은 양의 정수로 이루어진 수열이고,  $r=b=w=1$  이라 하자. 10 이하의 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $n$ 회 시행을 마친 직후에는 주머니의 공의 개수가  $3^n + 2$ 이고, 10회 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수는 547이다. 4번째 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수를 구하여라.
- (3) 수열  $\{a_n\}$ 은 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여  $a_n < a_{n+1}$ 을 만족하는 음이 아닌 정수로 이루어진 수열이고,  $r=b=w=1$  이라 하자. 100회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공, 파란 공, 흰 공의 개수는 각각 2, 12, 4940이다. 파란 공을 꺼낸 횟수를  $m$ 이라 할 때, 가능한  $m$ 의 값을 모두 구하고

$\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$ 의 값을 구하여라.