

2021학년도 대학수학능력시험
수학영역 가형 정답 및 풀이

*수정일 : 20.12.04(금)

01. ③	02. ②	03. ①	04. ④	05. ⑤
06. ②	07. ①	08. ②	09. ④	10. ②
11. ①	12. ④	13. ③	14. ③	15. ②
16. ⑤	17. ③	18. ③	19. ⑤	20. ⑤
21. ②	22. 15	23. 8	24. 60	25. 160
26. 36	27. 13	28. 72	29. 201	30. 29

1. 출제의도 : 지수의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{9} \times 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^{\frac{1}{3}}) = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 3$$

정답 ③

2. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n}{(\sqrt{4n^2 + 2n + 1})^2 - (2n)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n}{2n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}} + 1}{1 + \frac{1}{2n}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 ②

3. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이고 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

따라서

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{-\frac{2\sqrt{7}}{7}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

정답 ①

4. 출제의도 : 조건부 확률의 성질을 이용하여 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

이므로

$$P(A) = 4P(A \cap B)$$

또,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

이므로

$$P(B) = 3P(A \cap B)$$

즉,

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= 4P(A \cap B) + 3P(A \cap B) \\ &= 7P(A \cap B) = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

따라서

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

정답 ④

5. 출제의도 : 지수부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x} \text{에서}$$

$$3^{-2x} < 3^{21-4x}$$

$$-2x < 21-4x$$

$$2x < 21$$

$$x < \frac{21}{2}$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, ..., 10이므로 그 개수는 10이다.

정답 ⑤

6. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $N(20, 5^2)$ 을 따르는 확률변수를 X 라 하면

$$E(X)=20, \sigma(X)=5$$

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균이 \bar{X} 이므로

$$\begin{aligned} E(\bar{X})+\sigma(\bar{X}) &= E(X)+\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}} \\ &= 20+\frac{5}{4} \\ &= \frac{85}{4} \end{aligned}$$

정답 ②

7. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=e^x(x^2-2x-7)$$

에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2-2x-7)+e^x(2x-2) \\ &= e^x(x^2-9) \\ &= e^x(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서

$$a=f(-3)=e^{-3} \times 8$$

$$b=f(3)=e^3 \times (-4)$$

이므로

$$a \times b = -32$$

정답 ①

8. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선과 두 직선 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{2 \ln 2} - e^{2 \ln \frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(e^{\ln 4} - e^{\ln \frac{1}{4}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

정답 ②

9. 출제의도 : 순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

9!

문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

이 각각에 대하여 나머지 카드 6장과 함께 나열하는 경우의 수는

7!

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12 \times 7!}{9!} = \frac{1}{6}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$$

$$\overline{BC} = 7\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편, $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 이므로

$\overline{AC} = k$ ($k > 0$)이라 하면 $\overline{AB} = 3k$

이때

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{9k^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{7k^2}$$

$$= \sqrt{7}k \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

ⓐ과 ⓑ에서

$$7\sqrt{3} = \sqrt{7}k$$

$$k = \sqrt{21}$$

따라서

$$\overline{AC} = k = \sqrt{21}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3}{3 + \frac{k}{n}}}$$

$$= \int_3^4 \sqrt{\frac{3}{x}} dx$$

$$= \sqrt{3} \int_3^4 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \sqrt{3} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_3^4$$

$$= 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3} - 6$$

정답 ④

정답 ①

12. 출제의도 : 정규분포에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 가 정규분포 $N(8, 3^2)$ 을 따르고 확률변수 Y 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$P(4 \leq X \leq 8) + P(Y \geq 8)$$

$$= P\left(\frac{4-8}{3} \leq \frac{X-8}{3} \leq \frac{8-8}{3}\right)$$

$$+ P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \geq \frac{8-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(-\frac{4}{3} \leq Z \leq 0\right) + P\left(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{3}\right) + P\left(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

그러므로

$$\frac{8-m}{\sigma} = \frac{4}{3}$$

$$m = 8 - \frac{4}{3}\sigma$$

따라서

$$P\left(Y \leq 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$$

$$= P\left(\frac{Y - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma} \leq \frac{8 + \frac{2\sigma}{3} - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \leq 2)$$

$$= \frac{1}{2} + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$= 0.9772$$

13. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 점 A의 x 좌표는

$$\log_a x = 1$$

$$x = a$$

이므로 A(a, 1)

또, 점 B의 x 좌표는

$$\log_{4a} x = 1$$

$$x = 4a$$

이므로 B(4a, 1)

그러므로 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4a - 4 \times a}{1 - 4}, \frac{1 \times 1 - 4 \times 1}{1 - 4}\right)$$

즉, (0, 1) (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x 축과 평행하므로 두 점 A, D의 x 좌표는 같아야 한다.

한편 점 D의 x 좌표는

$$\log_{4a} x = -1$$

$$x = \frac{1}{4a}$$

이므로 D $\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$

이때 A(a, 1)이므로

$$a = \frac{1}{4a}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

이때 $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로

$$a = \frac{1}{2} \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄷ. } \overline{AB} = 4a - a = 3a$$

한편, 점 C의 x좌표는

$$\log_a x = -1$$

$$x = \frac{1}{a}$$

이므로

$$C\left(\frac{1}{a}, -1\right)$$

그러므로

$$\overline{CD} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{3}{4a}$$

한편, $\overline{AB} < \overline{CD}$ 이면

$$3a < \frac{3}{4a}$$

$$a^2 < \frac{1}{4}$$

이때 $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로

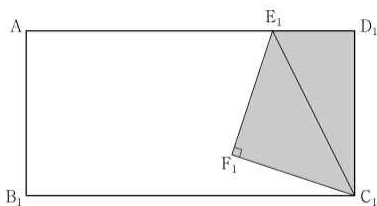
$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \quad (\text{거짓})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

14. 출제의도 : 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



직각삼각형 $C_1D_1E_1$ 에서

$$\overline{D_1E_1} = 1, \quad \overline{C_1D_1} = 2$$

이므로

$$\overline{C_1E_1} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 $C_1E_1F_1$ 에서

$$\overline{C_1F_1} = \overline{E_1F_1} \text{ 이므로}$$

$$\overline{C_1F_1}^2 + \overline{E_1F_1}^2 = 5$$

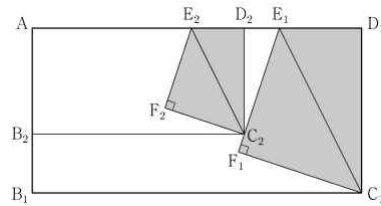
$$2\overline{C_1F_1}^2 = 5$$

$$\overline{C_1F_1} = \overline{E_1F_1} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$S_1 = \triangle C_1D_1E_1 + \triangle C_1E_1F_1$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$= \frac{9}{4}$$



$\angle C_1E_1D_1 = \theta$ 라 하면 $\angle F_1E_1D_2 = \frac{3}{4}\pi - \theta$

이고, $\tan \theta = 2$ 이므로

$$\tan(\angle F_1E_1D_2) = \tan\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{3}{4}\pi - \tan \theta}{1 + \tan \frac{3}{4}\pi \tan \theta}$$

$$= \frac{(-1) - 2}{1 + (-1) \times 2}$$

$$= 3$$

이때 $\overline{C_2D_2} = k$ 라 하면 $\overline{D_2E_1} = 3 - 2k$ 이고

$$\tan(\angle F_1E_1D_2) = \frac{k}{3 - 2k}$$

이므로

$$\frac{k}{3 - 2k} = 3$$

$$k = \frac{9}{7}$$

두 사각형 $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$ 의 닮음비가

$$2: \frac{9}{7}, \text{ 즉 } 1: \frac{9}{14} \text{ 이므로}$$

두 사각형 $C_1D_1E_1F_1$, $C_2D_2E_2F_2$ 의 넓이의 비는

$$1: \left(\frac{9}{14}\right)^2 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \left(\frac{9}{14}\right)^2} = \frac{441}{115}$$

정답 ③

15. 출제의도 : 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$

에서

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x} + C_1 \text{ (단, } C_1 \text{은 적분상수)}$$

이때 $f(1) = 5$ 이므로

$$2 + 3 + C_1 = 5$$

$$C_1 = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

$$\text{한편, } x < 0 \text{에서 } g'(x) = f'(-x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$

이므로

$$g(x) = 2x + \frac{3}{x} + C_2 \text{ (단, } C_2 \text{는 적분상수)}$$

이때 $f(2) + g(-2) = 9$ 이므로

$$\left(4 + \frac{3}{2}\right) + \left(-4 - \frac{3}{2} + C_2\right) = 9$$

$$C_2 = 9$$

$$\text{즉, } g(x) = 2x + \frac{3}{x} + 9$$

따라서

$$g(-3) = -6 - 1 + 9 = 2$$

정답 ②

16. 출제의도 : 지수함수의 성질과 등차수열의 일반항을 이용하여 구하는 과정에서 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \frac{A_3}{A_1} &= \frac{\frac{1}{2}(a_4 - a_3)(2^{a_4} - 2^{a_3})}{\frac{1}{2}(a_2 - a_1)(2^{a_2} - 2^{a_1})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times d \times (2^{1+3d} - 2^{1+2d})}{\frac{1}{2} \times d \times (2^{1+d} - 2)} \\ &= 2^{2d} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{A_3}{A_1} = 16 \text{에서}$$

$$2^{2d} = 16$$

$$d = \boxed{2}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1)d \\ &= 1 + (n-1) \times 2 \\ &= \boxed{2n-1} \end{aligned}$$

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} \times 2 \times (2^{2n+1} - 2^{2n-1}) \\ &= \boxed{3 \times 2^{2n-1}} \end{aligned}$$

따라서

$$p=2, f(n)=2n-1, g(n)=3 \times 2^{2n-1}$$

이므로

$$p + \frac{g(4)}{f(2)} = 2 + \frac{3 \times 2^7}{3} = 130$$

정답 ⑤

17. 출제의도 : 이항분포에서 확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

이때 원점에 있던 점 P 가 이동된 점의 좌표는

$$(3Y, 15 - Y)$$

이고, 이 점과 직선 $3x + 4y = 0$ 사이의 거리 X 는

$$\begin{aligned} X &= \frac{|3 \times 3Y + 4 \times (15 - Y)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|5Y + 60|}{5} = Y + 12 \end{aligned}$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y + 12) \\ &= E(Y) + 12 \\ &= 5 + 12 \\ &= 17 \end{aligned}$$

정답 ③

18. 출제의도 : 극한으로 나타내어진 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $|x| > 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x^{2n+1} + 2x}{3x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x + \frac{2}{x^{2n-1}}}{3 + \frac{1}{x^{2n}}} \\ &= \frac{a-2}{3}x \end{aligned}$$

(ii) $|x| < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x^{2n+1} + 2x}{3x^{2n} + 1} \\ &= 2x \end{aligned}$$

(iii) $x = 1$ 일 때

$$f(1) = \frac{a}{4}$$

(iv) $x = -1$ 일 때

$$f(-1) = -\frac{a}{4}$$

(i)~(iv)에서

$$f(1) = \frac{a}{4} \text{ 이므로}$$

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

(가) $\left|\frac{a}{4}\right| > 1$, 즉 $|a| > 4$ 일 때,

$$f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a-2}{3} \times \frac{a}{4} = \frac{5}{4} \text{ 에서}$$

$$a^2 - 2a - 15 = 0$$

$$(a-5)(a+3) = 0$$

$$a = 5$$

(나) $\left|\frac{a}{4}\right| < 1$, 즉 $|a| < 4$ 일 때,

$$f\left(\frac{a}{4}\right) = 2 \times \frac{a}{4} = \frac{5}{4} \text{ 에서}$$

$$a = \frac{5}{2}$$

(다) $\frac{a}{4}=1$, 즉 $a=4$ 일 때,

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(1)=1 \neq \frac{5}{4}$$

(라) $\frac{a}{4}=-1$, 즉 $a=-4$ 일 때,

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(-1)=1 \neq \frac{5}{4}$$

(가)~(라)에서

$$a=5 \text{ 또는 } a=\frac{5}{2}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

정답 ③

19. 출제의도 : 독립일 때의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) 꺼낸 공의 수가 3인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 3일 확률은

$$\frac{2}{5} \quad \dots\dots\text{㉠}$$

이때 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 3, 1 또는 6, 2, 2

또는 5, 4, 1 또는 5, 3, 2

또는 4, 4, 2 또는 4, 3, 3

이때의 확률은

$$\left(3! + \frac{3!}{2!1!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{2!1!}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \dots\dots\text{㉡}$$

㉠과 ㉡에서 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{20}$$

(ii) 꺼낸 공의 수가 4인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 4일 확률은

$$\frac{3}{5} \quad \dots\dots\text{㉢}$$

이때 주사위를 4번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 2, 1, 1 또는 5, 3, 1, 1

또는 5, 2, 2, 1 또는 4, 4, 1, 1

또는 4, 3, 2, 1 또는 4, 2, 2, 2

또는 3, 3, 3, 1 또는 3, 3, 2, 2

이때의 확률은

$$\left(\frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} + 4! + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!2!}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 80 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \quad \dots\dots\text{㉣}$$

㉢과 ㉣에서 확률은

$$\frac{3}{5} \times 80 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{27}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{27} = \frac{47}{540}$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 부분적분을 이용하여 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $h(x) = f(nx)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 의 치역이

$\{0, 1\}$ 이다.

한편, 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(nx)$ 의 함숫값이 0이 되는 x 의 값은

$$x = \frac{k}{2n} \quad (k \text{는 } -2n \text{ 이상 } 2n \text{ 이하의 정수})$$

그러므로 함수 $g(x)$ 는 어떤 정수 k 에 대하여 구간 $\left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right]$ 에서 0이어야 한다.

한편,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx) dx &= \int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2n\pi x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2n} \cos 2n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2n}} \\ &= \frac{1}{2n} - \left(-\frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이므로 $f(x) \geq 0$ 인 구간에서 함수 $f(nx)$ 의 정적분은

$$\frac{1}{n} \times n \times 2 = 2$$

그러므로 $\int_{-1}^1 h(x) dx = 2$ 이기 위해서는

함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (f(nx) > 0) \\ 0 & (f(nx) \leq 0) \end{cases}$$

한편, 함수 $k(x) = xf(nx)$ 라 하면

$$\begin{aligned} k(-x) &= -xf(-nx) \\ &= -x\pi \sin(2n\pi(-x)) \\ &= x\pi \sin 2n\pi x \end{aligned}$$

즉, 함수 $y = k(x)$ 는 y 축 대칭이다.

그러므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 xh(x) dx \\ = \int_0^1 xf(nx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x\pi \sin 2n\pi x dx \\ &= \left[-\frac{x}{2n} \cos 2n\pi x \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2n} \cos 2n\pi x \right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n} \times \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

따라서 $n = 16$

정답 ⑤

[참조]

함수 $y = xf(nx)$ 는 y 축 대칭이므로

$$\int_{-a}^{-b} xf(nx) dx = \int_b^a xf(nx) dx \quad \text{이다.}$$

이때,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 xh(x) dx \\ &= \int_{-\frac{2n-1}{2n}}^{-\frac{2n-3}{2n}} xf(nx) dx + \int_{-\frac{2n-2}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}} xf(nx) dx + \\ &\dots + \int_0^{\frac{1}{2n}} xf(nx) dx + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} xf(nx) dx + \\ &\dots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} xf(nx) dx \\ &= \int_0^1 xf(nx) dx \end{aligned}$$

21. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$a_4 = (a_2)^2 + 1$$

$$a_8 = a_2 \times a_4 + 1$$

$$= a_2 \times \{(a_2)^2 + 1\} + 1$$

$$= (a_2)^3 + a_2 + 1$$

조건 (나)에서

$$a_3 = a_2 \times a_1 - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

조건 (가)에서

$$a_2 = a_2 \times a_1 + 1 \text{이므로}$$

$$a_2 \times a_1 = a_2 - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서

$$a_3 = a_2 - 3$$

또,

$$a_7 = a_2 \times a_3 - 2$$

$$= a_2 \times (a_2 - 3) - 2$$

$$= (a_2)^2 - 3a_2 - 2$$

$$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2$$

$$= a_2 \times \{(a_2)^2 - 3a_2 - 2\} - 2$$

$$= (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2$$

이때, $a_8 - a_{15} = 63$ 이므로

$$\{(a_2)^3 + a_2 + 1\}$$

$$- \{(a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2\} = 63$$

$$(a_2)^2 + a_2 - 20 = 0$$

$$(a_2 + 5)(a_2 - 4) = 0$$

$$a_2 = -5 \text{ 또는 } a_2 = 4$$

(i) $a_2 = -5$ 일 때,

㉑에서

$$a_1 = \frac{6}{5}$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 = 4$ 일 때,

㉒에서

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4$$

따라서 $a_8 = 69$ 이므로

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{69}{\frac{3}{4}} = 92$$

정답 ②

22. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 이항계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = {}_5C_r 3^r x^{5-3r}$$

x^2 항은 $5 - 3r = 2$, 즉 $r = 1$ 일 때이므로

x^2 의 계수는

$${}_5C_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$$

정답 15

23. 출제의도 : 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 6}{x - 1}$$

에서

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x - 6)}{(x - 1)^2}$$

따라서

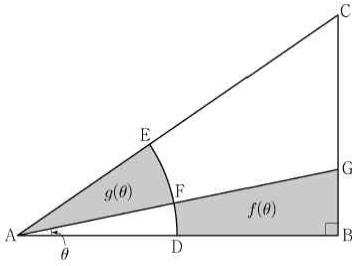
$$f'(0) = \frac{(-2) \times (-1) - (-6)}{(-1)^2} = 8$$

정답 8

24. 출제의도 : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타낸 후, 삼각함수의 극한을 이용

하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



부채꼴 AFE에서
 $\angle EAF = 2\theta$ 이므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta = \theta$$

직각삼각형 ABG에서
 $\overline{BG} = 2\tan\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BG} - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\tan\theta - \frac{\theta}{2} \\ &= 2\tan\theta - \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} &40 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \\ &= 40 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\tan\theta - \frac{\theta}{2}}{\theta} \\ &= 40 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\tan\theta}{\theta} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 40 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta}{\theta} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 40 \times \left(\frac{2}{1} \times 1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= 60 \end{aligned}$$

정답 60

25. 출제의도 : 등차수열의 합을 이용하여 일반항을 구한 후, 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 55$$

에서

$$\frac{5(6+4d)}{2} = 55$$

$$d = 4$$

즉, $a_n = 4n - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 k(a_k - 3) &= \sum_{k=1}^5 k(4k - 4) \\ &= 4 \sum_{k=1}^5 (k^2 - k) \\ &= 4 \left(\frac{5 \times 6 \times 11}{6} - \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= 160 \end{aligned}$$

정답 160

26. 출제의도 : 원순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A, B, C가 아닌 3명을 a, b, c 라 하자.
 A와 B가 이웃하므로 A와 B를 하나로
 놓고 a, b, c 와 같이 원형으로 나열하는
 경우의 수는

$$(4-1)! = 3!$$

이 각각에 대하여 A와 B의 순서를 바꾸
 는 경우의 수는

$$2!$$

이 각각에 대하여 C가 B와 이웃하지 않
 도록 앉는 경우의 수는

$$3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3! \times 2! \times 3 = 36$$

정답 36

27. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \log_4 2n^2 - \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{n} \\ &= \log_4 2n^2 - \log_4 \sqrt{n} \\ &= \log_4 \frac{2n^2}{\sqrt{n}} \\ &= \log_4 \left(2n^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

이 값이 40 이하의 자연수가 되려면

$$2n^{\frac{3}{2}} = 4^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 40)$$

이어야 한다.

즉, $n = 4^{\frac{2k-1}{3}}$ 에서 $\frac{2k-1}{3}$ 이 자연수가 되어야 하므로

$$k = 2, 5, 8, \dots, 38$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는

13

정답 13

28. 출제의도 : 미분가능성과 음함수의 미분법을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g^{-1}(x) = k(x) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g^{-1})(x) \\ &= f(k(x)) \end{aligned}$$

$$= (k(x) - a)(k(x) - b)^2$$

이때, 조건 (가)에서 함수 $(x-1)|h(x)|$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$k(1) - a = 0$$

한편, $y = k(x)$ 는 음함수 $x = y^3 + y + 1$ 이므로

$$1 = y^3 + y + 1$$

$$y = 0$$

그러므로

$$a = 0$$

이때,

$$f(x) = x(x-b)^2$$

또, 조건 (나)에서

$$h'(3) = 2$$

이때,

$$h'(x) = f'(k(x)) \times k'(x)$$

이므로

$$f'(k(3)) \times k'(3) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, $k(3)$ 의 값은

$$3 = y^3 + y + 1$$

$$(y-1)(y^2 + y + 2) = 0$$

$$y = 1$$

그러므로

$$k(3) = 1$$

이때, $f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b)$ 이므로

$$f'(k(3)) = f'(1)$$

$$= (1-b)^2 + 2(1-b)$$

$$= (1-b)(3-b)$$

또, $x = y^3 + y + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 = (3y^2 + 1) \frac{dy}{dx}$$

그러므로

$$k'(3) = \frac{1}{4}$$

$\textcircled{7}$ 에서

$$(1-b)(3-b) \times \frac{1}{4} = 2$$

$$b^2 - 4b + 3 = 8$$

$$b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$(b+1)(b-5) = 0$$

이때, $b > 0$ 이므로

$$b = 5$$

따라서

$$f(x) = x(x-5)^2$$

이므로

$$f(8) = 8 \times 3^2 = 72$$

정답 72

29. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나), (다)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우
검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 다른 두 학생에게 흰색 모자 1개씩을 나누어 주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 다음과 같다.

검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 받지 않는 경우 나머지 흰색 모자 4개를 세 학생에게 나누어주는 경우의 수에서 학생 A가 4개를 모두

받는 경우의 수를 빼면 되므로

$${}_3H_4 - 1 = 14$$

검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 1개 받는 경우 나머지 흰색 모자 3개를 세 학생에게 나누어주면 되므로

$${}_3H_3 = 10$$

그러므로 이 경우의 수는

$$3 \times (14 + 10) = 72$$

㉡ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우
검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생에게는 흰색 모자를 나누어주면 안되고, 다른 두 학생에게는 흰색 모자를 1개 이상씩 나누어주어야 한다. 즉, 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 학생 A가 4개를 모두 받는 한 가지 경우를 제외해야 하므로

$${}_3H_4 - 1 = 14$$

그러므로 이 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 14 = 84$$

(ii) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우

다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

$$3$$

다른 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고, 검은색 모자를 1개 받은 학생을 제외한 세명의 학생에게 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는

$${}_3H_4 = 15$$

그러므로 이 경우의 수는

$$3 \times 15 = 45$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$72 + 84 + 45 = 201$$

정답 201

[다른 풀이]

조건 (나), (다)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우

검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a , 검은색 모자를 2개 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b , 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c , d 라 하면

$$a + b + c + d = 6$$

$$(0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 1, c \geq 1, d \geq 1)$$

이어야 한다.

$b=0$ 인 경우의 수는

$$a + c' + d' = 4$$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d' 의 모든 순서쌍 (a, c', d') 의 개수에서 $a=4, c'=0, d'=0$ 인 1가지 경우를 제외하면 되므로

$${}_3H_4 - 1 = 14$$

$b=1$ 인 경우의 수는

$$a + c' + d' = 3$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d' 의 모든 순서쌍 (a, c', d') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_3 = 10$$

그러므로 이 경우의 수는

$$3 \times (14 + 10) = 72$$

㉡ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우

검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

$$2$$

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a , 검은색 모자를 1개 받는데 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b , 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d 라 하면

$$b = 0, a + c + d = 6$$

$$(0 \leq a \leq 3, c \geq 1, d \geq 1)$$

이어야 한다.

이 경우의 수는

$$a+c'+d'=4$$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d' 의 모든 순서쌍 (a, c', d') 의 개수에서 $a=4, c'=0, d'=0$ 인 1가지 경우를 제외하면 되므로

$${}_3H_4 - 1 = 14$$

그러므로 이 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 14 = 84$$

(ii) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우

다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

$$3$$

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a , 검은색 모자를 1개 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b , 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d 라 하면

$$b=0, a+c+d=6$$

$$(0 \leq a \leq 4, c \geq 1, d \geq 1)$$

이어야 한다.

이 경우의 수는

$$a+c'+d'=4$$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d' 의 모든 순서쌍 (a, c', d') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_4 = 15$$

그러므로 이 경우의 수는

$$3 \times 15 = 45$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$72 + 84 + 45 = 201$$

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} g(1-x) &= f(\sin^2 \pi(1-x)) \\ &= f(\{\sin(\pi - \pi x)\}^2) \\ &= f(\sin^2 \pi x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

또

$$g'(x) = f'(\sin^2 \pi x) \times 2 \sin \pi x \times \pi \cos \pi x$$

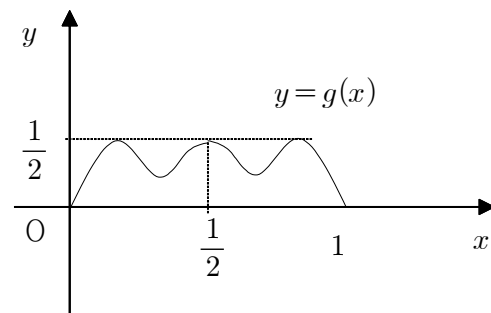
이때, $0 < x < 1$ 일 때, $\cos \pi x = 0$ 에서

$$x = \frac{1}{2}$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값을 가져야 한다.

한편, $0 < x < \frac{1}{2}$ 일 때, $0 < \sin^2 \pi x < 1$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$ 는 $0 < x < 1$ 에서 극댓값과 극솟값을 가져야 한다.

또, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 $\frac{1}{2}$ 이어야 한다.



이때, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - \frac{1}{2} = (x-a)^2(x-1) \quad (0 < a < 1)$$

이라 놓으면

$$f(x) = (x-a)^2(x-1) + \frac{1}{2}$$

(i) $x = a$ 에서 최솟값 0을 가질 때,

$$f(a) = \frac{1}{2} \neq 0$$

(ii) $x = 0$ 에서 최솟값 0을 가질 때,

$$-a^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때, $f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1) + \frac{1}{2}$ 이므

로

$$\begin{aligned} f(2) &= \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(4 - 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 5 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $a = 5$, $b = -2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 + (-2)^2 = 29$$

정답 29