

단권화

수학 I

정답과 풀이

I 지수함수와 로그함수

1 지수

pp.8~16

- 01 ④ 02 ③ 03 19 04 ② 05 $\sqrt[6]{\frac{a}{b^3}}$ 06 ③
 07 ③ 08 ① 09 ④ 10 ⑤ 11 ④ 12 ③
 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ④ 17 ⑤ 18 ③
 19 ③ 20 $\frac{7}{9}$ 21 ⑤ 22 $\sqrt{5}+1$ 23 ③
 24 ② 25 ③

01

- ① 3의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$ 의 1개이다.
 ② -4의 네제곱근 중 실수인 것은 -4가 음수이므로 존재하지 않는다.
 ③ $\sqrt{2}$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ 이다.
 ④ 자연수 n 에 대하여 -3의 $(2n-1)$ 제곱근 중 실수인 것은 $2n-1$ 이 홀수이므로 $-\sqrt[2n-1]{3}$ 이다.
 ⑤ 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[5]{2}$ 의 $2n$ 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[10n]{2}$, $-\sqrt[10n]{2}$ 이다.
 따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

02

$$2^{-2} = \frac{1}{4} > 0, \quad -2^2 = -4 < 0, \quad 2^0 = 1 > 0 \text{이고 } 4 \text{는 짝수이므로}$$

$$f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0) = 2 + 0 + 2 = 4 \quad \text{답 ③}$$

03

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt[3]{3^3 \times 3} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \\ &= \left(3 + 2 + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} \\ &= \frac{16}{3}\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=16$ 이므로 $p+q=19$ 답 19

04

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt[3]{3}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{n\sqrt{2^9}}} = \sqrt[8]{4} \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt[3]{3}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}} \times \frac{\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{n\sqrt{2^9}}}}{\sqrt[6]{\sqrt[3]{2^9}}} = \sqrt[8]{2^2}$$

$$\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[12]{3}} \times \frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6n]{2^9}} = \sqrt[8]{2^2}$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6n]{2^9}} = \sqrt[8]{2^2} \text{이므로 } \sqrt[6n]{2^9} = \frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[8]{2^2}}, \quad \sqrt[6n]{2^9} = \sqrt[8]{2^3}$$

$$\text{그런데 } \sqrt[6n]{2^9} = \sqrt[2n]{2^3} \text{이므로}$$

$$2n=8, \quad n=4$$

답 ②

05

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}}} \div \sqrt[6]{\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{b^3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{b^2}}} \times \frac{\sqrt[6]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{b^2}}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b^2}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{a^6 b^3}}{\sqrt[6]{b^2 6 b^4}} = \frac{\sqrt[6]{ab^3}}{\sqrt[6]{b^6}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{a}{b^3}} \end{aligned}$$

답 $\sqrt[6]{\frac{a}{b^3}}$

06

$$\begin{aligned} \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} \times \left(\frac{4^{-3}}{3^{-5}}\right)^2 &= \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^{-3} \times \frac{4^{-6}}{3^{-10}} \\ &= \frac{3^{-9}}{2^{-9}} \times \frac{2^{-12}}{3^{-10}} \\ &= \frac{2^9}{3^9} \times \frac{3^{10}}{2^{12}} \\ &= \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

답 ③

07

분모, 분자에 각각 a^{10} 을 곱하면

$$\begin{aligned} & \frac{a^{10}(a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a^{10}(a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9})} \\ &= \frac{a^{10}(a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)}{a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a} \\ &= a^{10} \end{aligned}$$

답 ③

08

$$\begin{aligned} & \frac{3}{a^{-3}-1} + \frac{2}{a^{-2}-1} + \frac{2}{a^2-1} + \frac{3}{a^3-1} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{a^3}-1} + \frac{2}{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{2}{1-a^2} - \frac{3}{1-a^3} \\ &= \frac{3a^3}{1-a^3} + \frac{2a^2}{1-a^2} - \frac{2}{1-a^2} - \frac{3}{1-a^3} \\ &= -\frac{3(1-a^3)}{1-a^3} - \frac{2(1-a^2)}{1-a^2} \\ &= -3-2=-5 \end{aligned}$$

답 ①

09

$$\begin{aligned} 9^{-\frac{3}{2}} \times 16^{\frac{1}{4}} \div \sqrt{81^{-3}} &= (3^2)^{-\frac{3}{2}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} \div 81^{-\frac{3}{2}} \\ &= 3^{-3} \times 2 \div (3^4)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 3^{-3} \times 2 \div 3^{-6} \\ &= 3^{-3} \times 2 \times 3^6 \\ &= 3^3 \times 2 \\ &= 54 \end{aligned}$$

답 ④

10

$$\begin{aligned} \sqrt{9^5 \sqrt{4} \sqrt{2}} &= \{3^2 \times (2^2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{3^2 \times (2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (3^2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &= 3 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 3 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$ 이므로 $a + b = \frac{5}{4}$

답 ⑤

11

$3^{x+\frac{1}{3}} = a$ 에서 $3^x \times 3^{\frac{1}{3}} = a$ 이므로

$$3^x = 3^{-\frac{1}{3}} \times a$$

따라서

$$\begin{aligned} 81^{x+\frac{1}{2}} &= (3^4)^{x+\frac{1}{2}} \\ &= (3^4)^x \times (3^4)^{\frac{1}{2}} \\ &= (3^x)^4 \times 3^2 \\ &= (3^{-\frac{1}{3}} \times a)^4 \times 3^2 \\ &= 3^{-\frac{4}{3}} \times a^4 \times 3^2 \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \times a^4 \\ &= \sqrt[3]{9a^4} \end{aligned}$$

답 ④

12

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{m}} = (3^{-3})^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{3}{m}} \quad \dots\dots ㉠$$

㉠이 자연수가 되도록 하는 정수 m 의 값은 $-1, -3$ 이므로 그 합은 $-1 + (-3) = -4$

답 ③

13

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[4]{3\sqrt{32} \times \sqrt[6]{4}} \\ &= \sqrt[12]{32 \times \sqrt[6]{4}} \\ &= \sqrt[12]{2^5 \times \sqrt[6]{2^2}} \\ &= 2^{\frac{5}{12}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

따라서 $A^n = (2^{\frac{3}{4}})^n = 2^{\frac{3}{4}n}$ 이고, n 은 자연수이므로

n 이 4의 배수일 때, A^n 은 정수가 된다.

그러므로 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

답 ②

14

$\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이려면 $a+1$, b 가 3의 배수이어야 하고,

$\sqrt[5]{\frac{3^{b+1}}{2^a}} = \frac{3^{\frac{b+1}{5}}}{2^{\frac{a}{5}}}$ 이 유리수이려면 a , $b+1$ 이 5의 배수이어야 한다.

따라서 a 는 5의 배수, $a+1$ 은 3의 배수이므로 a 의 최솟값은 5이고, b 는 3의 배수, $b+1$ 은 5의 배수이므로 b 의 최솟값은 9이다.

그러므로 $a+b$ 의 최솟값은 $5+9=14$

답 ③

15

$A = \sqrt{2}$, $B = \sqrt[3]{3}$, $C = \sqrt[4]{5}$, $D = \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$ 이라 하면 2, 3, 4, 6의 최소공배수는 12이므로 A, B, C, D 를 모두 12제곱한다.

$$A^{12} = (\sqrt{2})^{12} = \{(2)^2\}^6 = 2^6 = 64$$

$$B^{12} = (\sqrt[3]{3})^{12} = \{(3)^3\}^4 = 3^4 = 81$$

$$C^{12} = (\sqrt[4]{5})^{12} = \{(5)^4\}^3 = 5^3 = 125$$

$$D^{12} = (\sqrt[6]{7})^{12} = \{(7)^6\}^2 = 7^2 = 49$$

$$\text{이므로 } D^{12} < A^{12} < B^{12} < C^{12}$$

그런데 A, B, C, D 는 모두 양수이므로

$$D < A < B < C$$

따라서 $a = \sqrt[4]{5}$, $b = \sqrt[6]{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} a^{12} + b^{12} &= (\sqrt[4]{5})^{12} + (\sqrt[6]{7})^{12} \\ &= 5^3 + 7^2 = 125 + 49 = 174 \end{aligned}$$

답 ④

16

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{14}} = \sqrt[6]{14}, B = \sqrt[12]{a+1}, C = \sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6} \text{에서}$$

$$A = \sqrt[12]{14^2} = \sqrt[12]{196}, B = \sqrt[12]{a+1}, C = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

이므로 $A < B < C$ 가 되려면

$$\sqrt[12]{196} < \sqrt[12]{a+1} < \sqrt[12]{216}$$

그런데 a 가 자연수이므로

$$196 < a+1 < 216$$

$$195 < a < 215$$

따라서 구하는 자연수 a 의 개수는

$$215 - 195 - 1 = 19$$

답 ④

17

$$\sqrt[3]{3^2 \sqrt{2}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} = (3^4 \times 2)^{\frac{1}{6}} = 162^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{2}{6}} = (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{2} \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{3}{6}} = (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{6}} = 108^{\frac{1}{6}}$$

이므로 $72^{\frac{1}{6}} < 108^{\frac{1}{6}} < 162^{\frac{1}{6}}$

따라서 $M = \sqrt[3]{3^2 \sqrt{2}}$, $m = \sqrt{2 \sqrt[3]{3}}$ 이므로

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{3^4 \times 2}{2^3 \times 3^2} \right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^2}{2^2} \right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

답 ⑤

18

$7^{\frac{1}{x}} = 100$ 에서

$$7 = 100^x = 10^{2x}$$

$\frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 의 분자와 분모에 각각 10^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{(10^x - 10^{-x})10^x}{(10^x + 10^{-x})10^x} &= \frac{10^{2x} - 1}{10^{2x} + 1} \\ &= \frac{7 - 1}{7 + 1} \\ &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ③

19

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2z}$ 에서 $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2z}$ 이므로

$$\frac{z(x+y)}{xy} = \frac{3}{2}$$

한편 $a^x = b^y = 3^z$ 에서 $a^x = 3^z$, $b^y = 3^z$ 이므로

$$a = 3^{\frac{z}{x}}, b = 3^{\frac{z}{y}}$$

따라서 $ab = 3^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = 3^{\frac{z(x+y)}{xy}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$

답 ③

20

$$14 = \frac{42}{3} = \frac{42}{42^n} = 42^{1-n} \text{이므로}$$

..... ①

$$14^{\frac{m-2n}{1-n}} = (42^{1-n})^{\frac{m-2n}{1-n}}$$

$$= 42^{m-2n} = \frac{42^m}{42^{2n}}$$

..... ②

$$= 7 \times \frac{1}{3^2} = \frac{7}{9}$$

..... ③

답 $\frac{7}{9}$

채점 기준	배점 비율
① 14를 밑이 42인 수로 나타낸 경우	40%
② $14^{\frac{m-2n}{1-n}}$ 을 밑이 42인 수로 나타낸 경우	30%
③ 구하고자 하는 값을 구한 경우	30%

21

$x^2 + x^{-2} = 3$ 이므로

$$(x^2 - x^{-2})^2 = (x^2 + x^{-2})^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$$

$x > 1$ 에서 $x^2 - x^{-2} > 0$ 이므로

$$x^2 - x^{-2} = \sqrt{5}$$

따라서 $x^4 - x^{-4} = (x^2 + x^{-2})(x^2 - x^{-2}) = 3\sqrt{5}$

답 ⑤

22

$$\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \left(\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right)$$

$$= (x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{3}{4}})$$

$$= x - x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}$$

$$= (x - x^{-1}) + (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})$$

..... ①

그런데 $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1} = 3$ 이므로

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} - 2 = 3 - 2 = 1$$

..... ②

$$(x - x^{-1})^2 = (x + x^{-1})^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$$

$x > 1$ 에서 $x - x^{-1} > 0$ 이므로

$$x - x^{-1} = \sqrt{5}$$

..... ③

따라서

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= (x - x^{-1}) + (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \sqrt{5} + 1 \end{aligned}$$

..... ④

답 $\sqrt{5} + 1$

채점 기준	배점 비율
① 주어진 식을 정리한 경우	30%
② $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ 의 값을 구한 경우	20%
③ $x - x^{-1}$ 의 값을 구한 경우	30%
④ 구하고자 하는 값을 구한 경우	20%

23

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 의 양변을 제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$$

$$\text{즉 } a + a^{-1} = 8$$

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 8^2 - 4 = 60$$

$0 < a < 1$ 에서 $a - a^{-1} = a - \frac{1}{a} < 0$ 이므로

$$a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$$

$$\text{따라서 } \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = \frac{-2\sqrt{15}}{8} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

답 ③

24

빛이 태양에서 출발하여 지구까지 도착하는 데 걸리는 시간은

$$\frac{1.5 \times 10^8}{3.0 \times 10^5} = 0.5 \times 10^3 = 500(\text{초})$$

빛이 태양에서 출발하여 행성 A까지 도착하는데 걸리는 시간 t 는

$$t = 500 \times 2 \times 10^{\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{3.0 \times 10^5} = 500 \times 2 \times 10^{\frac{1}{2}} \text{에서}$$

$$a = 3.0 \times 10^5 \times 500 \times 2 \times 10^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3.0 \times 10^{3+5+\frac{1}{2}}$$

$$= 3.0 \times 10^{8+\frac{1}{2}}$$

답 ②

25

해수면에서는 $x=0$, $P=1000$ 이므로

$$1000=k \times a^0 \text{에서 } k=1000$$

$x=2000$ 일 때 $P=800$ 이므로

$$800=1000 \times a^{2000} \text{에서 } a^{2000}=\frac{4}{5}$$

$x=6000$ 일 때 $P=\omega$ (hPa)라 하면

$$\omega=1000 \times a^{6000}$$

$$=1000 \times (a^{2000})^3$$

$$=1000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$=1000 \times \frac{64}{125}$$

$$=512(\text{hPa})$$

답 ③

내신&수능 대비 실력 문제

pp.17~18

01 ① 02 ② 03 ③ 04 ③ 05 ④ 06 ③

07 ① 08 ⑤ 09 19 10 $25\sqrt{5}$ 11 $\frac{65}{8}$

01

$a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt[3]{9}$ 이므로

$$ab^3 \times (a^4b^3)^2 \div (ab)^8 = ab^3 \times a^8b^6 \div a^8b^8$$

$$= \frac{a^9b^9}{a^8b^8}$$

$$= ab$$

$$= \sqrt{8} \times \sqrt[3]{9}$$

$$= \sqrt[6]{(2^3)^3} \times \sqrt[6]{(3^2)^2}$$

$$= \sqrt[6]{2^9 \times 3^4}$$

따라서 $k=2^9 \times 3^4$

답 ①

02

$M[6]=6$ 에서 6의 6제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[6]{6}$, $-\sqrt[6]{6}$ 이므로 구멍이 2개이다.

$M[5\sqrt{2}]$ 는 $|5\sqrt{2}|$ 보다 작거나 같은 최대의 자연수이고,

$7=\sqrt[4]{49} < \sqrt[4]{50} < \sqrt[4]{64}=8$ 에서 $5\sqrt{2}$ 의 7제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 구멍은 1개이다.

$M[-9]$ 는 $|-9|=9$ 보다 작거나 같은 최대의 자연수이고, -9 의 9제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 구멍은 1개이다.

$M[-\sqrt[3]{180}]$ 은 $|\sqrt[3]{180}|=\sqrt[3]{180}$ 보다 작거나 같은 최대의 자연수이고, $5=125^{\frac{1}{3}} < 180^{\frac{1}{3}} < 216^{\frac{1}{3}}=6$ 에서 $-\sqrt[3]{180}$ 의 5제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 구멍은 1개이다.

3	●
4	● ●
6	● ●
$5\sqrt{2}$	●
-9	●
$-\sqrt[3]{180}$	●

따라서 이 카드의 구멍의 개수는

$$1+2+2+1+1+1=8$$

답 ②

03

$r^{10}=s^{10}=5$ 에서 $r < 0 < s$ 이므로

$$r=-\sqrt[10]{5}, s=\sqrt[10]{5}$$

$p^{10}=q^{10}=10$ 에서 $p < 0 < q$ 이므로

$$p=-\sqrt[10]{10}, q=\sqrt[10]{10}$$

따라서

$$\frac{pq}{rs} = \frac{-\sqrt[10]{10} \sqrt[10]{10}}{-\sqrt[10]{5} \sqrt[10]{5}} = \frac{-\sqrt[10]{10^2}}{-\sqrt[10]{5^2}} = \sqrt[10]{\left(\frac{10}{5}\right)^2} = \sqrt[10]{4}$$

답 ③

04

$$A=\sqrt[6]{500}=500^{\frac{1}{12}}$$

$$B=\sqrt[3]{24}=\{(24)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=24^{\frac{1}{6}}=(24^2)^{\frac{1}{12}}=576^{\frac{1}{12}}$$

$$C=\sqrt[8]{2^6}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{2^9}=512^{\frac{1}{12}}$$

이므로

$$A=500^{\frac{1}{12}}, B=576^{\frac{1}{12}}, C=512^{\frac{1}{12}}$$

이때 $500 < 512 < 576$ 이므로

$$A < C < B$$

따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수는 차례로 B, A이다.

답 ③

05

$$A=3^{\frac{3}{14}}, B=(\sqrt{5})^{\frac{3}{7}}, C=\sqrt[13]{5} \text{에서}$$

$$A=3^{\frac{3}{14}}, B=5^{\frac{3}{14}}, C=5^{\frac{1}{13}}$$

$$(i) A=3^{\frac{3}{14}}, B=5^{\frac{3}{14}} \text{에서}$$

$$A^{14}=3^3=27, B^{14}=5^3=125 \text{이므로}$$

$$A < B$$

$$(ii) B=5^{\frac{3}{14}}, C=5^{\frac{1}{13}} \text{에서}$$

13과 14의 최소공배수가 182이므로

$$B^{182}=5^{39}, C^{182}=5^{14}$$

$$C < B$$

(iii) $A=3^{\frac{3}{14}}, C=5^{\frac{1}{13}}$ 에서

13과 14의 최소공배수가 182이므로

$$A^{182}=3^{39}, C^{182}=5^{14}$$

그런데 $A=3^{39}=27^{13}=27 \times 27^{12}, C=5^{14}=25 \times 5^{12}$ 이므로

$$C < A$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $C < A < B$

답 ④

06

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{n}} = (3^{-3})^{\frac{4}{n}} = 3^{-\frac{12}{n}}$$

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{n}} = (2^{-6})^{\frac{3}{n}} = 2^{-\frac{18}{n}}$$

이므로 이 두 수가 모두 자연수가 되려면 $-\frac{12}{n}, -\frac{18}{n}$ 이 자연수
이어야 한다.

따라서 $n=-1, -2, -3, -6$ 이므로 그 합은

$$(-1) + (-2) + (-3) + (-6) = -12$$

답 ③

07

(i) $1 \leq n < 16$ 일 때

$$1^4 \leq n < 2^4 \text{이므로 } 1 \leq \sqrt[4]{n} < 2 \text{에서 } f(n)=1$$

$$\text{따라서 } f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(15)=1$$

(ii) $16 \leq n < 81$ 일 때

$$2^4 \leq n < 3^4 \text{이므로 } 2 \leq \sqrt[4]{n} < 3 \text{에서 } f(n)=2$$

$$\text{따라서 } f(16)=f(17)=f(18)=\cdots=f(80)=2$$

(iii) $81 \leq n < 256$ 일 때

$$3^4 \leq n < 4^4 \text{이므로 } f(n)=3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(k)$ 중에서

$f(n)=3$ 인 자연수의 개수를 p 라 하면

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$$

$$=1 \times 15 + 2 \times 65 + 3 \times p$$

$$=145+3p$$

따라서 $145+3p \geq 200$ 에서

$$p \geq \frac{55}{3} = 18.\times \times$$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은

$$80+19=99$$

답 ①

08

소리의 감쇄비가 -3 이므로

$$5^{-3} = \left(\frac{B}{A}\right)^{10} \text{에서}$$

$$\frac{B}{A} = 5^{-\frac{3}{10}}$$

양변에 5를 곱하면

$$\frac{5B}{A} = 5 \times 5^{-\frac{3}{10}}$$

$$\frac{5B}{A} = 5^{\frac{7}{10}} = 3$$

$$\text{즉 } \frac{B}{A} = \frac{3}{5}$$

따라서 $B = \frac{3}{5}A$ 이므로 벽을 투과한 소리의 크기는 투과하기 전 크

기의 $\frac{3}{5}$ 배이다.

답 ⑤

09

$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 = 4^2$$

$$a^1 + a^{-1} - 2 = 16$$

$$a + a^{-1} = 18$$

..... ①

따라서

$$\frac{a^2+a}{a^3+a^2} + \frac{a^3-a}{a^2-a}$$

$$= \frac{a(a+1)}{a^2(a+1)} + \frac{a(a^2-1)}{a(a-1)}$$

$$= \frac{a(a+1)}{a^2(a+1)} + \frac{a(a+1)(a-1)}{a(a-1)}$$

$$= \frac{1}{a} + a + 1 = a + a^{-1} + 1$$

..... ②

$$= 18 + 1 = 19$$

..... ③

답 19

채점 기준	배점 비율
① $a + a^{-1}$ 의 값을 구한 경우	30%
② 주어진 식을 간단히 한 경우	50%
③ 식의 값을 구한 경우	20%

10

5의 5제곱근이 a 이므로 $a^5=5$

..... ①

따라서

$$(a^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{5\sqrt{2}} \div \sqrt{a} \times a^8$$

$$= a^5 \div a^{\frac{1}{2}} \times a^8$$

$$= a^{5-\frac{1}{2}+8}$$

$$= a^{\frac{25}{2}}$$

..... ②

$$= (a^5)^{\frac{5}{2}}$$

$$= 5^{\frac{5}{2}} = 25\sqrt{5}$$

..... ③

답 $25\sqrt{5}$

채점 기준	배점 비율
① a^5 의 값을 구한 경우	20%
② 주어진 식을 간단히 한 경우	50%
③ 식의 값을 구한 경우	30%

11

$3^x = X$, $4^y = Y$ 라 하면 $9^x + 4^y = 4$ 에서

$$X^2 + Y = 4 \quad \dots\dots ①$$

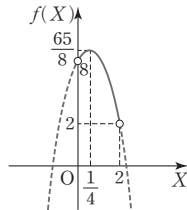
$X > 0$, $Y > 0$ 이므로

$$Y = 4 - X^2 = (2 - X)(2 + X) > 0$$

이때 $X > 0$ 이므로 $0 < X < 2$

따라서

$$\begin{aligned} 3^x + 2^{2y+1} &= 3^x + 2 \times 2^{2y} \\ &= X + 2Y \\ &= X + 2(4 - X^2) \\ &= -2X^2 + X + 8 \\ &= -2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{65}{8} \end{aligned}$$



$0 < X < 2$ 에서 $f(X) = -2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{65}{8}$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{65}{8} \quad \dots\dots ③$$

..... ②

..... ③

답 $\frac{65}{8}$

채점 기준	배점 비율
① 주어진 조건을 치환하여 나타낸 경우	30%
② 주어진 식을 완전제곱꼴로 나타낸 경우	50%
③ 주어진 식의 최댓값을 구한 경우	20%

2 로그

pp.22~30

01 ②	02 ④	03 ④	04 ③	05 8	06 ⑤
07 ③	08 ③	09 ①	10 ②	11 ②	12 ④
13 ②	14 ②	15 0.5105		16 47.4	17 ⑤
18 ④	19 ①	20 ④	21 10	22 60	23 5
24 ③	25 ⑤				

01

$\log_a \frac{1}{32} = 5$ 에서

$$a^5 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \text{이므로}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$\log_{\sqrt{2}} b = 5$ 에서

$$b = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a^5 b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times (4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2^5} \times 2^5 = 1$$

답 ②

02

밑의 조건에서

$$x - 1 > 0, x - 1 \neq 1 \text{이므로}$$

$$x > 1, x \neq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

진수의 조건에서

$$-x^2 + 6x > 0 \text{이므로}$$

$$x^2 - 6x < 0, x(x - 6) < 0$$

$$0 < x < 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 6$

따라서 정수 x 는 3, 4, 5이므로 그 합은

$$3 + 4 + 5 = 12$$

답 ④

03

밑의 조건에서

$$p - 1 > 0, p - 1 \neq 1 \text{이므로}$$

$$p > 1, p \neq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2px + 8p > 0$ 이어야

하므로 이차방정식 $x^2 - 2px + 8p = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = p^2 - 8p < 0$$

$$p(p - 8) < 0, 0 < p < 8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $1 < p < 2$ 또는 $2 < p < 8$

그런데 p 는 정수이므로

$$3 \leq p < 8$$

답 ④

04

$$\begin{aligned}
 & \log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2})^8 + 2\log_3(\sqrt{11}-\sqrt{2})^4 \\
 &= 8\{\log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2}) + \log_3(\sqrt{11}-\sqrt{2})\} \\
 &= 8\log_3(\sqrt{11}+\sqrt{2})(\sqrt{11}-\sqrt{2}) \\
 &= 8\log_3 9 = 8\log_3 3^2 \\
 &= 16\log_3 3 = 16
 \end{aligned}$$

답 ③

05

$$\begin{aligned}
 & 2\log_2 a^2 = \log_2 a^4, \\
 & 3\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = 3\log_2 \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \log_2 \frac{1}{a} \text{이므로} \\
 & 2\log_2 a^2 - \log_2 \frac{a^2}{4} + 3\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \\
 &= \log_2 a^4 - \log_2 \frac{a^2}{4} + \log_2 \frac{1}{a} \\
 &= \log_2 \left(a^4 \div \frac{a^2}{4} \times \frac{1}{a}\right) \\
 &= \log_2 \left(a^4 \times \frac{4}{a^2} \times \frac{1}{a}\right) \\
 &= \log_2 4a \\
 & \text{따라서 } \log_2 4a = 5 \text{이므로 } 4a = 2^5 = 32 \text{에서} \\
 & a = 8
 \end{aligned}$$

답 8

06

$$\begin{aligned}
 & \log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy = \frac{3}{2} \text{이므로} \\
 & xy = 2^{\frac{3}{2}} \\
 & \text{산술평균과 기하평균의 관계에 의하여} \\
 & x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \times 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \times 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}} \\
 & \text{이므로 } x + 2y \text{의 최솟값은 } 2^{\frac{9}{4}} \text{이다.} \\
 & \quad \quad \quad (\text{단, 등호는 } x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}} \text{일 때 성립}) \\
 & \text{따라서 } a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}} \text{이므로} \\
 & \frac{am}{b} = 2^{\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

07

$$\begin{aligned}
 & \log_3 5 \times \log_4 6 \times \log_5 7 \times \log_6 8 \times \log_7 9 \\
 &= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 4} \times \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \times \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 7} \\
 &= \frac{\log_{10} 8 \times \log_{10} 9}{\log_{10} 3 \times \log_{10} 4} \\
 &= \frac{\log_{10} 2^3 \times \log_{10} 3^2}{\log_{10} 3 \times \log_{10} 2^2} \\
 &= \frac{3\log_{10} 2 \times 2\log_{10} 3}{\log_{10} 3 \times 2\log_{10} 2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

답 ③

08

$$\begin{aligned}
 & \log_a a^2 b^3 = 0 \text{에서 } a^2 b^3 = a^0 = 1 \text{이므로} \\
 & a^8 b^{12} = (a^2 b^3)^4 = 1 \\
 & \text{한편 } \log_a a^2 b^3 = 0 \text{에서 } \log_a a^2 + \log_a b^3 = 0 \text{이므로} \\
 & 2 + 3\log_a b = 0, 3\log_a b = -2 \\
 & \text{즉 } \log_a b = -\frac{2}{3} \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_b \sqrt[4]{a} &= \frac{\log_a \sqrt[4]{a}}{\log_a b} = \frac{\log_a a^{\frac{1}{4}}}{\log_a b} = \frac{\frac{1}{4}}{\log_a b} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a^8 b^{12} + \log_b \sqrt[4]{a} = 1 + \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{5}{8}$$

답 ③

09

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2} \\
 &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2} \\
 &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4} \\
 &= \log_4(\log_5 7) \\
 & \text{따라서 } 4^a = \log_5 7
 \end{aligned}$$

답 ①

10

$$\begin{aligned}
 & \log_3 7 = \frac{1}{a} \text{에서 } \log_7 3 = a \\
 & (7\sqrt{7})^x = (3\sqrt{3})^5 \text{에서 로그의 정의에 의하여} \\
 & x = \log_{7\sqrt{7}}(3\sqrt{3})^5 \\
 &= \log_{7^{\frac{3}{2}}} 3^{\frac{15}{2}} \\
 &= 5\log_7 3 \\
 &= 5a
 \end{aligned}$$

답 ②

11

$$\begin{aligned}
 \log_{24} \sqrt{18} &= \frac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} \text{에서} \\
 \log_5 \sqrt{18} &= \frac{1}{2} \log_5 18 = \frac{1}{2} \log_5 (2 \times 3^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\log_5 2 + 2\log_5 3) = \frac{1}{2} (a + 2b) \\
 \log_5 24 &= \log_5 (2^3 \times 3) = 3\log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b \\
 & \text{따라서} \\
 \log_{24} \sqrt{18} &= \frac{\log_5 \sqrt{18}}{\log_5 24} = \frac{\frac{1}{2}(a+2b)}{3a+b} = \frac{a+2b}{2(3a+b)}
 \end{aligned}$$

답 ②

12

$$A = \log_2 20 - \log_2 5 = \log_2 \frac{20}{5} = \log_2 4 = 2$$

$$B = 2^{\log_5 3} = 3^{\log_5 2} = 3$$

$$C = \frac{\log_2 16}{\log_{\sqrt{3}} 9} = \frac{\log_2 2^4}{\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^2} = \frac{4 \log_2 2}{4 \log_3 3} = 1$$

따라서 $C < A < B$

답 ④

13

$$A = \log_4 2\sqrt{2} = \frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^2} = \frac{\frac{3}{2} \log_2 2}{2 \log_2 2} = \frac{3}{4}$$

$$B = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1}{2} \times \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\log_2 2}{\frac{1}{2} \log_2 2} = 1$$

$$\begin{aligned} C &= \log_2 (\sqrt{8} \times 2^{\frac{\sqrt{10}}{4}}) - 3^{\log_5 \frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8} + \log_2 2^{\frac{\sqrt{10}}{4}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_5 3} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2^3 + \frac{\sqrt{10}}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{10}}{4} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{4} \end{aligned}$$

$$A^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, B^2 = 1^2 = 1, C^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} \text{에서}$$

$$\frac{9}{16} < \frac{5}{8} < 1 \text{이므로 } A^2 < C^2 < B^2$$

따라서 $A < C < B$

답 ②

14

$$a^2 = c^4 \text{에서 } c = a^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \log_a c = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^3 \text{에서 } a = b^{\frac{3}{2}}$$

$$B = \log_b a = \log_b b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$b^3 = c^4 \text{에서 } b = c^{\frac{4}{3}}$$

$$C = \log_c b = \log_c c^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

따라서 $A < C < B$

답 ②

15

$$\begin{aligned} 4 \log 3 + \log 2 - \log 50 &= \log 3^4 + \log 2 - \log 50 \\ &= \log \frac{3^4 \times 2}{50} = \log \frac{3^4 \times 2^2}{100} \\ &= \log 3.24 = 0.5105 \end{aligned}$$

답 0.5105

16

$$\log 20 = 1.3010 \text{에서}$$

$$\log 20 = \log(10 \times 2) = 1 + \log 2 = 1.3010 \text{이므로}$$

$$\log 2 = 0.3010$$

$$\log x^{20} = 33.514 \text{에서 } 20 \log x = 33.514 \text{이므로}$$

$$\log x = 1.6757$$

$$= 1 + 0.6757$$

$$= 1 + 0.3010 + 0.3747$$

$$= \log 10 + \log 2 + \log 2.37$$

$$= \log(10 \times 2 \times 2.37)$$

$$= \log 47.4$$

따라서 $x = 47.4$

답 47.4

17

$$5^{40} = a \times 10^n \text{에서 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log 5^{40} = \log(a \times 10^n) = n + \log a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$1 < a < 10 \text{이므로 } 0 < \log a < 1$$

$$\log 5^{40} = 40 \log 5 = 40(1 - \log 2)$$

$$= 40(1 - 0.3010)$$

$$= 40 \times 0.6990$$

$$= 27.96$$

$$\text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } n = 27, \log a = 0.96$$

따라서 $\log a$ 의 값은 0.96이다.

답 ⑤

18

$$4^{10} \times 3^{30} = 2^{20} \times 3^{30} \text{이므로}$$

$$\log(4^{10} \times 3^{30}) = \log(2^{20} \times 3^{30})$$

$$= 20 \log 2 + 30 \log 3$$

$$= 20 \times 0.3010 + 30 \times 0.4771$$

$$= 20.333$$

따라서 $\log(4^{10} \times 3^{30})$ 의 정수 부분이 20이므로 $4^{10} \times 3^{30}$ 은 21자리
의 정수이다.

답 ④

19

$\frac{A}{B}$ 는 소수 3번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로

$$10^{-3} \leq \frac{A}{B} < 10^{-2}$$

$$-3 \leq \log \frac{A}{B} < -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$= n + a - (10 + a)$$

$$= n - 10 \text{ (정수)}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \log \frac{A}{B} = -3 \text{이므로}$$

$$n - 10 = -3$$

따라서 $n = 7$

답 ①

20

A^{100} 이 110자리의 자연수이므로 $\log A^{100}$ 의 정수 부분은 109이다.

즉 $109 \leq \log A^{100} < 110$ 에서

$$\frac{109}{100} \leq \log A < \frac{110}{100} \text{ 이므로}$$

$$1.09 \leq \log A < 1.10 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$\log \frac{1}{A^8} = -8 \log A \text{ 이므로}$$

$$㉠ \text{에서 } -8.8 < -8 \log A \leq -8.72 \text{ 이므로}$$

$$-9 + 0.2 < \log \frac{1}{A^8} \leq -9 + 0.28$$

따라서 $\log \frac{1}{A^8}$ 의 정수 부분이 -9 이므로 $\frac{1}{A^8}$ 은 소수 9번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

그러므로 $n=9$

답 ④

21

$\log A$ 의 소수 부분과 $\log \frac{A}{B}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\begin{aligned} \log A - \log \frac{A}{B} &= \log A - (\log A - \log B) \\ &= \log B \text{ (정수)} \end{aligned}$$

이때 B 는 두 자리의 자연수이므로

$$1 \leq \log B < 2 \text{에서 } \log B = 1$$

따라서 $B=10$

답 10

22

$$\log A = \log(10^m \times \sqrt[5]{10^n})$$

$$= \log(10^m \times 10^{\frac{n}{5}})$$

$$= \log 10^{m+\frac{n}{5}}$$

$$= m + \frac{n}{5}$$

이때 $\log A$ 의 정수 부분이 $m+2$ 이므로

$$\log A = m + 2 + \left(\frac{n}{5} - 2\right) \text{에서}$$

$$0 \leq \frac{n}{5} - 2 < 1, \quad 2 \leq \frac{n}{5} < 3$$

$$10 \leq n < 15$$

따라서 자연수 n 은 10, 11, 12, 13, 14이므로 그 합은

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$$

답 60

23

$$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$$

이므로 $\log 2^{30}$ 의 소수 부분은 0.03이다.

$$\log 1 = 0, \quad \log 2 = 0.3010 \text{ 이므로}$$

$$\log 1 < 0.03 < \log 2$$

$$9 + \log 1 < 9.03 < 9 + \log 2$$

$$\log(1 \times 10^9) < \log 2^{30} < \log(2 \times 10^9)$$

따라서 $1 \times 10^9 < 2^{30} < 2 \times 10^9$ 이므로 2^{30} 의 최고 자리의 숫자는 1이다.

즉 $a=1$

$$\text{한편 } 2^1=2, \quad 2^2=4, \quad 2^3=8, \quad 2^4=16, \quad 2^5=32, \quad 2^6=64, \quad 2^7=128,$$

$$2^8=256, \quad \cdots$$

이므로 2^n 의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 반복된다.

$30=4 \times 7 + 2$ 이므로 2^{30} 의 일의 자리의 숫자는 2^2 의 일의 자리의 숫자와 같다.

즉 $b=4$

$$\text{그러므로 } a+b=1+4=5$$

답 5

24

2015년도의 인구가 12만 명이므로

$$120000 = P_0 \times 3^{kt} \text{에서 } 3^{kt} = \frac{120000}{P_0} \quad \cdots \cdots ㉠$$

또한 2013년도에서 5년이 지난 2018년도의 인구는 96만 명이므로

$$960000 = P_0 \times 3^{k(t+5)} = P_0 \times 3^{kt} \times 3^{5k} \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$960000 = P_0 \times \frac{120000}{P_0} \times 3^{5k} \text{에서 } 3^{5k} = 8 \text{ 이므로}$$

$$5k = \log_3 8$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{5} \log_3 8 = \log_3 \sqrt[5]{8}$$

답 ③

25

음원으로부터 $10\sqrt{10}r$ (cm) 떨어진 지점에서의 소리의 상대적 세기 $P(10\sqrt{10}r)$ 는

$$P(10\sqrt{10}r) = 10 \left\{ 12 + \log \frac{I}{(10\sqrt{10}r)^2} \right\}$$

$$= 10 \left\{ 12 + \log \left(\frac{I}{r^2} \times \frac{1}{10^3} \right) \right\}$$

$$= 10 \left(12 + \log \frac{I}{r^2} - 3 \right)$$

$$= 10 \left(12 + \log \frac{I}{r^2} \right) - 30$$

$$= P(r) - 30$$

따라서 소리의 상대적 세기는 30(데시벨)만큼 감소한다.

답 ⑤

01 ① 02 ③ 03 ① 04 ① 05 ③ 06 ②

07 ④ 08 $\frac{1}{125}$ 09 ④ 10 $\frac{32}{3}$ 11 1 12 3

01

밑의 조건에서

$$x-4>0, x-4\neq 1 \text{ 이므로}$$

$$x>4, x\neq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

진수의 조건에서

$$-x^2+12x-20>0 \text{ 이므로}$$

$$x^2-12x+20<0, (x-2)(x-10)<0$$

$$2<x<10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $4<x<5$ 또는 $5<x<10$

따라서 정수 x 는 6, 7, 8, 9이므로 그 합은

$$6+7+8+9=30$$

답 ①

02

$$20^x=3 \text{ 이라 하면 } x=\log_{20} 3$$

따라서

$$f(3)=\frac{1}{\log_{20} 3}-\log_3 5$$

$$=\log_3 20-\log_3 5$$

$$=\log_3 \frac{20}{5}$$

$$=\log_3 4$$

$$=2\log_3 2$$

답 ③

03

$$a^x=b^{\frac{y}{2}}=c^{\frac{z}{3}}=5^3 \text{ 이므로}$$

$$a^x=5^3 \text{ 에서 } x=\log_a 5^3=3\log_a 5$$

$$\approx \frac{1}{x}=\frac{1}{3}\log_5 a$$

$$b^{\frac{y}{2}}=5^3 \text{ 에서 } \frac{y}{2}=\log_b 5^3=3\log_b 5$$

$$\approx \frac{2}{y}=\frac{1}{3}\log_5 b$$

$$c^{\frac{z}{3}}=5^3 \text{ 에서 } \frac{z}{3}=\log_c 5^3=3\log_c 5$$

$$\approx \frac{3}{z}=\frac{1}{3}\log_5 c$$

따라서

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{3}\log_5 a+\frac{1}{3}\log_5 b+\frac{1}{3}\log_5 c$$

$$=\frac{1}{3}(\log_5 a+\log_5 b+\log_5 c)$$

$$=\frac{1}{3}\log_5 abc$$

$$=\frac{1}{3}\log_5 5^6$$

$$=\frac{2}{5}$$

답 ①

04

$$\begin{aligned} \frac{\log_5 8+\log_5 0.005}{\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^3} &= \frac{\log_5 (8 \times 0.005)}{\log_2 (4^{-1})^3} \\ &= \frac{\log_5 0.04}{\log_2 4^{-3}} = \frac{\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)^2}{\log_2 2^{-6}} \\ &= \frac{\log_5 5^{-2}}{\log_2 2^{-6}} = \frac{-2\log_5 5}{-6\log_2 2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ①

05

$$7^M=x, 7^N=y \text{ 에서 } M=\log_7 x, N=\log_7 y$$

$$\textcircled{㉠}. M+N=\log_7 x+\log_7 y=\log_7 xy \text{ (참)}$$

$$\textcircled{㉡}. M^N=(\log_7 x)^{\log_7 y}$$

$$N^M=(\log_7 y)^{\log_7 x}$$

$$\textcircled{㉢}. M^N \neq N^M \text{ (거짓)}$$

$$\textcircled{㉣}. \frac{N}{M}=\frac{\log_7 y}{\log_7 x}=\log_x y \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣이다.

답 ③

06

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-\frac{2}{\sqrt{7}}} &= \frac{3}{\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2} = \frac{3\sqrt{7}(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} \\ &= \sqrt{7}(\sqrt{7}+2)=7+2\sqrt{7} \end{aligned}$$

따라서

$$\log_3 \left(7-2\sqrt{7}+\frac{3}{1-\frac{2}{\sqrt{7}}} \right) = \log_3 (7-2\sqrt{7}+7+2\sqrt{7})$$

$$= \log_3 14$$

$$= \log_3 (2 \times 7)$$

$$= \log_3 2 + \log_3 7$$

$$= a+b$$

답 ②

07

$\log a=x, \log b=y$ 라 하자.

ab 의 정수 부분이 세 자리이므로 $\log ab$ 의 정수 부분은 2이다.

$$\log ab = \log a + \log b = x+y \text{ 이므로}$$

$$2 \leq x+y < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

같은 방법으로 $a\sqrt{b}$ 의 정수 부분이 두 자리이므로

$\log a\sqrt{b}$ 의 정수 부분은 1이다.

$$\log a\sqrt{b} = \log a + \frac{1}{2}\log b = x + \frac{1}{2}y \text{ 이므로}$$

$$1 \leq x + \frac{1}{2}y < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{7}-\textcircled{8}\text{을 하면 } 0 < \frac{1}{2}y < 2, 0 < y < 4$$

따라서 $\log b$ 의 정수 부분이 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3으로 모두 4개이다. [답] ④

08

$$\begin{aligned}\log \frac{2}{x} &= 2.3979 = 2 + 0.3979 \\ &= 2 + \log 2.5 \\ &= \log 100 + \log 2.5 \\ &= \log 250\end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{x} = 250$ 이므로 $x = \frac{1}{125}$ [답] $\frac{1}{125}$

09

해수면의 기압을 A 라 하면 고도가 h km인 지점의 기압은

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4.5}} \text{ (kPa)}$$

기압이 80 kPa, 10 kPa인 두 지점의 고도를 각각 h_1 km, h_2 km라 하면

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_1}{4.5}} = 80 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_2}{4.5}} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \div \textcircled{8}\text{을 하면 } \frac{A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_1}{4.5}}}{A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_2}{4.5}}} = \frac{80}{10}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h_1}{4.5} - \frac{h_2}{4.5}} = 8, 2^{\frac{h_2 - h_1}{4.5}} = 8$$

로그의 정의에 의해

$$\frac{h_2 - h_1}{4.5} = \log_2 8 = 3 \text{이므로}$$

$$a = h_2 - h_1 = 4.5 \times 3 = 13.5 \quad \text{[답] ④}$$

10

$$\sqrt[3]{a^2} = b \text{에서 } a^{\frac{2}{3}} = b \text{이므로}$$

$$\log_a b = \log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sqrt[5]{d} = c^2 \text{에서 } d^{\frac{1}{5}} = c^2, \text{ 즉 } d = c^{10} \text{이므로}$$

$$\log_c d = \log_c c^{10} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } \log_a b + \log_c d = \frac{2}{3} + 10 = \frac{32}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

[답] $\frac{32}{3}$

채점 기준	배점 비율
① $\log_a b$ 의 값을 구한 경우	40%
② $\log_c d$ 의 값을 구한 경우	40%
③ 구하고자 하는 값을 구한 경우	20%

11

$$(\log_2 x)^2 + (\log_3 y - 1)^2 = 0 \text{에서}$$

$$\log_2 x = 0, \log_3 y = 1 \text{이므로} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = 1, y = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서

$$\log_{y-1} 2y - \log_{x+1} 3x$$

$$= \log_2 6 - \log_2 3$$

$$= \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

[답] 1

채점 기준	배점 비율
① $\log_2 x, \log_3 y$ 의 값을 각각 구한 경우	40%
② x, y 의 값을 각각 구한 경우	10%
③ 구하고자 하는 값을 구한 경우	50%

12

$$\log x^2 = 2 \log x = 6 + \frac{2}{n}$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{n+1}{2n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n = 2$ 일 때

$\log x^2$ 의 정수 부분이 7, 소수 부분이 0이고,

$\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분이 1, 소수 부분이 $\frac{3}{4}$ 이므로

조건을 만족시키지 않는다. ②

(ii) $n > 2$ 일 때

$\log x^2$ 과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분이 각각 $\frac{2}{n}, \frac{n+1}{2n}$ 이므로

$$\frac{2}{n} = \frac{n+1}{2n} \text{에서 } n^2 + n = 4n$$

$$n^2 - 3n = 0, n(n-3) = 0$$

그런데 $n > 2$ 이므로 $n = 3$ ③

[답] 3

채점 기준	배점 비율
① $\log x^2, \log \sqrt{x}$ 를 각각 n 에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
② $n \neq 2$ 임을 보인 경우	30%
③ n 의 값을 구한 경우	40%

3 지수함수

pp.36~42

- 01 ④ 02 5 03 ③ 04 ④ 05 ④ 06 ②
 07 ③ 08 ① 09 $\frac{1}{4}$ 10 ⑤ 11 ③ 12 $\frac{3}{2}$
 13 ④ 14 ① 15 ② 16 ① 17 4 18 ①
 19 ②

01

$$f(x) = a^x \text{에서}$$

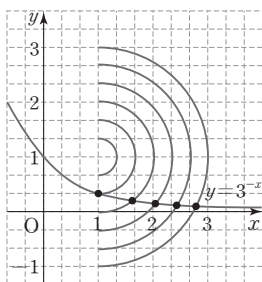
$$f(-2) = a^{-2} = m, f(3) = a^3 = n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= a^0 = a^{-3} \times a^3 \\ &= (a^{-2})^{\frac{3}{2}} \times a^3 \\ &= m^{\frac{3}{2}} n = \sqrt{m^3 n} \end{aligned}$$

답 ④

02

$y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 두 점 $(0, 1), (1, \frac{1}{3})$ 을 지나므로 교점의 개수는 5이다.



답 5

03

세 직선이 같은 간격이므로 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 $p-d, p, p+d$ 라 하면

$$a^{p-d} = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a^{p+d} = 9\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 점 B의 y 좌표는 a^p 이므로

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$a^{p-d} \times a^{p+d} = a^{2p} = (\sqrt{3} \times 9\sqrt{3}) = 27$$

$$\text{그런데 } a^p > 0 \text{이므로 } a^p = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

답 ③

04

ㄱ. $y = 4^x - 1$ 의 그래프는 $y = 4^x = (2^x)^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = 2^x$ 의 그래프와는 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $y = 2(2^{x-1} + 1) = 2^x + 2$ 이므로 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 겹쳐진다.

ㄷ. $y = 3 \times 2^x = 2^{\log_2 3} \times 2^x = 2^{x + \log_2 3}$ 이므로 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\log_2 3$ 만큼 평행이동하면 겹쳐진다.

따라서 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

05

지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = 2^{-x}$, 지수함수 $y = 2^{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y - n = 2^{-(x-m)} \text{이므로}$$

$$g(x) = 2^{-x+m} + n$$

$$\{x | g(x) = -2x + 5\} = \{-1, 0\} \text{에서}$$

$$g(-1) = 7, g(0) = 5 \text{이므로}$$

$$g(-1) = 2^{1+m} + n = 7 \text{에서 } 2 \times 2^m + n = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(0) = 2^m + n = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $2^m = 2$ 에서 $m = 1$

$m = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $2 + n = 5$ 이므로 $n = 3$

따라서 $m + n = 4$

답 ④

06

$$A = \sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$$

$$B = \sqrt{\sqrt{27}} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$C = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{5}{12}} = (3^{-2})^{-\frac{5}{12}} = 3^{\frac{5}{6}}$$

$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ 이고 밑 3은 1보다 크므로

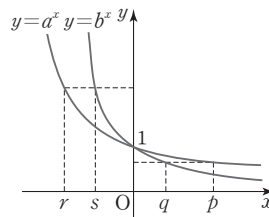
$$3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{4}{5}} < 3^{\frac{5}{6}}$$

따라서 $B < A < C$

답 ②

07

$0 < b < a < 1$ 이므로 두 함수 $y = a^x, y = b^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 두 양수 p, q 에 대하여 $a^p = b^q$ 이면 $p > q$ 이다.

ㄱ. 위의 그림에서 $q > 1$ 이면 $p > 1$ 이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $p > 1$ 이지만 $0 < q < 1$ 일 수도 있다. (거짓)

ㄷ. 위의 그림에서 $r < 0$ 이고 $a^r = b^s$ 이면 $r < s < 0$ 이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

08

주어진 조건에서 $a \neq 1$, $b \neq 1$ 이다.

자연수 n 에 대하여 $a^n < b^n$ 이므로 $a < b$

(i) $0 < a < b < 1$ 일 때

① $m > n$ 이면 $a^m < a^n$, $b^m < b^n$

② $m < n$ 이면 $a^m > a^n$, $b^m > b^n$

그런데 ①, ②는 모두 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1 < a < b$ 일 때

① $m > n$ 이면 $a^m > a^n$, $b^m > b^n$

② $m < n$ 이면 $a^m < a^n$, $b^m < b^n$

그런데 ①, ②는 모두 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a < 1 < b$

$a < 1 < b$ 인 경우에는 $b^n < b^m$ 이므로 $n < m$ 이고, 이때에는
 $a^m < a^n$ 도 성립한다.

따라서 $n < m$

그러므로 $a < 1 < b$, $m > n$ 이다.

답 ①

09

지수함수 $y = 2^{x-1} - 1$ 의 그래프는 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동한 그래프이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

최댓값은 $x = 2$ 일 때 $2^{2-1} - 1 = 1$

최솟값은 $x = -1$ 일 때 $2^{-1-1} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

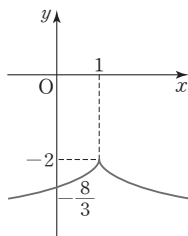
10

함수 $f(x) = 3^{-|x-1|} - 3$ 의 그래프는

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한
것으로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 최댓값은 -2이다.



답 ⑤

11

$$2^{1-x} = \frac{2}{2^x} > 0, 2^{1+x} = 2 \times 2^x > 0 \text{이므로}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = \frac{2}{2^x} + 2 \times 2^x + k \geq 2\sqrt{\frac{2}{2^x} \times 2 \times 2^x} + k = k + 4$$

(단, 등호는 $\frac{2}{2^x} = 2 \times 2^x$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

따라서 $k + 4 = 10$ 이므로 $k = 6$

답 ③

12

$$2^{2x+3} - 4^x = 2^{2x} \times 2^3 - (2^2)^x$$

$$= 8 \times 2^{2x} - 2^{2x}$$

$$= 7 \times 2^{2x}$$

..... ①

$$56 = 7 \times 2^3$$

..... ②

따라서 주어진 방정식은 $7 \times 2^{2x} = 7 \times 2^3$ 이므로

$$2x = 3$$

$$\text{그러므로 } x = \frac{3}{2}$$

..... ③

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	배점 비율
① 좌변을 밑이 2인 지수형태로 나타낸 경우	40%
② 56을 밑이 2인 지수형태로 나타낸 경우	30%
③ x의 값을 구한 경우	30%

13

$$4^x - 7 \times 2^{x+1} + 32 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 14 \times 2^x + 32 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)라 하면 주어진 방정식은

$$t^2 - 14t + 32 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면 2^α , 2^β 은 방정식 ①의 두 근
이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \times 2^\beta = 32, 2^{\alpha+\beta} = 2^5$$

따라서 $\alpha + \beta = 5$

답 ④

14

$$x + y = 3 \text{이므로 } 3^{x+y} = 3^x \times 3^y = 27$$

$3^x = a$, $3^y = b$ 라 하면

$$\begin{cases} 3^x \times 3^y = 27 \\ 3^x + 3^y = 12 \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} ab = 27 \\ a + b = 12 \end{cases}$$

이때 a , b 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 - 12t + 27 = 0$, 즉
 $(t-3)(t-9) = 0$ 의 두 근이다.

따라서 $\begin{cases} a=3 \\ b=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases}$ 이므로

$$\begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^y = 9 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^y = 3 \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

그러므로 $|a - b| = 1$

답 ①

15

$$125^{x^2-x} = (5^3)^{x^2-x} = 5^{3x^2-3x},$$

$$0.2^{5x-8} = (5^{-1})^{5x-8} = 5^{-5x+8} \text{이므로}$$

$$\text{주어진 부등식은 } 5^{3x^2-3x} \leq 5^{-5x+8}$$

$$\text{밑 5가 1보다 크므로 } 3x^2-3x \leq -5x+8$$

$$3x^2+2x-8 \leq 0, (x+2)(3x-4) \leq 0$$

$$\text{따라서 } -2 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{그러므로 정수 } x \text{는 } -2, -1, 0, 1 \text{이므로 그 합은}$$

$$(-2) + (-1) + 0 + 1 = -2$$

답 ②

16

$$3^{x+1} - 10\sqrt{3^x} + 3 < 0 \text{에서}$$

$$3(\sqrt{3^x})^2 - 10\sqrt{3^x} + 3 < 0$$

$$\sqrt{3^x} = 3^{\frac{x}{2}} = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$\text{주어진 부등식은 } 3t^2 - 10t + 3 < 0$$

$$(3t-1)(t-3) < 0, \frac{1}{3} < t < 3$$

$$3^{-1} < 3^{\frac{x}{2}} < 3$$

$$\text{밑 3이 1보다 크므로 } -1 < \frac{x}{2} < 1$$

$$\text{따라서 } -2 < x < 2 \text{이므로 } \alpha = -2, \beta = 2$$

$$\text{그러므로 } \alpha\beta = -4$$

답 ①

17

$$4^x + 2^{x+1} + 2k > 8 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 + 2 \times 2^x + 2k > 8$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$\text{주어진 부등식은 } t^2 + 2t + 2k - 8 > 0$$

$$\text{이때 } f(t) = t^2 + 2t + 2k - 8 \text{이라 하면}$$

$$f(t) = t^2 + 2t + 2k - 8$$

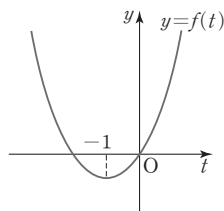
$$= (t+1)^2 + 2k - 9$$

$$\text{모든 양수 } t \text{에 대하여 } f(t) > 0 \text{이 성립하}$$

$$\text{려면 } f(0) = 2k - 8 \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$2k - 8 \geq 0 \text{이므로 } k \geq 4$$

$$\text{따라서 정수 } k \text{의 최솟값은 4이다.}$$



답 4

18

$$t = 20^\circ\text{C}, w_A = 20 \text{ g}, w_B = 20 \text{ g이므로}$$

$$Q_A = 0.01 \times 20^{1.25} \times 20^{0.25}$$

$$= 0.01 \times 20^{1.5}$$

$$Q_B = 0.05 \times 20^{0.75} \times 20^{0.30}$$

$$= 0.05 \times 20^{1.05}$$

$$\text{따라서 } Q_A = kQ_B \text{에서}$$

$$k = \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{0.01 \times 20^{1.5}}{0.05 \times 20^{1.05}} \\ = \frac{1}{5} \times 20^{0.45}$$

답 ①

19

이 시행을 n 번 반복할 때, 두 그릇 A, B에 담긴 물의 양은 각각 $400 \times (0.3)^n$ (g), $10 \times (1.2)^n$ (g)이므로 다음 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$800 \times 400 \times (0.3)^n < 10 \times (1.2)^n$$

$$\left(\frac{1.2}{0.3}\right)^n > \frac{800 \times 400}{10}$$

$$4^n > 32000, 4^{n-2} > 2000$$

$$4^5 = 1024, 4^6 = 4096 \text{이므로}$$

$$n-2 \geq 6 \text{에서 } n \geq 8$$

따라서 이 시행을 최소한 8번 반복해야 한다.

답 ②

내신&수능 대비 실력 문제

pp.43~44

01 ⑤	02 2	03 ④	04 ③	05 ③	06 ④
07 ⑤	08 1	09 3	10 -9	11 8	12 7

01

$$3^a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \text{이므로 } 3^{3a} = 2$$

$$2^b = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \text{이므로 } 2 = 3^{\frac{1}{2b}}$$

$$\text{즉 } 3a = \frac{1}{2b} \text{이므로 } ab = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } f(ab)g(ab) = 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{6}$$

답 ⑤

02

점 C의 x 좌표가 1이므로 두 점 A, C의 y 좌표는 2이다.

또 두 점 A, D의 x 좌표가 a 이므로

$$4^a = 2, 2^{2a} = 2$$

$$\text{즉 } 2a = 1 \text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

이때 두 점 B, D의 y 좌표는 $2^{\frac{1}{2}}$ 이고, 두

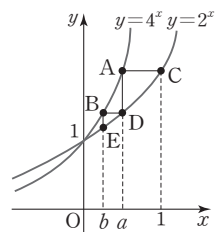
점 B, E의 x 좌표가 b 이므로

$$4^b = 2^{\frac{1}{2}}, 2^{2b} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{즉 } 2b = \frac{1}{2} \text{에서 } b = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

답 2



03

$$A = \sqrt[3]{0.25} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = (2^4\sqrt{2})^{-3} = (2^{\frac{5}{4}})^{-3} = 2^{-\frac{15}{4}}$$

$$C = \frac{8}{(0.125)^{-2}} = 8 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

이때 $-\frac{15}{4} < -3 < -\frac{2}{3}$ 이고 함수 $y=2^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$B < C < A$$

답 ④

04

$$\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}}, \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{25} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} \text{이므로 } 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3 < 5 \text{이므로 } 3^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{4}} \text{이고 } 8 < 9 \text{이므로}$$

$$8^{\frac{1}{4}} < 9^{\frac{1}{4}}, \text{ 즉 } 2^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{따라서 } 5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$$

답 ③

05

$$\begin{aligned} y &= 3 \times 4^{x+1} - 2 \\ &= 4^{\log_4 3} \times 4^{x+1} - 2 \\ &= 4^{x+1+\log_4 3} - 2 \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=2^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-1-\log_4 3$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

즉 점 $(0, 0)$ 은 이 평행이동에 의해 점 $(-1-\log_4 3, -2)$ 로 옮겨진다.

따라서 $m = -1-\log_4 3, n = -2$ 이므로

$$m-n = -1-\log_4 3 - (-2) = 1-\log_4 3 = \log_4 \frac{4}{3}$$

답 ③

06

$y=a^x+b$ 의 그래프는 $y=a^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이고, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$0 < a < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

그래프가 원점을 지나므로 $0=a^0+b$ 에서

$$b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -1 < a+b < 0, -1 < 2a+b < 1$$

⑤ $y=a^x$ 의 그래프는 x 축이 점근선이므로 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 $y=a^x+b$ 의 그래프의 점근선은 $y=b$ 이다.

따라서 $y=a^x+b$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 는 만나지 않는다.

그러므로 옳은 것은 ④이다.

답 ④

07

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ -x+1 & (0 \leq x \leq 2), g(x)=2^x \text{에서} \\ -1 & (x > 2) \end{cases}$$

(i) $x < 0$ 일 때, $f(x)=1$ 이므로

$$y=2^{f(x)}=2$$

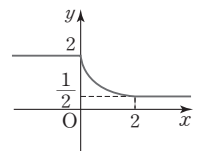
(ii) $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)=-x+1$ 이므로

$$y=2^{f(x)}=2^{-(x-1)}$$

(iii) $x > 2$ 일 때, $f(x)=-1$ 이므로

$$y=2^{f(x)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ⑤

08

$p < q$ 인 임의의 실수 p, q 에 대하여 $a^p > a^q$ 이라면

$0 < a < 1$ 이어야 하므로

$$0 < \frac{2}{3}x^2 - x + 1 < 1$$

$$(i) \frac{2}{3}x^2 - x + 1 > 0 \text{에서 } 2x^2 - 3x + 3 > 0$$

이차방정식 $2x^2 - 3x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 3 < 0 \text{이므로}$$

부등식 $2x^2 - 3x + 3 > 0$ 의 해는 x 는 모든 실수이다.

$$(ii) \frac{2}{3}x^2 - x + 1 < 1 \text{에서 } \frac{2}{3}x^2 - x < 0$$

$$\frac{2}{3}x\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0, 0 < x < \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 $0 < x < \frac{3}{2}$ 이므로 조건을 만족시키는 모든 정수 x 의 값은 1이다.

답 1

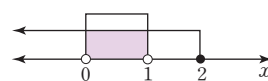
09

$$x^{3x} \geq x^{x+4} \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$3x \leq x+4 \text{이므로 } 2x \leq 4$$

$$\text{즉 } x \leq 2$$



$$\text{따라서 } 0 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $x=1$ 일 때

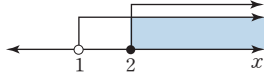
$$1 \geq 1 \text{이므로 성립한다.}$$

$$\text{따라서 } x=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$3x \geq x + 4 \text{ 이므로 } 2x \geq 4$$

$$\text{즉 } x \geq 2$$



따라서 $x \geq 2$ ㉔

㉑, ㉒, ㉔에서

$$S = \{x \mid 0 < x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2\}$$

따라서 집합 S 의 원소는 $\frac{1}{2}$, 1, 4의 3개이다.

답 3

10

$$y = \frac{1}{3}(3^{2x} - 6) = 3^{2x-1} - 2$$

$$= (3^2)^{x-\frac{1}{2}} - 2 = 9^{x-\frac{1}{2}} - 2 \quad \dots\dots ①$$

이므로 함수 $y = 9^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다. ②

따라서 $a = 9$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -2$ 이므로

$$abc = -9 \quad \dots\dots ③$$

답 -9

채점 기준	배점 비율
① 밑이 9인 형태로 나타낸 경우	40%
② 평행이동으로 나타낸 경우	40%
③ abc 의 값을 구한 경우	20%

11

$3^x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 3^{x+2} + \frac{4}{3^x} \geq 2\sqrt{9 \times 3^x \times \frac{4}{3^x}} = 12$$

즉 y 의 최솟값은 12이므로

$$\beta = 12 \quad \dots\dots ①$$

이때 $9 \times 3^x = \frac{4}{3^x}$ 일때 최솟값을 가지므로

$$(3^x)^2 = \frac{4}{9}, (3^x)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2, 3^x = \frac{2}{3}$$

즉 $x = a$ 에서 최솟값을 가지므로 $3^a = \frac{2}{3}$ ②

$$\text{따라서 } 3^a \times \beta = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \quad \dots\dots ③$$

답 8

채점 기준	배점 비율
① β 의 값을 구한 경우	50%
② 3^a 의 값을 구한 경우	40%
③ $3^a \times \beta$ 의 값을 구한 경우	10%

12

$$9^x - 3^{x+1} \geq k^2 - 12 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 3 \times 3^x - k^2 + 12 \geq 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

주어진 부등식은

$$t^2 - 3t - k^2 + 12 \geq 0 \quad \dots\dots ㉑ \quad \dots\dots ①$$

이때 $f(t) = t^2 - 3t - k^2 + 12$ 라 하면

$$f(t) = t^2 - 3t - k^2 + 12$$

$$= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - k^2 + \frac{39}{4}$$

모든 양수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -k^2 + \frac{39}{4} \geq 0$$

이어야 한다.

$$-k^2 + \frac{39}{4} \geq 0 \text{에서 } k^2 \leq \frac{39}{4}$$

$$-\sqrt{\frac{39}{4}} \leq k \leq \sqrt{\frac{39}{4}} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{그런데 } \sqrt{\frac{36}{4}} < \sqrt{\frac{39}{4}} < \sqrt{\frac{49}{4}} \text{에서}$$

$$3 < \sqrt{\frac{39}{4}} < \frac{7}{2}$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다. ③

답 7

채점 기준	배점 비율
① 치환하여 t 에 대한 이차방정식을 세운 경우	40%
② k 의 값의 범위를 구한 경우	30%
③ 정수 k 의 개수를 구한 경우	30%

4 로그함수

pp.48~56

- 01 16 02 4 03 128 04 ③ 05 ⑤ 06 ②
 07 ④ 08 ① 09 ③ 10 ③
 11 $\log_2 0.6 < \log_4 5 < \frac{3}{2}$ 12 ⑤ 13 ④ 14 ⑤
 15 ③ 16 ③ 17 6 18 ② 19 2 20 ⑤
 21 63 22 16 23 54 24 14점

01

함수 $f(x) = \log_2 x$ 의 역함수 $g(x)$ 는 $g(x) = 2^x$ 이므로
 $g(2) = f(a) - f(b)$ 에서

$$4 = \log_2 a - \log_2 b = \log_2 \frac{a}{b}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{b} = 2^4 = 16$$

답 16

02

두 점 D, F의 좌표는 $D(0, \log_a 2)$, $F(0, \log_a 16)$ 이고,
 점 E는 선분 DF를 1:2로 내분하는 점이므로

$$E\left(0, \frac{2\log_a 2 + \log_a 16}{3}\right)$$

$$\text{이때 } \frac{2\log_a 2 + \log_a 16}{3} = \frac{2\log_a 2 + 4\log_a 2}{3} = 2\log_a 2 = \log_a 4$$

이므로 $E(0, \log_a 4)$

따라서 점 B의 x 좌표는 4이다.

답 4

03

점 P의 x 좌표가 2이므로

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \log_2 2 = 2 \text{에서}$$

$$P(2, 2)$$

$$\text{즉 } \triangle PAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

또 점 Q의 x 좌표가 4이므로

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} \log_2 2 = -\frac{4}{3} \text{에서}$$

$$Q\left(4, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{즉 } \triangle QCB = \frac{1}{2} \times (\log_2 k - 4) \times \frac{4}{3} = 2 \text{이므로 } \log_2 k = 7$$

$$\text{따라서 } k = 2^7 = 128$$

답 128

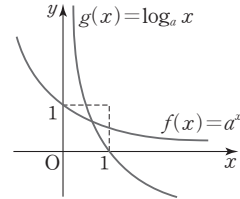
04

ㄱ. 두 그래프는 모두 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$0 < a < 1$ 이다. (참)

ㄴ. 두 함수의 그래프는 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프의 y 절편은 1, 로그함수 $y=\log_a x$ 의 그래프의 x 절편도 1이므로 다음 그림에서 두 함수의 그래프의 교점은 (1, 1)이 아니다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

05

함수 $y=2^{2x}=4^x$ 의 역함수 $g(x)$ 는 $g(x)=\log_4 x$ 이므로 두 점 (a, b) , (c, d) 가 함수 $y=2^{2x}$ 의 그래프 위의 점일 때, 두 점 (b, a) , (d, c) 는 함수 $g(x)=\log_4 x$ 의 그래프 위의 점이 된다.
 즉 $a=\log_4 b$, $c=\log_4 d$

$$\text{ㄱ. } \log_4 \sqrt{2}b = \log_4 b + \log_4 \sqrt{2} = a + \frac{1}{4}$$

즉 점 $(\sqrt{2}b, a+2)$ 는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이 아니다.

$$\text{ㄴ. } \log_4 b^3 = 3 \log_4 b = 3a$$

즉 점 $(b^3, 3a)$ 는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이다.

$$\text{ㄷ. } \log_4 bd = \log_4 b + \log_4 d = a + c$$

즉 점 $(bd, a+c)$ 는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

06

두 함수 $f(x)=2^x$ 과 $g(x)=\log_2 x$ 는 서로 역함수 관계이다.

$$g(b)=l \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(a) = f(l) = b$$

$$g(n)=k \text{라 하면 } f(k)=n \text{에서 } k=c$$

$$\text{따라서 } (f \circ f)(a) + g(n) = b + c$$

답 ②

07

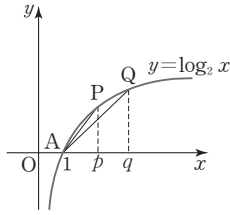
$$\text{ㄱ. (반례) } p=\frac{3}{2}, q=2 \text{일 때, } pq=3, p+q=\frac{7}{2}$$

밑이 1보다 크므로 $pq < p+q$ 이면

$$\log_2 pq < \log_2 (p+q)$$

따라서 $f(pq) < f(p+q)$ (거짓)

- ㄴ. 다음 그림과 같이 $A(1, 0)$, $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ 라 하면 $f(1)=0$ 이고



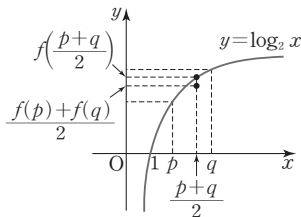
(직선 AP의 기울기) > (직선 AQ의 기울기)이므로

$$\frac{f(p)-0}{p-1} > \frac{f(q)-0}{q-1}$$

$$\text{따라서 } \frac{f(p)}{p-1} > \frac{f(q)}{q-1} \quad (\text{참})$$

- ㄷ. 다음 그림과 같이 그래프가 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) > \frac{f(p)+f(q)}{2} \text{가 성립한다. (참)}$$



그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

08

함수 $y=\log_2(4x+8)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y+1=\log_2\{4(x-2)+8\}$$

$$y=\log_2 4x-1=\log_2 4+\log_2 x-1=\log_2 x+1$$

이것을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$x=\log_2 y+1$$

$$\text{따라서 } \log_2 y=x-1 \text{에서}$$

$$y=2^{x-1}$$

답 ①

09

함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-b=\log_2(x-a)$$

이 그래프의 점근선이 $x=5$ 이므로 $a=5$

$$y=\log_2(x-5)+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①이 점 $(7, 4)$ 를 지나므로

$$4=\log_2 2+b \text{에서 } b=3$$

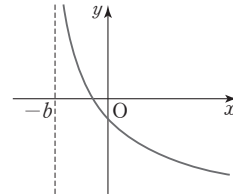
$$\text{따라서 } a+b=5+3=8$$

답 ③

10

함수 $y=\log_a(x+b)+c$ 의 그래프는 함수 $y=\log_a x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=-b$ 이다.

따라서 제1사분면을 지나지 않는 그래프는 다음 그림과 같다.



- ㄱ. $0 < a < 1$ (참)

- ㄴ. $-b < 0$, 즉 $b > 0$ (참)

- ㄷ. (반례) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+8)+1$ 의 그래프는 점 $(0, -2)$ 를 지

나므로 제1사분면을 지나지 않지만 $c > 0$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

11

주어진 수를 밑이 4인 로그로 바꾸면

$$\log_2 0.6 = \log_2 \frac{3}{5} = \log_4 \frac{9}{25}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \log_4 4 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \log_4 (2^2)^{\frac{3}{2}} = \log_4 8$$

$$\log_4 5$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크고 } \frac{9}{25} < 5 < 8 \text{이므로}$$

$$\log_4 \frac{9}{25} < \log_4 5 < \log_4 8$$

$$\text{따라서 } \log_2 0.6 < \log_4 5 < \frac{3}{2}$$

$$\text{답 } \log_2 0.6 < \log_4 5 < \frac{3}{2}$$

12

$$A = \log_{a^2} 3 = \frac{\log_a 3}{\log_a a^2} = \frac{\log_a 3}{2 \log_a a} = \frac{1}{2} \log_a 3 = \log_a \sqrt{3}$$

$$B = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{a}} 2 = \frac{1}{2} \times \frac{\log_a 2}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{1}{2} \times \frac{\log_a 2}{\frac{1}{2} \log_a a} = \log_a 2$$

$$C = \frac{1}{2} \log_a 6 = \log_a \sqrt{6}$$

이때 $0 < a < 1$ 이고

$$\sqrt{3} < 2 < \sqrt{6} \text{이므로}$$

$$\log_a \sqrt{6} < \log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2} \log_a 6 < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{a}} 2 < \log_{a^2} 3 \text{이므로}$$

$$C < B < A$$

답 ⑤

13

$\log_a x = t$ 라 하면 $1 < x < a$ 이므로

$0 < t < 1$ 이다.

$$A = (\log_a x)^2 = t^2$$

$$B = \log_a x^2 = 2t$$

$$C = \log_a (\log_a x) = \log_a t$$

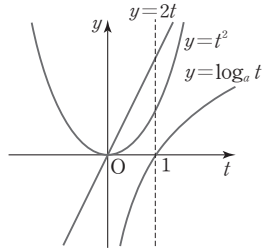
이때 세 함수 $y = t^2$, $y = 2t$, $y = \log_a t$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $1 < x < a$ 에서

$$\log_a (\log_a x) < (\log_a x)^2 < \log_a x^2 \text{이므로}$$

$$C < A < B$$



답 ④

14

진수 조건에서

$$5 - x > 0, x + 3 > 0 \text{이므로}$$

$$-3 < x < 5$$

$$f(x) = 2 \log_9 (5 - x) + \log_3 (x + 3)$$

$$= \log_3 (5 - x) + \log_3 (x + 3)$$

$$= \log_3 (5 - x)(x + 3)$$

$$= \log_3 (-x^2 + 2x + 15)$$

함수 $f(x)$ 는 밑이 1보다 크므로 진수가 최대일 때, $f(x)$ 도 최대이다.

$$-x^2 + 2x + 15 = -(x - 1)^2 + 16 \text{이므로}$$

$$-x^2 + 2x + 15 \text{의 최댓값은 } 16 \text{이다.}$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $\log_3 16$, 즉 $2 \log_3 4$ 이다.

답 ⑤

15

$$x^2 - 6x + 25 = (x - 3)^2 + 16 > 0 \text{이므로}$$

진수 조건에서 x 는 모든 실수이다.

함수 $f(x)$ 는 밑이 1보다 작으므로 진수가 최소일 때, $f(x)$ 는 최대이다.

$$x^2 - 6x + 25 = (x - 3)^2 + 16 \text{에서 진수의 최솟값은 } 16 \text{이다.}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최댓값

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 16 = -\log_2 2^4 = -4$$

를 갖는다.

$$\text{즉 } a = 3, b = -4 \text{이므로 } ab = -12$$

답 ③

16

$y = x^{2 + \log_3 x} = x^2 \times x^{\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y = \log_2 x^2 + \log_2 x^{\log_3 x}$$

$$= 2 \log_2 x + \log_2 x \times \log_2 x$$

이때 $\log_2 x = t$ 라 하면

$$\log_2 y = t^2 + 2t = (t + 1)^2 - 1$$

따라서 $t = -1$ 일 때, $\log_2 y$ 의 최솟값은 -1 이다.

즉 $\log_2 x = -1$ 일 때, $\log_2 y = -1$ 이므로

$x = \frac{1}{2}$ 일 때, y 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ③

17

진수 조건에서

$$x^2 - 16 > 0, (x + 4)(x - 4) > 0$$

$$x < -4 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$\text{또 } x - 1 > 0 \text{에서 } x > 1 \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } x > 4 \quad \cdots \cdots ㉢$$

$$\log_2 (x^2 - 16) - \log_2 (x - 1) = 2 \text{에서}$$

$$\log_2 (x^2 - 16) = \log_2 (x - 1) + \log_2 4$$

$$\log_2 (x^2 - 16) = \log_2 4(x - 1)$$

$$x^2 - 16 = 4(x - 1), x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

$$㉢ \text{에 의하여 } x = 6$$

답 6

18

진수 조건에서

$$x > 0, y > 0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 (x + y) + 1 \text{에서}$$

$$\log_2 xy = \log_2 2(x + y)$$

$$xy = 2(x + y), xy - 2(x + y) = 0$$

$$(x - 2)(y - 2) = 4$$

$x - 2$	-4	-2	-1	1	2	4
$y - 2$	-1	-2	-4	4	2	1

즉 순서쌍 (x, y) 는

$$(-2, 1), (0, 0), (1, -2), (3, 6), (4, 4), (6, 3)$$

이 중 ㉠을 만족시키는 것은

$(3, 6), (4, 4), (6, 3)$ 의 3개이다.

답 ②

19

$x^{\log_3 x} = 27x^k$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x \times \log_3 x = 3 + k \log_3 x$$

$$(\log_3 x)^2 - k \log_3 x - 3 = 0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$\log_3 x = t$ 라 하면

$$t^2 - kt - 3 = 0 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠의 두 근이 α, β 이므로

㉡의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이다.

㉢에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = k \text{ 이므로}$$

$$k = \log_3 \alpha \beta = \log_3 9 = 2$$

답 2

20

밑과 진수 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$$\text{즉 } 2 < \log_x 40 < \log_x x^3 \text{에서}$$

$$\log_x x^2 < \log_x 40 < \log_x x^3$$

이때 x 는 자연수이므로

$$x^2 < 40 < x^3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

따라서 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 그 합은

$$4 + 5 + 6 = 15$$

답 ⑤

다른풀이

$$2 < \log_x 40 < \log_x x^3 \text{에서}$$

$$\log_x 40 = \frac{\log 40}{\log x}, \log_x x^3 = 3 \text{ 이므로}$$

$$2 < \frac{\log 40}{\log x} < 3$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3} < \frac{\log x}{\log 40} < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 각 변에 $\log 40$ 을 곱하면

$$\frac{1}{3} \log 40 < \log x < \frac{1}{2} \log 40$$

$$\log \sqrt[3]{40} < \log x < \log \sqrt{40}$$

$$\sqrt[3]{40} < x < \sqrt{40} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이때 $3 = \sqrt[3]{27}, 4 = \sqrt[3]{64}$ 이고 $6 < \sqrt{40} < 7$ 이므로 ㉢을 만족시키는 정수 x 는 4, 5, 6이다.

따라서 구하는 합은 $4 + 5 + 6 = 15$

21

밑과 진수 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$$\log_4 x^2 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 7 \text{에서}$$

$$\frac{2 \log x}{2 \log 2} + \frac{3 \log 2}{\frac{1}{2} \log x} \leq 7$$

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{6 \log 2}{\log x} \leq 7 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠의 각 변에 $\log 2 \times \log x$ 를 곱하여 정리하면

$$(\log x)^2 - 7 \log 2 \times \log x + 6(\log 2)^2 \leq 0$$

$$(\log x - \log 2)(\log x - 6 \log 2) \leq 0$$

$$\log 2 \leq \log x \leq 6 \log 2$$

$$2 \leq x \leq 2^6, 2 \leq x \leq 64$$

따라서 구하는 자연수 x 의 개수는

$$64 - 2 + 1 = 63$$

답 63

22

$$(\log_2 x)^2 \geq \log_2 \frac{x^4}{a} \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 \geq 4 \log_2 x - \log_2 a$$

$$\log_2 x = t \text{라 하면}$$

$$t^2 - 4t + \log_2 a \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 부등식이 모든 양수 x 에 대하여 성립하므로 ㉠은 모든 실수 t 에 대하여 성립한다.

이차방정식 $t^2 - 4t + \log_2 a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - \log_2 a \leq 0$$

$$\log_2 a \geq 4, a \geq 16$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 16이다.

답 16

23

규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생하므로

$$\log 64 = a - 0.9 \times 4 \text{에서}$$

$$a = 6 \log 2 + 3.6$$

규모 x 이상인 지진이 1년에 평균 1번 발생하므로

$$\log 1 = a - 0.9 \times x \text{에서 } 0.9x = a$$

따라서

$$9x = 10a = 10(6 \log 2 + 3.6)$$

$$= 60 \times 0.3 + 36 = 54$$

답 54

24

3개월 후와 11개월 후 평균 점수를 각각 S_3, S_{11} 이라 하면

$$S_3 = k - \log 4^a, S_{11} = k - \log 12^a \text{이므로}$$

$$S_3 - S_{11} = (k - \log 4^a) - (k - \log 12^a)$$

$$= \log 12^a - \log 4^a = a \log \frac{12}{4} = a \log 3 = 7$$

$$\text{즉 } a = \frac{7}{\log 3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

1개월 후와 17개월 후 평균 점수를 각각 S_1, S_{17} 이라 하면

$$S_1 = k - \log 2^a, S_{17} = k - \log 18^a$$

따라서

$$S_1 - S_{17} = (k - \log 2^a) - (k - \log 18^a)$$

$$= \log 18^a - \log 2^a = a \log \frac{18}{2} = 2a \log 3$$

$$= 2 \log 3 \times \frac{7}{\log 3} = 14$$

따라서 1개월 후와 17개월 후의 평균 점수의 차는 14점이다.

답 14점

채점 기준	배점 비율
① a 의 값을 구한 경우	50%
② 1개월 후와 17개월 후의 평균 점수의 차를 구한 경우	50%

내신&수능 대비 실력 문제

pp.57~58

01 ⑤ 02 ② 03 3 04 ⑤ 05 ④ 06 ③
 07 ⑤ 08 ① 09 최댓값 : 10, 최솟값 : 1 10 4
 11 4

01

$$\overline{AB} = \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_5 3 = 2 \log_5 3 - \log_5 3 = \log_5 3$$

$$\overline{CD} = \log_{\sqrt{5}} 7 - \log_5 7 = 2 \log_5 7 - \log_5 7 = \log_5 7$$

따라서

$$\square ABCD = \frac{1}{2} \times (\log_5 3 + \log_5 7) \times 4 = 2 \log_5 21$$

답 ⑤

02

$$\log_a b = \frac{1}{2}, \log_a f = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$b = a^{\frac{1}{2}}, f = a^{\frac{5}{2}} \text{이므로 } bf = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{2}} = a^3$$

$$\text{또한 } \log_a d = \frac{3}{2}, \log_a e = 2 \text{에서}$$

$$d = a^{\frac{3}{2}}, e = a^2 \text{이므로 } de = a^{\frac{3}{2}} \times a^2 = a^{\frac{7}{2}}$$

$$\text{이때 } bf = \frac{1}{3} de \text{이므로}$$

$$a^3 = \frac{1}{3} a^{\frac{7}{2}} \text{에서 } 3a^3 - a^{\frac{7}{2}} = 0$$

$$a^3(3 - a^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\text{그런데 } a \neq 0 \text{이므로 } a^{\frac{1}{2}} = 3 \text{에서}$$

$$a = 3^2 = 9$$

따라서 로그함수 $y = \log_9 x$ 의 역함수는 $f(x) = 9^x$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

답 ②

03

지수함수 $y = a^{x-m} - 1$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은
 지수함수 $y = a^{x-m} - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 일치하므
 로 두 교점의 좌표는 각각 (1, 1), (3, 3)이다.

 $y = a^{x-m} - 1$ 의 그래프가 점 (1, 1)을 지나므로

$$1 = a^{1-m} - 1 \text{에서 } a^{1-m} = 2$$

$$1 - m = \log_a 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $y = a^{x-m} - 1$ 의 그래프가 점 (3, 3)을 지나므로

$$3 = a^{3-m} - 1 \text{에서 } a^{3-m} = 4$$

$$3 - m = \log_a 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② - ①을 하면

$$2 = \log_a 4 - \log_a 2 = \log_a 2$$

$$a > 0 \text{이므로 } a^2 = 2 \text{에서 } a = \sqrt{2}$$

 $a = \sqrt{2}$ 를 $a^{1-m} = 2$ 에 대입하면

$$(\sqrt{2})^{1-m} = 2, 2^{\frac{1-m}{2}} = 2$$

$$\frac{1-m}{2} = 1, m = -1$$

$$\text{따라서 } a^2 + m^2 = (\sqrt{2})^2 + (-1)^2 = 3$$

답 3

04

$$\neg. y = \frac{\log_3 2x}{\log_3 2} = \frac{\log_3 2 + \log_3 x}{\log_3 2} = 1 + \log_2 x$$

이므로 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동
 하면 겹쳐진다.

 $\neg. y = \log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$y = 2^x$$

$y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로
 이므로 겹쳐진다.

$$\neg. y = 3 \times 2^x = 2^{\log_3 3} \times 2^x = 2^{x + \log_3 3}$$

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$y = 2^x$$

$y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\log_2 3$ 만큼 평행이동하면
 겹쳐진다.

따라서 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지
 는 함수는 \neg, \neg, \neg 이다.

답 ⑤

05

 $\log_2 x = t$ 라 하면

$$g(t) = t^2 + \frac{a}{2}t + b = \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{16} + b$$

이므로 $t = -\frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{a^2}{16} + b$ 를 갖는다.

$$\text{즉 } t = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \text{일 때 최솟이므로}$$

$$-\frac{a}{4} = -\frac{1}{2} \text{에서 } a = 2$$

$$-\frac{a^2}{16} + b = \frac{11}{4} \text{에서 } b = 3$$

따라서 $ab = 6$

답 ④

06

$$(g \circ f)(x) = \log_a(|x| + 4) \text{에서}$$

 $0 < a < 1$ 이므로 $f(x) = |x| + 4$ 가 최소일 때

 $(g \circ f)(x)$ 는 최대이다.

즉 $x = 0$ 일 때, $f(x) = |x| + 4$ 의 최솟값은 4이므로

$(g \circ f)(x)$ 의 최댓값은 $\log_a 4$ 이고 그 값은 -1 이다.

따라서 $\log_a 4 = -1$ 에서

$$a = \frac{1}{4}$$

답 ③

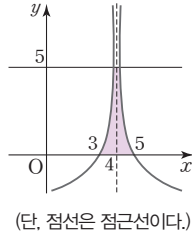
07

$0 < \log_2 \{ \log_3 (\log_{\sqrt{3}} x) \} < 2$ 에서
 $2^0 = 1 < \log_3 (\log_{\sqrt{3}} x) < 2^2 = 4$ 이므로
 $3^1 = 3 < \log_{\sqrt{3}} x < 3^4 = 81$
 즉 $(\sqrt{3})^3 < x < (\sqrt{3})^{81}$ 이므로
 $\alpha = (\sqrt{3})^3 = 3^{\frac{3}{2}}, \beta = (\sqrt{3})^{81} = 3^{\frac{81}{2}}$
 따라서 $\log_3 \alpha \beta = \log_3 3^{\frac{3}{2} + \frac{81}{2}} = \log_3 3^{42} = 42$

답 ⑤

08

$y = \log_{\frac{1}{4}}(x-4)^2$
 $= 2 \log_{\frac{1}{2}} |x-4|$
 $= \log_{\frac{1}{2}} |x-4|$
 따라서 오른쪽 그림에서 구하는 점의 좌표를
 (a, b) (a, b 는 정수)라 하면
 $a=4$ 일 때, $b=1, 2, 3, 4$
 이므로 구하는 점은 모두 4개이다.



(단, 점선은 점근선이다.)

답 ①

09

$y = (\log_3 x)^2 + 2 \log_{\frac{1}{3}} x + 2$
 $= (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x + 2$
 $\log_3 x = t$ 라 하면
 $y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$ ①
 그런데 $\frac{1}{3} \leq x \leq 81$ 이므로 $-1 \leq t \leq 4$ ②
 따라서 $t=1$ 일 때 y 의 최솟값은 1, $t=4$ 일 때 y 의 최댓값은 10이
 다. ③

답 최댓값 : 10, 최솟값 : 1

채점 기준	배점 비율
① $\log_3 x = t$ 로 치환하여 방정식을 세운 경우	40%
② t 의 값의 범위를 구한 경우	30%
③ 최댓값과 최솟값을 구한 경우	30%

10

선분 AB를 식으로 나타내면
 $0 \leq X \leq 4, 0 \leq Y \leq 2, Y = -\frac{1}{2}X + 2$ ①
 즉 $0 \leq \log_2 x \leq 4, 0 \leq \log_2 y \leq 2, \log_2 y = -\frac{1}{2} \log_2 x + 2$ 에서
 $1 \leq x \leq 16, 1 \leq y \leq 4, xy^2 = 16$ ②
 (i) $y=1$ 일 때, $x=16$
 (ii) $y=2$ 일 때, $x=4$
 (iii) $y=3$ 일 때, 만족시키는 x 는 없다.
 (iv) $y=4$ 일 때, $x=1$ ③

따라서 구하는 점 (x, y) 의 개수는 4이다.

..... ④

답 4

채점 기준	배점 비율
① 선분 AB를 식으로 나타낸 경우	20%
② x, y 에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
③ 조건을 만족시키는 정수 x, y 의 값을 구한 경우	40%
④ 점의 개수를 구한 경우	10%

11

$x^{\log_2 x} \geq \frac{x^k}{16}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} \geq \log_2 \frac{x^k}{16} \quad \text{..... ①}$$

$$\log_2 x \times \log_2 x \geq k \log_2 x - \log_2 16$$

$$(\log_2 x)^2 - k \log_2 x + 4 \geq 0$$

$\log_2 x = t$ 라 하면 주어진 부등식은

$$t^2 - kt + 4 \geq 0 \quad \text{..... ②}$$

$x > 0$ 이면 $\log_2 x$ 는 모든 실수이므로 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $t^2 - kt + 4 \geq 0$ 이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2 - kt + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 16 \leq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$k^2 \leq 16, -4 \leq k \leq 4$$

따라서 k 의 최댓값은 4이다.

..... ③

답 4

채점 기준	배점 비율
① 양변에 밑이 2인 로그를 취한 경우	20%
② $\log_2 x = t$ 로 치환하여 부등식을 나타낸 경우	40%
③ k 의 값의 범위를 구하여 최댓값을 구한 경우	40%

II 삼각함수

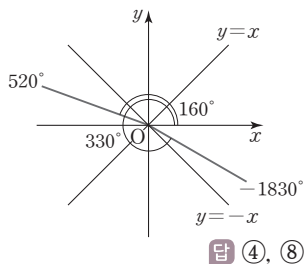
5 삼각함수

pp.62~68

- 01 ④, ⑧ 02 ③ 03 ④ 04 ③ 05 ④
 06 ④ 07 ⑤ 08 ② 09 ④ 10 ① 11 ①
 12 ③ 13 ② 14 ① 15 ④ 16 ④ 17 ①
 18 ③ 19 $2 \sin \theta$

01

$520^\circ = 360^\circ + 160^\circ$
 $-1810^\circ = 360^\circ \times (-6) + 330^\circ$
 이므로 동경을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 520° , -1830° 를 나타내는 동경이 위치하는 영역은 차례대로 ④, ⑧이다.



답 ④, ⑧

02

θ 가 제2사분면의 각이므로

$\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ + \alpha$ (n 은 정수, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$)에서

$$\frac{\theta}{2} = 180^\circ \times n + 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad (0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ)$$

$$\frac{\theta}{2} + 45^\circ = 180^\circ \times n + 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad (0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ)$$

$$90^\circ < 90^\circ + \frac{\alpha}{2} < 135^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 정수 k 에 대하여

(i) $n=2k$ 일 때

$$\frac{\theta}{2} + 45^\circ = 360^\circ \times k + 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

①에 의해 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ 일 때

$$\frac{\theta}{2} + 45^\circ = 360^\circ \times k + 180^\circ + 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

①에 의해 제4사분면의 각이다.

따라서 $\frac{\theta}{2} + 45^\circ$ 는 제2, 4사분면의 각이다.

답 ③

03

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$4\theta - \theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수}) \text{에서}$$

$$\theta = 120^\circ \times n$$

$$0^\circ < \theta < 360^\circ \text{에서 } 0^\circ < 120^\circ \times n < 360^\circ$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

$$n=1 \text{이면 } \theta = 120^\circ$$

$$n=2 \text{ 이면 } \theta = 240^\circ$$

따라서 각 θ 의 크기의 합은

$$120^\circ + 240^\circ = 360^\circ$$

답 ④

04

$$\textcircled{1} \quad 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$\textcircled{2} \quad 90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad -300^\circ = -300 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{3}\pi$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{5}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 450^\circ$$

답 ③

05

$$\neg. \quad 3 = 3 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi} \text{ (참)}$$

$$\neg. \quad -700^\circ = 360^\circ \times (-2) + 20^\circ \text{ 이므로 제1사분면의 각이다.}$$

(거짓)

$$\neg. \quad -\frac{7}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{4}, \quad \frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

$$-\frac{7}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi \text{ 가 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

답 ④

06

반지름의 길이가 4인 원의 둘레의 길이는 $2\pi \times 4 = 8\pi$

반지름의 길이가 6인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 호의 길이는 6θ 이므로

$$6\theta = 8\pi \text{에서 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{4}{3}\pi = 24\pi$$

답 ④

07

$$S_1 = \pi r^2$$

반지름의 길이가 r 이고 둘레의 길이가 $4r$ 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$2r + l = 4r \text{에서 } l = 2r$$

$$l = r\theta = 2r \text{에서 } \theta = 2 \text{ (라디안)}$$

$$\text{이므로 } S_2 = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2 \times 2 = r^2$$

$$\text{따라서 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{r^2} = \pi$$

답 ⑤

08

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 20이므로

$$2r + l = 20 \text{에서 } l = 20 - 2r$$

또 한 부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(20 - 2r) \\ &= -r^2 + 10r = -(r - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

따라서 넓이 S 가 최대일 때 $r = 5$, $l = 10$ 이고 $l = r\theta$ 이므로

$$10 = 5\theta \text{에서 } \theta = 2$$

답 ②

09

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = 1, \overline{PH} = a \text{이므로}$$

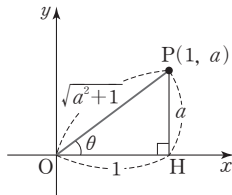
$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{이때 } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5} \text{에서}$$

$$\frac{1}{a^2 + 1} = \frac{1}{5}, a^2 = 4$$

$$\text{그런데 } a > 0 \text{이므로 } a = 2$$



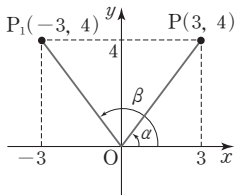
답 ④

10

점 $P(3, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 P_1 의 좌표는

$$P_1(-3, 4)$$

동경 OP , OP_1 을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{이므로 } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\overline{OP_1} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{이므로 } \cos \beta = -\frac{3}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \alpha + \cos \beta = \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

답 ①

11

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$0 < \sin \theta < 1, -1 < \cos \theta < 0 \text{에서}$$

$$\cos \theta - \sin \theta < 0, 1 - \cos \theta > 0, 1 + \sin \theta > 0$$

따라서

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} - \sqrt{(1 - \cos \theta)^2} + \sqrt{(1 + \sin \theta)^2} \\ &= -(\cos \theta - \sin \theta) - (1 - \cos \theta) + (1 + \sin \theta) \\ &= 2 \sin \theta \end{aligned}$$

답 ①

12

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0 \text{에서 } \cos \theta + \tan \theta < 0$$

따라서

$$\begin{aligned} &\sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{\tan^2 \theta} - |\cos \theta + \tan \theta| \\ &= |\cos \theta| + |\tan \theta| - |\cos \theta + \tan \theta| \\ &= -\cos \theta - \tan \theta + \cos \theta + \tan \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 ③

13

$\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 는 같은 부호이고

$$\sin \theta + \cos \theta < 0 \text{이므로 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

이때 $\sin \theta - 1 < 0, \tan \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{|\sin \theta - 1|}{\sqrt{\tan^2 \theta}} &= -\frac{(\sin \theta - 1)}{\tan \theta} \\ &= \frac{1 - \sin \theta}{\tan \theta} \end{aligned}$$

답 ②

14

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{3} \text{에서 } \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{4} \text{에서 } \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

답 ①

15

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2 + 2 \sin \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

답 ④

16

$$\begin{aligned}
 & (\tan^4 \theta - 1) \cos^2 \theta \\
 &= \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^4 - 1 \right\} \cos^2 \theta \\
 &= \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} - \cos^2 \theta \\
 &= \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1 \\
 &= \tan^2 \theta - 1 \\
 &= (a-1)^2 - 1 \\
 &= a^2 - 2a
 \end{aligned}$$

답 ④

17

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

따라서 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$

답 ①

18

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin \theta}{1 - \frac{1}{\cos \theta}} - \frac{\sin \theta}{1 + \frac{1}{\cos \theta}} &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta - 1} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + 1} \\
 &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - 1} \\
 &= -\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\
 &= -\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= -\frac{2}{\tan \theta}
 \end{aligned}$$

답 ③

19

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 + 2a = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2$$

$$1 - 2a = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta - \cos \theta)^2$$

$$\sqrt{1+2a} + \sqrt{1-2a} = \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} \quad \dots\dots ①$$

그런데 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$\sin \theta \geq \cos \theta \geq 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta \geq 0, \sin \theta - \cos \theta \geq 0 \quad \dots\dots ②$$

따라서

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) \\
 &= 2 \sin \theta \quad \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 $2 \sin \theta$

채점 기준	배점 비율
① 주어진 식을 $\sin \theta, \cos \theta$ 로 나타낸 경우	50%
② $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta - \cos \theta$ 의 부호를 구한 경우	20%
③ 주어진 식을 θ 에 대한 식으로 간단히 나타낸 경우	30%

내신&수능 대비 실력 문제

pp.69~70

- 01 ② 02 ② 03 ⑤ 04 ③ 05 ② 06 ④
 07 ② 08 ① 09 ④ 10 $\frac{12}{7}\pi$ 11 $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
 12 $\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$

01

각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경의 차가 $\frac{\pi}{5}$ 이므로

$$|6\theta - \theta| = \frac{\pi}{5} + 2n\pi \quad (n \text{은 정수}) \text{에서}$$

$$5|\theta| = \frac{\pi}{5} + 2n\pi$$

$$|\theta| = \frac{\pi}{25} + \frac{2n}{5}\pi$$

$$\theta > 0 \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{25} + \frac{2n}{5}\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로}$$

$$n=2 \text{일 때, } \theta = \frac{\pi}{25} + \frac{4}{5}\pi = \frac{21}{25}\pi$$

답 ②

02

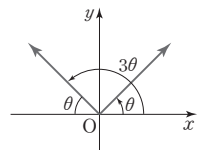
각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는

동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + \theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = (2n+1)\pi$$

$$\theta = \frac{2n+1}{4}\pi$$



$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{4}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$n=0 \text{이면 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$n=1 \text{ 이면 } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

따라서 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi = \pi$$

답 ②

03

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$(\text{부채꼴 OAB의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

선분 OB의 길이가 $\sqrt{2}$, $\angle BOH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{OH} = \overline{HB} = 1$$

$$(\text{삼각형 OHB의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

따라서 부채꼴 OAB의 넓이와 삼각형 OHB의 넓이의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

답 ⑤

04

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 철사의 길이가 8이므로

$$2r + l = 8 \text{에서}$$

$$l = 8 - 2r \text{ (단, } 0 < r < 4 \text{)}$$

이때 부채꼴의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(8 - 2r)$$

$$= -r^2 + 4r = -(r-2)^2 + 4$$

따라서 반지름의 길이 $r=2$ 일 때, 부채꼴의 넓이 S 의 최댓값은 4이다.

답 ③

05

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = 2 + \sqrt{3} \text{에서}$$

$$1 - \tan \theta = (2 + \sqrt{3})(1 + \tan \theta) \text{이므로}$$

$$\tan \theta = \frac{-1 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{에서}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{3}, \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$

$$\text{따라서 } \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ②

06

$\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$ 에서 θ 는 제4사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{3}{2}\pi < \theta < 2n\pi + 2\pi \text{ (} n \text{은 정수)에서}$$

$$\frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{3} < \frac{2n}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi$$

이때 정수 k 에 대하여

$$(i) n=3k \text{ 일 때, } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$(ii) n=3k+1 \text{ 일 때, } 2k\pi + \frac{7}{6}\pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{4}{3}\pi$$

$$(iii) n=3k+2 \text{ 일 때, } 2k\pi + \frac{11}{6}\pi < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + 2\pi$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 범위를

나타낸 것은 ④이다.

답 ④

07

$$x = \cos \frac{7}{3}\pi - i \sin \frac{7}{3}\pi$$

$$= \cos \left(2\pi + \frac{1}{3}\pi\right) - i \sin \left(2\pi + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{한편 } \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1$$

이므로 x 는 이차방정식 $t^2 - t + 1 = 0$ 의 한 근이다.

$$\text{즉 } (t+1)(t^2 - t + 1) = 0 \text{에서 } t^3 + 1 = 0$$

따라서 $x^3 = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} x^{2002} + x^{2001} + 1 &= (x^3)^{667} \times x + (x^3)^{667} + 1 \\ &= (-1)^{667} \times x + (-1)^{667} + 1 \\ &= -x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

답 ②

08

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \text{이므로 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{8} - 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{64}} = \frac{44}{9} \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

09

이차방정식 $5x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$$

이차방정식 $5x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 $|\sin \theta|, |\cos \theta|$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$|\sin \theta| + |\cos \theta| = \frac{a}{5} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} (|\sin \theta| + |\cos \theta|)^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2|\sin \theta \cos \theta| \\ &= 1 + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$|\sin \theta| + |\cos \theta| = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{a}{5} \text{에서 } a = 3\sqrt{5}$$

$$\text{또한 } |\sin \theta| |\cos \theta| = \frac{b}{5} \text{에서}$$

$$|\sin \theta| |\cos \theta| = |\sin \theta \cos \theta| = \frac{2}{5} \text{이므로 } b = 2$$

$$\text{따라서 } ab = 6\sqrt{5} \quad \text{답 ④}$$

10

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$2\theta + 5\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$7\theta = 2n\pi \text{에서 } \theta = \frac{2n}{7}\pi \quad \dots\dots ①$$

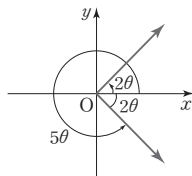
$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n}{7}\pi < \pi \text{이므로 } 0 < n < \frac{7}{2}$$

$$\text{이때 } n \text{은 정수이므로 } n=1 \text{ 또는 } n=2 \text{ 또는 } n=3 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{따라서 } \theta = \frac{2}{7}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{7}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{6}{7}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{2}{7}\pi + \frac{4}{7}\pi + \frac{6}{7}\pi = \frac{12}{7}\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\text{답 } \frac{12}{7}\pi$$



채점 기준	배점 비율
① 각 θ 를 n 으로 나타낸 경우	40%
② n 의 값을 구한 경우	40%
③ θ 의 값의 합을 구한 경우	20%

11

$\overline{OP} = 2$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{b}{2} = \frac{1}{4} \text{에서 } b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4, a^2 + \frac{1}{4} = 4, a^2 = \frac{15}{4}$$

$$a < 0 \text{이므로 } a = -\frac{\sqrt{15}}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{따라서 } ab = -\frac{\sqrt{15}}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{답 } -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

채점 기준	배점 비율
① b 의 값을 구한 경우	40%
② a 의 값을 구한 경우	50%
③ ab 의 값을 구한 경우	10%

12

$$\begin{aligned} \log \sin^2 \theta + \log \cos^2 \theta &= 2 \log \sin \theta + 2 \log \cos \theta \\ &= 2(\log \sin \theta + \log \cos \theta) \\ &= 2 \log \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{이므로 } 2 \log \sin \theta \cos \theta = \log \frac{3}{16}$$

$$\log \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \log \frac{3}{16}$$

$$\log \sin \theta \cos \theta = \log \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$(\sin \theta + \cos \theta)^4 = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{답 } \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4}$$

채점 기준	배점 비율
① 로그의 성질을 이용하여 $\log \sin^2 \theta + \log \cos^2 \theta$ 를 정리한 경우	30%
② $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구한 경우	30%
③ $(\sin \theta + \cos \theta)^4$ 의 값을 구한 경우	40%

6 삼각함수의 그래프

pp.74~80

- 01 1 02 -32π 03 ③ 04 5 05 ④
 06 7 07 ② 08 ② 09 2 10 ② 11 ③
 12 ⑤ 13 1 14 ① 15 4π 16 ③ 17 ⑤
 18 ② 19 5 20 ③

01

함수 $y = a \sin bx + c$ 에서 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3, -a + c = -1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 1$

이 함수의 주기가 π 이고 $b < 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi, b = -2$$

$$\text{따라서 } a + b + c = 2 + (-2) + 1 = 1$$

답 1

02

$$y = -3 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 1 = -3 \sin \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 1$$

$$\text{이므로 } a = 3 + 1 = 4, b = -3 + 1 = -2, c = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\text{따라서 } abc = 4 \times (-2) \times 4\pi = -32\pi$$

답 -32π

03

주어진 그림에서 주기가 4이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b} = 4, b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = a \sin \frac{\pi}{2} x + c \text{라 하면 } f(0) = 2, f(3) = 0 \text{이므로}$$

$$f(0) = c = 2$$

$$f(3) = a \sin \frac{3}{2} \pi + 2 = 0 \text{에서 } -a + 2 = 0, a = 2$$

$$\text{따라서 } a + bc = 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 3$$

답 ③

04

$$a = 2 - 3 = -1$$

$$b = -2 - 3 = -5$$

$$\text{따라서 } ab = -1 \times (-5) = 5$$

답 5

05

함수 $y = a \cos x + b$ 에서 최댓값이 6, 최솟값이 2이고 $a > 0$ 이므로

$$a + b = 6, -a + b = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 4$$

$$\text{따라서 } ab = 2 \times 4 = 8$$

답 ④

06

주어진 그림에서 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}, b = 4$$

..... ①

$$f(x) = a \cos 4x + c \text{라 하면 } f(0) = 3, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{이므로}$$

$$a + c = 3, -a + c = -1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, c = 1$$

..... ②

$$\text{따라서 } a + b + c = 2 + 4 + 1 = 7$$

..... ③

답 7

채점 기준	배점 비율
① b 의 값을 구한 경우	30%
② a, c 의 값을 구한 경우	50%
③ $a + b + c$ 의 값을 구한 경우	20%

07

함수 $f(x) = 3 \tan 2x + a$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8}, -1\right)$ 을 지나므로

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \tan \frac{\pi}{4} + a = 3 + a = -1 \text{에서}$$

$$a = -4$$

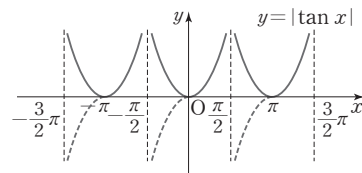
$$\text{즉 } f(ax) = f(-4x) = 3 \tan(-8x) - 4 \text{이므로}$$

$$\text{함수 } f(ax) \text{의 주기는 } \frac{\pi}{|-8|} = \frac{\pi}{8}$$

답 ②

08

함수 $y = |\tan x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 π 이다.



① $y = \sin x$ 의 주기는 2π 이다.

② $y = |\sin x|$ 의 주기는 $y = \sin x$ 의 주기의 $\frac{1}{2}$ 이므로 π 이다.

③ $y = 2\pi \cos x$ 의 주기는 2π 이다.

④ $y = 2 \cos 3x$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이고, $y = |2 \cos 3x|$ 의 주기는

$y=2\cos 3x$ 의 주기의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

⑤ $y=\tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

답 ②

단권화 노트

$y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같이 그린다.

(i) $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.

(ii) $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 둔다.

(iii) $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한다.

09

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{따라서 } \cos 300^\circ + \sin 150^\circ + \tan 225^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

답 2

단권화 노트

$$\cos 300^\circ = \cos(270^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

10

$$\neg. \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \text{이므로}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin(\pi + \theta) = \sin \theta - \sin \theta = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \text{이므로}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos(\pi + \theta) = \cos \theta - \cos \theta = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$\frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta \text{이므로}$$

$$\tan(\pi - \theta) + \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = -\tan \theta - \tan \theta$$

$$= -2\tan \theta \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

답 ②

11

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 20\theta$$

$$= (\cos \theta + \cos 11\theta) + (\cos 2\theta + \cos 12\theta)$$

$$+ \cdots + (\cos 10\theta + \cos 20\theta)$$

$$= \{\cos \theta + \cos(\pi + \theta)\} + \{\cos 2\theta + \cos(\pi + 2\theta)\}$$

$$+ \cdots + \{\cos 10\theta + \cos(\pi + 10\theta)\}$$

$$= (\cos \theta - \cos \theta) + (\cos 2\theta - \cos 2\theta) + \cdots + (\cos 10\theta - \cos 10\theta)$$

$$= 0$$

답 ③

12

$$y = 4\sin x + \cos^2 x$$

$$= 4\sin x + 1 - \sin^2 x$$

$$= -\sin^2 x + 4\sin x + 1$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x \leq \pi \text{이므로 } 0 \leq t \leq 1$$

$$y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$$

$$t=1 \text{일 때 최댓값은 } 4$$

$$t=0 \text{일 때 최솟값은 } 1$$

$$\text{따라서 최댓값과 최솟값의 합은 } 4+1=5$$

답 ⑤

13

$$y = \sin^2 x + (\cos x + k)^2$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2k\cos x + k^2$$

$$= 2k\cos x + k^2 + 1$$

..... ①

$$k > 0 \text{이므로 } 2k\cos x + k^2 + 1 \text{의 최댓값은 } \cos x = 1 \text{일 때}$$

$$2k + k^2 + 1 \text{이다.}$$

$$\text{이때 최댓값이 } 9 \text{이므로}$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 9 \text{에서 } k+1 = \pm 3 \text{이므로}$$

$$k > 0 \text{이므로 } k=2$$

..... ②

$$\text{따라서 } 2k\cos x + k^2 + 1 \text{의 최솟값은 } \cos x = -1 \text{일 때}$$

$$-2k + k^2 + 1 = -4 + 4 + 1 = 1$$

..... ③

답 1

채점 기준	배점 비율
① 주어진 함수를 $\cos x$ 로만 표현한 경우	30%
② k 의 값을 구한 경우	40%
③ 최솟값을 구한 경우	30%

14

$$y = |2\sin 2x - 1| + k \text{에서}$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{이므로 } -2 \leq 2\sin 2x \leq 2$$

$$-3 \leq 2\sin 2x - 1 \leq 1$$

$$0 \leq |2\sin 2x - 1| \leq 3 \text{에서}$$

$$k \leq |2\sin 2x - 1| + k \leq k+3$$

즉 최댓값은 $k+3$, 최솟값은 k 이고 최댓값과 최솟값의 합이 5이므로

$$k+3+k=5, 2k=2$$

$$\text{따라서 } k=1$$

답 ①

15

$$\tan^2 x - 1 = 0 \text{에서 } (\tan x + 1)(\tan x - 1) = 0$$

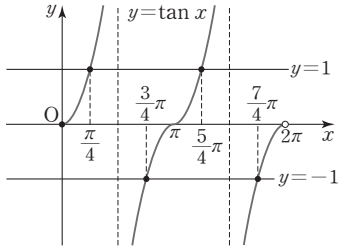
$$\tan x = -1 \text{ 또는 } \tan x = 1$$

방정식 $\tan x = 1$ 의 해는 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 과의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

방정식 $\tan x = -1$ 의 해는 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 과의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$



따라서 구하는 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

답 4π

16

$x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\alpha^2 - 5\alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 7\alpha\beta}{\alpha + \beta} \\ &= \frac{4^2 - 7 \times 2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

그런데 $0 < \theta < \pi$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$

답 ③

17

$2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0, 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

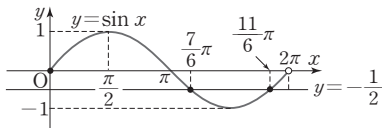
$\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$

이때 주어진 방정식은

$$2t^2 - t - 1 = 0, (2t + 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{즉 } t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 1$$

(i) $t = -\frac{1}{2}$, 즉 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 일 때



$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

(ii) $t = 1$, 즉 $\sin x = 1$ 일 때

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } x = \frac{\pi}{2}$$

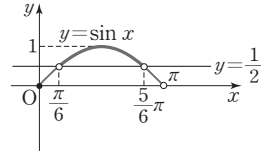
(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 실근의 합은

$$\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$$

답 ⑤

18

부등식 $\sin x > \frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이다.



$$\text{따라서 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

답 ②

19

$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 < 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 < 0$$

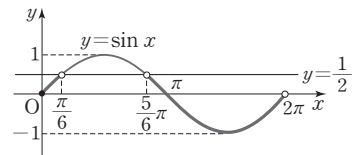
$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$$

$$(\sin x - 2)(2\sin x - 1) > 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{즉 } \sin x - 2 < 0 \text{이므로 } 2\sin x - 1 < 0$$

$$\sin x < \frac{1}{2}$$



$$\sin x < \frac{1}{2} \text{의 해는 } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{5}{6}\pi}{\frac{\pi}{6}} = 5$$

답 5

20

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + (2\cos \theta + 1)x + 1 > 0$ 이 항상 성립하기 위해서는 이차방정식 $x^2 + (2\cos \theta + 1)x + 1 = 0$ 의 판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

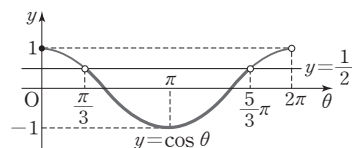
$$D = (2\cos \theta + 1)^2 - 4 < 0 \text{에서}$$

$$4\cos^2 \theta + 4\cos \theta - 3 < 0, (2\cos \theta + 3)(2\cos \theta - 1) < 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\text{즉 } 2\cos \theta + 3 > 0 \text{이므로 } 2\cos \theta - 1 < 0$$

$$\cos \theta < \frac{1}{2}$$



따라서 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$

답 ③

내신&수능 대비 실력 문제

pp.81~82

- 01 ③ 02 10 03 ③ 04 ③ 05 ① 06 ④
07 ④ 08 ④ 09 ⑤ 10 $\frac{2}{3}$ 11 $\frac{45}{2}\pi$

01

최댓값이 4, 최솟값이 2이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 4 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$-a + c = 2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, c = 3$

주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi, b = 2$$

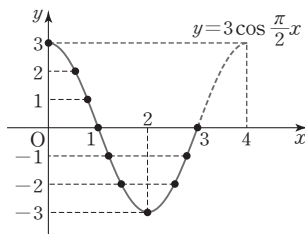
따라서 $abc = 1 \times 2 \times 3 = 6$

답 ③

02

함수 $y = 3\cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로

$y = 3\cos \frac{\pi}{2}x$ ($0 \leq x \leq 3$)의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 10이다.

답 10

03

ㄱ. $f(x) = \sin 2\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 이므로

$$f(x) = f(x+1)$$

ㄴ. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 1\right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로

$$f(x) \neq f(x+1)$$

ㄷ. $f(x) = \tan(2x - 1)\pi$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x+1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

04

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

따라서

$$\frac{\cos(\pi + \theta)\tan(2\pi - \theta)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right)} = \frac{(-\cos \theta) \times (-\tan \theta)}{\cos \theta} = \tan \theta$$

답 ③

05

$$\sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$f(x) = \sin^2(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

$$= \sin^2 x + \cos x - 1$$

$$= (1 - \cos^2 x) + \cos x - 1$$

$$= -\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

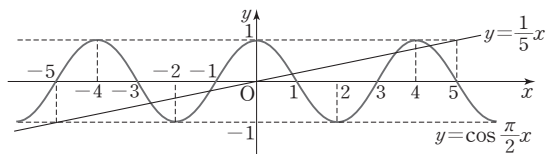
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다. 답 ①

06

방정식 $\cos \frac{\pi}{2}x = \frac{1}{5}x$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 와

$y = \frac{1}{5}x$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.



위의 그림에서 교점의 개수는 5이다. 답 ④

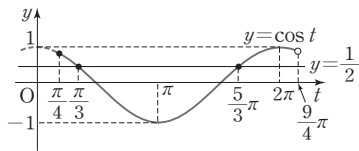
07

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

$x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$ 이고

$$\cos t = \frac{1}{2}$$

방정식 $\cos t = \frac{1}{2}$ 의 해는 두 함수 $y = \cos t$ 와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프의 교점의 t 좌표와 같다.



$$\text{즉 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{5}{3}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{12}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{3}\pi \text{ 에서 } x = \frac{17}{12}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{12} + \frac{17}{12}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

답 ④

08

이차방정식 $x^2 + 4\cos\theta x + 6\sin\theta = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2 + 4\cos\theta x + 6\sin\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta > 0$$

$$4(1 - \sin^2\theta) - 6\sin\theta > 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 < 0$$

$$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) < 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ 에서 } \sin\theta + 2 > 0 \text{ 이므로}$$

$$2\sin\theta - 1 < 0, \sin\theta < \frac{1}{2}$$

(ii) 두 근의 합과 곱이 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

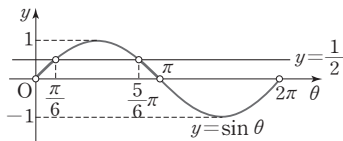
$$(\text{두 근의 합}) = -4\cos\theta > 0 \text{ 에서 } \cos\theta < 0$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 6\sin\theta > 0 \text{ 에서 } \sin\theta > 0$$

(i), (ii)에 의하여

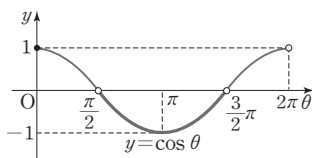
$$0 < \sin\theta < \frac{1}{2}, \cos\theta < 0$$

$$0 < \sin\theta < \frac{1}{2} \text{ 에서}$$



$$0 < \theta < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi \quad \dots\dots ㉠$$

$\cos\theta < 0$ 에서



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

$\dots\dots ㉡$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{5}{6}\pi, \beta = \pi \text{ 이므로}$$

$$\alpha + \beta = \frac{5}{6}\pi + \pi = \frac{11}{6}\pi$$

답 ④

단권화 노트

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근 α, β 가 실수일 때, 직접 근을 구하지 않고 판별식 D 와 근과 계수의 관계를 이용하여 다음과 같이 실근의 부호를 판별할 수 있다.

$$\text{① 두 근이 모두 양수} \iff D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$$

$$\text{② 두 근이 모두 음수} \iff D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

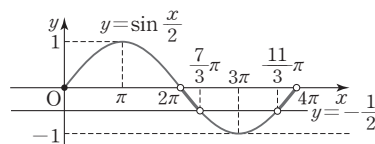
$$\text{③ 두 근이 서로 다른 부호} \iff \alpha\beta < 0$$

09

$$2\sin^4 \frac{x}{2} + \sin^3 \frac{x}{2} < 0 \text{ 에서}$$

$$\sin^3 \frac{x}{2} \left(2\sin \frac{x}{2} + 1 \right) < 0$$

$$-\frac{1}{2} < \sin \frac{x}{2} < 0$$



$$-\frac{1}{2} < \sin \frac{x}{2} < 0 \text{ 의 해는 } 2\pi < x < \frac{7}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{3}\pi < x < 4\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = 2\pi, \beta = \frac{7}{3}\pi, \gamma = \frac{11}{3}\pi, \delta = 4\pi \text{ 이므로}$$

$$(\gamma - \alpha) + (\delta - \beta) = \left(\frac{11}{3}\pi - 2\pi \right) + \left(4\pi - \frac{7}{3}\pi \right) = \frac{10}{3}\pi \quad \text{답 ⑤}$$

10

함수 $y = a\cos(bx - c)$ 의 최댓값이 4이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 4$$

$\dots\dots ㉠$

$f(x) = a\cos(bx - c)$ 라 하자.

오른쪽 그림에서

$$f(\alpha) = 4 \left(0 < \alpha < \frac{5}{3}\pi \right) \text{ 라 하면}$$

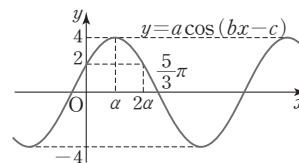
$$f(2\alpha) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{5}{3}\pi - 2\alpha \right) : (2\alpha - \alpha) = 1 : 2$$

$$\alpha = \frac{10}{3}\pi - 4\alpha \text{ 에서 } \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{이때 함수 } y = a\cos(bx - c) \text{ 의 주기는 } 4 \times \left(\frac{5}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi \right) = 4\pi \text{ 이고}$$

$b > 0$ 이므로



$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \text{에서 } b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$y = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x - c\right) = 4 \cos \frac{1}{2}(x - 2c)$$

이므로 함수 $y = 4 \cos \frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 양의 방향으로

$2c(c > 0)$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

$$c \text{의 최솟값은 } 2c = \pi \text{일 때이므로 } c = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{따라서 } \frac{abc}{\pi} \text{의 최솟값은 } \frac{4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots ④$$

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	배점 비율
① a 의 값을 구한 경우	20%
② b 의 값을 구한 경우	40%
③ c 의 최솟값을 구한 경우	30%
④ $\frac{abc}{\pi}$ 의 최솟값을 구한 경우	10%

11

곡선 $y = 3 \sin \frac{1}{5}(x - \pi)$ 와 직선 $y = \frac{3}{2}$ 이 만나는 점을 구해 보자.

$$3 \sin \frac{1}{5}(x - \pi) = \frac{3}{2} \text{에서 } \sin \frac{1}{5}(x - \pi) = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 12\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{5} \leq \frac{x - \pi}{5} \leq \frac{11}{5}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{x - \pi}{5} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$x = \frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{31}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{71}{6}\pi$$

따라서 만나는 점은

$$\left(\frac{11}{6}\pi, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{31}{6}\pi, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{71}{6}\pi, \frac{3}{2}\right) \quad \dots\dots ①$$

함수 $y = 3 \sin \frac{1}{5}(x - \pi)$ 의 치역이 $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$

점 P와 직선 $y = \frac{3}{2}$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$(\text{삼각형 PAB의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h \text{에서}$$

$$\overline{AB} \text{의 최댓값은 } \frac{71}{6}\pi - \frac{11}{6}\pi = 10\pi \text{이고 } 0 < h \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots ②$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 10\pi \times \frac{9}{2} = \frac{45}{2}\pi \quad \dots\dots ③$$

답 $\frac{45}{2}\pi$

채점 기준	배점 비율
① 곡선과 직선이 만나는 점을 구한 경우	50%
② 삼각형의 넓이의 범위를 구한 경우	30%
③ 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구한 경우	20%

II 삼각함수

7 삼각함수의 활용

pp.86~92

- 01 2 02 20 03 $\frac{4}{5}$ 04 ④ 05 $\frac{2}{3}$ 06 ①
 07 37 08 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 09 ⑤ 10 ⑤ 11 ③
 12 ④ 13 ② 14 ③ 15 ② 16 $\sqrt{3}$ 17 ②
 18 ③ 19 4 20 $20\sqrt{3}$ 21 ②

01

삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$B = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \quad \text{답 } 2$$

02

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = 2 \times 2 \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = 4 \sin 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = 4 \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 8 + 12 = 20 \quad \text{답 } 20$$

03

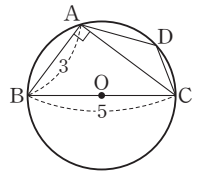
$\angle BAC = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

이때 삼각형 ACD의 외접원의 지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin D} = 5$$

$$\text{따라서 } \sin D = \frac{\overline{AC}}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}$$



04

$$a + b = 5k \quad \dots\dots ㉠$$

$$b + c = 9k \quad \dots\dots ㉡$$

$$c + a = 8k \quad \dots\dots ㉢$$

로 놓고 ㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(a + b + c) = 22k \text{ (단, } k \text{는 상수)}$$

$$a + b + c = 11k \quad \dots\dots ㉣$$

$$㉣ - ㉠ \text{을 하면 } c = 6k$$

㉔-㉕을 하면 $a=2k$

㉔-㉖을 하면 $b=3k$

즉 $a:b:c=2:3:6$

따라서 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 2 : 3 : 6$$

답 ④

05

$A:B:C=3:2:1$ 에서 $A=3k$, $B=2k$, $C=k$ (k 는 상수)라 하면

$A+B+C=180^\circ$ 이므로 $3k+2k+k=180^\circ$ 에서

$$k=30^\circ$$

따라서 $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$

사인법칙의 변형에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

$$=\sin 90^\circ:\sin 60^\circ:\sin 30^\circ$$

$$=1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=2:\sqrt{3}:1$$

즉 $a=2l$, $b=\sqrt{3}l$, $c=l$ (l 은 상수)이라 하면

$$\frac{ac}{b^2}=\frac{2l \times l}{(\sqrt{3}l)^2}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

06

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R} \text{이므로}$$

$\sin A(\sin A+\sin C)=\sin B(\sin B+\sin C)$ 에서

$$\frac{a}{2R}\left(\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\frac{b}{2R}\left(\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)$$

$$a(a+c)=b(b+c)$$

$$a^2-b^2+ac-bc=0$$

$$(a+b)(a-b)+c(a-b)=0$$

$$(a+b+c)(a-b)=0$$

$$a+b+c \neq 0 \text{이므로 } a=b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ①

07

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=3^2+4^2-2 \times 3 \times 4 \times \cos 120^\circ$$

$$=9+16-2 \times 3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=37$$

따라서 정사각형 BCDE의 넓이는 37이다.

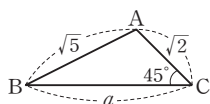
답 37

08

$\overline{BC}=a$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+a^2-2 \times \sqrt{2} \times a \times \cos 45^\circ$$

..... ①



$$a^2-2a-3=0$$

$$(a+1)(a-3)=0$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

..... ②

사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin A}=\frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\sin A=3 \times \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{5}}=3 \times \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

..... ③

답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

채점 기준	배점 비율
① $\overline{BC}=a$ 로 놓고 식을 세운 경우	30%
② a 의 값을 구한 경우	40%
③ $\sin A$ 의 값을 구한 경우	30%

09

오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 반지름의 길이가 1이고, 호 BP의 길이가 θ 이므로

$$\angle POB=\theta$$

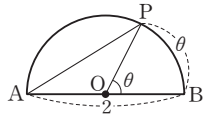
삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP}^2=1^2+1^2-2 \times 1 \times 1 \times \cos(\pi-\theta)$$

$$=2+2 \cos \theta=2(1+\cos \theta)$$

$$\text{따라서 } \overline{AP}=\sqrt{2(1+\cos \theta)}$$

답 ⑤



10

코사인법칙의 변형에서

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+8^2-13^2}{2 \times 7 \times 8}=-\frac{56}{112}=-\frac{1}{2}$$

그런데 $0<C<\pi$ 이므로 $C=\frac{2}{3}\pi$

답 ⑤

11

$a^2=b^2+c^2+\frac{bc}{2}$ 이므로 코사인법칙의 변형에서

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{b^2+c^2-\left(b^2+c^2+\frac{bc}{2}\right)}{2bc}$$

$$=-\frac{\frac{bc}{2}}{2bc}=-\frac{1}{4}$$

답 ③

12

코사인법칙에 의하여

$$a^2=5^2+3^2-2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$=25+9-2 \times 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

즉 $a=7$

코사인법칙의 변형에서

$$\cos B = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 7} = \frac{33}{42} = \frac{11}{14}$$

$$\cos C = \frac{7^2 + 5^2 - 3^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$$

$$\text{따라서 } \cos B + \cos C = \frac{11}{14} + \frac{13}{14} = \frac{12}{7}$$

답 ④

13

삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = 12 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin A = 12, \quad 24 \sin A = 12$$

$$\sin A = \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } 0 < A < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } A = \frac{\pi}{6}$$

답 ②

14

$$A = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

즉 삼각형 ABC는 $A = B$ 이므로 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \sin C &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ③

15

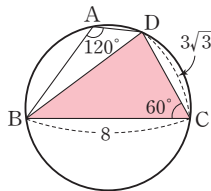
원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin 60^\circ \\ = \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \end{aligned}$$

답 ②



16

코사인법칙의 변형에서

$$\cos A = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 5} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

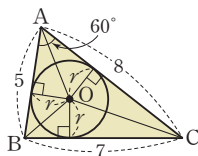
$$A = 60^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} bc \sin A &= \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

..... ②

한편 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면



..... ①

$$\triangle ABC = \triangle ABO + \triangle BCO + \triangle ACO$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times r + \frac{1}{2} \times 7 \times r + \frac{1}{2} \times 8 \times r$$

$$= 10r$$

따라서 $10r = 10\sqrt{3}$ 이므로

$$r = \sqrt{3}$$

..... ③

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	배점 비율
① A의 크기를 구한 경우	20%
② 삼각형 ABC의 넓이를 구한 경우	40%
③ 내접하는 원의 반지름의 길이를 구한 경우	40%

17

세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형 ABC의 넓이를 S , 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{이므로}$$

$$6\sqrt{3} = \frac{168}{4R}$$

$$\text{따라서 } R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

18

삼각형 ABC의 넓이를 S , 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \text{이므로}$$

$$S = 10 \sin A \sin B \sin C \text{에서}$$

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = 10 \sin A \sin B \sin C$$

$$2R^2 = 10$$

$$\text{따라서 } R = \sqrt{5}$$

답 ③

19

사각형 ABCD가 평행사변형이므로

$$B = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

이때 평행사변형 ABCD의 넓이가 $12\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ = 12\sqrt{2} \text{에서}$$

$$6 \times \overline{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \overline{BC} = 4$$

답 4

20

사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

답 $20\sqrt{3}$

다른풀이

$$\overline{AO}=a, \overline{BO}=b \text{라 하면}$$

$$\overline{CO}=8-a, \overline{DO}=10-b$$

$$\triangle AOB = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

$$\triangle BOC = \frac{1}{2}b(8-a) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}b(8-a)$$

$$\triangle COD = \frac{1}{2}(8-a)(10-b) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(8-a)(10-b)$$

$$\triangle DOA = \frac{1}{2}(10-b)a \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(10-b)a$$

따라서

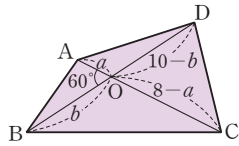
□ ABCD

$$= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}ab + \frac{\sqrt{3}}{4}b(8-a) + \frac{\sqrt{3}}{4}(8-a)(10-b) + \frac{\sqrt{3}}{4}(10-b)a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{ab + b(8-a) + (8-a)(10-b) + (10-b)a\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 80 = 20\sqrt{3}$$



21

사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}ab \sin 30^\circ$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times ab \times \frac{1}{2} = 2 \text{에서 } ab=8$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 7^2 - 2 \times 8 = 33$$

답 ②

내신&수능 대비 실력 문제

pp.93~94

01 ② 02 34 03 ② 04 72 05 ③ 06 ②

07 ④ 08 ③ 09 $\sqrt{2}$ 10 $\frac{5}{16}$ 11 $\frac{3}{2}\pi$

01

삼각형 ABQ에서

$$\angle AQB = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ \text{이므로}$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{60}{\sin 60^\circ}$$

$$\overline{AQ} = \frac{60}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{6}(\text{cm})$$

또 $\angle PQA = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 APQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} \tan 60^\circ = 20\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 60\sqrt{2}(\text{m})$$

답 ②

02

삼각형 BCD가 지름의 길이가 6인 원에 내접
하므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 6$$

$$\overline{BD} = 6 \times \sin \frac{2}{3}\pi = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$\overline{CD} = x$ 라 하면 $\overline{BC} = 2x$ 이므로

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{3})^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \times 2x \times x \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

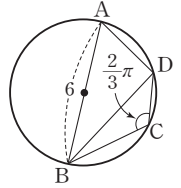
$$27 = 4x^2 + x^2 - 4x^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$7x^2 = 27$$

$$\text{즉 } x^2 = \frac{27}{7}$$

따라서 $p=7, q=27$ 이므로

$$p+q=34$$



답 34

03

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에
의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{코사인법칙의 변형에서 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이것을 $\sin A = 2 \cos B \sin C$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{c}{2R}$$

$$a^2 = c^2 + a^2 - b^2, c^2 - b^2 = 0$$

$$(c+b)(c-b) = 0$$

그런데 $c+b > 0$ 이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

04

$$\overline{BP} = \overline{QC} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 ABQ에서

$$\overline{AQ} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

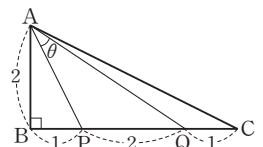
$\overline{PQ} = 2$ 이므로 삼각형 APQ에서 코사인법칙의 변형에서

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{13})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{7}{65} \sqrt{65}$$

따라서 $p=65, q=7$ 이므로

$$p+q=72$$

답 72



05

코사인법칙의 변형에서

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = ab, \text{ 즉 } a^2 + b^2 = c^2 + ab$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} &= \frac{a(c+a) + b(b+c)}{(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + bc + ca}{ab + bc + ca + c^2} \\ &= \frac{c^2 + ab + bc + ca}{ab + bc + ca + c^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 ③

06

$\overline{BC} = a$ 라 하면

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} (2\sqrt{7})^2 &= a^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ &\quad - 2 \times a \times 2\sqrt{3} \times \cos 30^\circ \end{aligned}$$

$$a^2 - 6a - 16 = 0$$

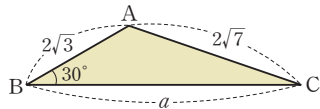
$$(a+2)(a-8) = 0$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 8$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 8 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 8 \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$$

답 ②



07

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{AD} \times \frac{1}{2} = 2\overline{AD}$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AD} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\overline{AD}$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \text{이므로}$$

$$12\sqrt{3} = 2\overline{AD} + \frac{3}{2}\overline{AD}, \quad 12\sqrt{3} = \frac{7}{2}\overline{AD}$$

$$\text{따라서 } \overline{AD} = \frac{24\sqrt{3}}{7}$$

답 ④

08

평행사변형 ABCD의 대각선 AC

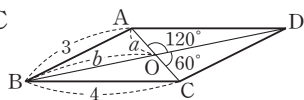
와 BD의 교점을 O라 하면

$$\angle AOB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$$\overline{AO} = a, \overline{BO} = b \text{라 하면 } \overline{CO} = a, \overline{DO} = b$$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여



$$3^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$

$$a^2 + b^2 - ab = 9 \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 AOD에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$$

$$a^2 + b^2 + ab = 16 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉡ - ㉠ \text{을 하면 } 2ab = 7$$

$$\text{즉 } ab = \frac{7}{2}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2a \times 2b \times \sin 60^\circ = 2ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{7}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

09

원의 중심을 O라 하면

$$\begin{aligned} \triangle APO &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

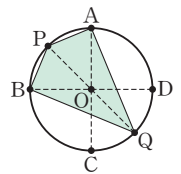
$$\triangle AOQ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서

$$\square APBQ = 2\triangle APO + 2\triangle AOQ$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$



10

$$\angle BAC = a \text{라 하면 } \theta = a - \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos a$$

$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times a \times \overline{AD}$$

$$= \frac{1}{2} \times b \times \overline{BE}$$

$$= \frac{1}{2} \times c \times \overline{CF}$$

$$a = \frac{2S}{\overline{AD}}, \quad b = \frac{2S}{\overline{BE}}, \quad c = \frac{2S}{\overline{CF}}$$

$$a : b : c = \frac{2S}{\overline{AD}} : \frac{2S}{\overline{BE}} : \frac{2S}{\overline{CF}}$$

$$= \frac{1}{\overline{AD}} : \frac{1}{\overline{BE}} : \frac{1}{\overline{CF}}$$

$$= \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{10}$$

$$= 5 : 4 : 2$$

$\dots\dots ㉠$

$a = 5k, b = 4k, c = 2k$ (k 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(4k)^2 + (2k)^2 - (5k)^2}{2 \times 4k \times 2k} \end{aligned}$$

$$= \frac{-5k^2}{16k^2} = -\frac{5}{16}$$

따라서 $\sin \theta = -\cos \alpha = \frac{5}{16}$

..... ②

..... ③

답 $\frac{5}{16}$

채점 기준	배점 비율
① 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비를 구한 경우	50%
② $\cos A$ 의 값을 구한 경우	30%
③ $\sin \theta$ 의 값을 구한 경우	20%

11

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ADC = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)라 하면

$\angle ABC = \pi - \theta$

$\overline{AC} = x$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= 41 + 40 \cos \theta$$

$$= 41 + 40 \times \frac{1}{5}$$

$$= 49$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 7$

..... ①

$$\text{즉 } \sin(\pi - \theta) = \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

..... ②

또한 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (5 + 4 + 7) = 8r$$

이므로

$$8r = 4\sqrt{6}, r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

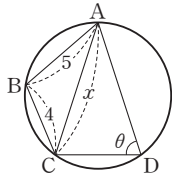
따라서 삼각형 ABC에 내접하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\pi$$

..... ③

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	배점 비율
① 선분 AC의 길이를 구한 경우	40%
② 삼각형 ABC의 넓이를 구한 경우	30%
③ 내접하는 원의 넓이를 구한 경우	30%



III 수열

8 등차수열과 등비수열

pp.98~108

- 01 ② 02 1025 03 ① 04 ② 05 21 06 ⑤
 07 32 08 ① 09 ③ 10 ① 11 ② 12 284
 13 210 14 345 15 ④ 16 ① 17 161 18 10
 19 ② 20 ① 21 ② 22 ④ 23 ① 24 ⑤
 25 ⑤ 26 216 27 ③ 28 9 29 ④
 30 402만 원

01

주어진 수열은 분모가 n이고 분자가 n+1인 분수를 차례로 나열한 것이므로

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

$$\text{따라서 } a_{10} \times a_{99} = \frac{11}{10} \times \frac{100}{99} = \frac{10}{9}$$

답 ②

02

주어진 수열의 홀수 번째 항은 1이므로

$$a_{2n-1} = 1$$

$$a_2 = 2, a_4 = 2^2, a_6 = 2^3, a_8 = 2^4, \dots \text{이므로}$$

$$a_{2n} = 2^n$$

$$\text{따라서 } a_{20} + a_{111} = 2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025$$

답 1025

03

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다.

따라서 주어진 수열의 일반항은 $a_n = (-1)^{n-1} \times (2n-1)$ 이므로

$$a_{100} = (-1)^{99} \times 199 = -199$$

답 ①

04

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_3 = a + 2d = 11 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_9 = a + 8d = 29 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 5, d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로

$$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

$$\text{따라서 } a_{20} = 3 \times 20 + 2 = 62$$

답 ②

05

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_2 + a_{10} = 6 \text{에서}$$

$$(a+d)+(a+9d)=6\text{이므로}$$

$$a+5d=3$$

따라서

$$\begin{aligned} 6a_1+a_{36} &= 6a+(a+35d) \\ &= 7a+35d \\ &= 7(a+5d) \\ &= 7 \times 3 = 21 \end{aligned}$$

답 21

06

공차를 d 라 하면 $a_1+a_2=11$ 에서

$$a_1+(a_1+d)=11\text{이므로}$$

$$2a_1+d=11 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_3+a_4+a_5=54\text{에서}$$

$$(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)=54\text{이므로}$$

$$a_1+3d=18 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=3, d=5$

$$\text{따라서 } a_{10}=a_1+9d=3+9 \times 5=48$$

답 ⑤

07

a 가 5와 11의 등차중항이므로

$$a=\frac{5+11}{2}=8$$

..... ①

4가 $\log_2 b$ 와 $\log_2 c$ 의 등차중항이므로

$$\log_2 b + \log_2 c = 2 \times 4 \text{에서}$$

$$\log_2 bc = 8$$

$$bc = 2^8 = 256$$

..... ②

$$\text{따라서 } \frac{bc}{a} = \frac{256}{8} = 32$$

..... ③

답 32

채점 기준	배점 비율
① a 의 값을 구한 경우	40%
② bc 의 값을 구한 경우	40%
③ $\frac{bc}{a}$ 의 값을 구한 경우	20%

08

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 를 $x-1, x-2, x+1$ 로 나눈 나머지는 각각 $f(1), f(2), f(-1)$ 이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2f(2)=f(1)+f(-1)$$

$$\text{즉 } 2(4+2a+b)=(1+a+b)+(1-a+b)$$

$$8+4a+2b=2+2b\text{이므로}$$

$$a=-\frac{3}{2}$$

답 ①

09

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 a_2, a_6, a_{10} 과 a_4, a_6, a_8 그리고 a_5, a_6, a_7 은 모두 등차수열을 이룬다.

따라서 a_6 은 a_2 와 a_{10} , a_4 와 a_8 , a_5 와 a_7 의 등차중항이므로

$$\begin{aligned} a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10} \\ &= (a_2+a_{10})+(a_4+a_8)+a_6 \\ &= 2a_6+2a_6+a_6=5a_6 \\ &= 5 \times \frac{a_5+a_7}{2} \\ &= 5 \times \frac{60}{2} = 150 \end{aligned}$$

답 ③

10

공차를 d 라 하면

$$a_4-a_1=6\text{에서 } 3d=6\text{이므로 } d=2$$

$$a_3=3\text{에서 } a_1+2d=3\text{이므로}$$

$$a_1+2 \times 2=3, a_1=-1$$

따라서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2 \times (-1)+9 \times 2\}}{2}=80$$

답 ①

11

첫째항을 a , 공차를 d 라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3=\frac{3(2a+2d)}{2}=24\text{이므로}$$

$$a+d=8 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=185\text{이므로}$$

$$2a+9d=37 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, d=3$

$$\text{따라서 } S_{20}=\frac{20\{2 \times 5+(20-1) \times 3\}}{2}=670$$

답 ②

12

공차를 d 라 하면

$$a_5=6+4d=-2\text{에서 } d=-2\text{이므로}$$

$$a_n=6+(n-1) \times (-2)=-2n+8$$

이때 $a_n \geq 0$ 에서 $-2n+8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$\begin{aligned} |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| \\ &= a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20}) \\ &= 2(a_1+a_2+a_3+a_4)-(a_1+a_2+\cdots+a_{20}) \\ &= 2S_4-S_{20} \\ &= 2 \times \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} \quad (a_4=0, a_{20}=-32\text{이므로}) \\ &= 24+260=284 \end{aligned}$$

답 284

13

a_n 은 삼각형의 넓이의 차로 나타낼 수 있으므로

$$a_n = \frac{1}{2} \times n \times 2n - \frac{1}{2} \times (n-1) \times 2(n-1) \\ = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

따라서 $a_2=3, a_{20}=39$

$$\text{그러므로 } a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = \frac{10(3+39)}{2} = 210 \quad \text{답 210}$$

14

통나무의 개수는 맨 아래 단부터 30, 29, 28, ...이고, 모두 15단이 있으므로 필요한 통나무의 개수는 첫째항이 30, 공차가 -1, 항의 개수가 15인 등차수열의 합과 같다.

따라서 필요한 통나무의 개수는

$$\frac{15\{2 \times 30 + 14 \times (-1)\}}{2} = 345 \quad \text{답 345}$$

15

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3=3 \text{에서 } ar^2=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{11}=48 \text{에서 } ar^{10}=48 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^8=16, r^4=4$$

$$\text{따라서 } \frac{a_9}{a_5} = \frac{ar^8}{ar^4} = r^4 = 4 \quad \text{답 4}$$

16

공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_3 = -20 \text{에서}$$

$$a_1r + a_1r^2 = a_1(r+r^2) = -20 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 첫째항이 양수이므로

$$r+r^2 < 0 \text{에서 } r(1+r) < 0$$

$$-1 < r < 0$$

$$\text{또 } a_1=4a_3 \text{에서 } a_1=4a_1r^2, r^2=\frac{1}{4}$$

$$\text{그런데 } -1 < r < 0 \text{이므로 } r = -\frac{1}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a_1=80$$

$$\text{따라서 } a_6 = a_1r^5 = 80 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{5}{2} \quad \text{답 1}$$

17

세 수 $a, 8, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$ab=8^2=64$$

또 조건에서 $a+b=17$ 이므로

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=17^2-2 \times 64=161 \quad \text{답 161}$$

18

세 수 $3, a, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2=3b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

세 수 $1, 2a, 5b+14$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(2a)^2=1 \times (5b+14)$$

$$4a^2=5b+14 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 12b=5b+14, 7b=14, b=2$$

$$b=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a^2=6 \text{이므로} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$a^2+b^2=6+2^2=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 10

채점 기준	배점 비율
① 등비중항의 성질을 이용하여 두 개의 식을 구한 경우	50%
② a^2, b 의 값을 구한 경우	30%
③ a^2+b^2 의 값을 구한 경우	20%

19

75, $y, 12$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$y^2=75 \times 12 = (3 \times 5^2) \times (2^2 \times 3) = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$$

이때 $y > 0$ 이므로 $y=30$

또한 x, y, z 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$y^2=xz$$

$$\text{따라서 } xyz=y^3=30^3 \text{이므로}$$

$$\frac{xyz}{1000} = \frac{30^3}{10^3} = 3^3 = 27 \quad \text{답 2}$$

20

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n

이라 하면 $S_5=30, S_{10}=90$ 이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5-1)}{r-1} = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1} = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 30(r^5+1)=90 \text{이므로 } r^5=2$$

따라서 첫째항부터 제 15항까지의 합 S_{15} 는

$$S_{15} = \frac{a(r^{15}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1} \\ = 30(2^2+2+1) = 210 \quad \text{답 1}$$

21

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 $\frac{1}{11}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{11}$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19} = \frac{\frac{1}{11}(2^{10}-1)}{2-1} = 93 \quad \text{답 2}$$

22

$$AB = 2^{10} \times 5^{10}$$

따라서 AB 의 양의 약수의 총합은

$$(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(1+5+5^2+\cdots+5^{10})$$

$$= \frac{2^{11}-1}{2-1} \times \frac{5^{11}-1}{5-1}$$

$$= (2 \times 2^{10} - 1) \times \frac{1}{4} (5 \times 5^{10} - 1)$$

$$= (2A-1) \times \frac{1}{4} (5B-1)$$

$$= \frac{1}{4} (2A-1)(5B-1)$$

답 ④

23

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2 \times 3^n + k) - (2 \times 3^{n-1} + k) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$= 2 \times 3^{n-1} (3-1) = 4 \times 3^{n-1}$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 3 + k = 6 + k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 $\textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$6+k=4 \text{에서 } k=-2$$

답 ①

24

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + 5n - 1 - \{(n-1)^2 + 5(n-1) - 1\}$$

$$= 2n + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1 + 5 - 1 = 5$$

그런데 이것은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

$$\text{따라서 } a_1 + a_3 + a_5 = 5 + 10 + 14 = 29$$

답 ⑤

25

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3 \times 2^{n+1} - 1 - (3 \times 2^n - 1) = 3 \times 2^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 \times 2^2 - 1 = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입하면 $\textcircled{2}$ 과 다르므로 이 수열은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

$$\text{따라서 } a_1 + a_4 = 11 + 48 = 59$$

답 ⑤

26

공비를 r 라 하면 가로, 세로, 높이는 각각 a , ar , ar^2 이다.

모서리의 길이의 총합은 $4(a+ar+ar^2)=60$ 에서

$$a(1+r+r^2)=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 겹넓이는 $2(a \times ar + a \times ar^2 + ar \times ar^2) = 180$ 에서

$$a^2 r (1+r+r^2) = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } ar=6$$

따라서 직육면체의 부피 V 는

$$V = a \times ar \times ar^2 = a^3 r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

답 216

27

점 $C(y)$ 는 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\text{점 } C \text{의 좌표는 } y = \frac{6+2x}{3}$$

이때 x , $\frac{6+2x}{3}$, 6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\left(\frac{6+2x}{3}\right)^2 = 6x$$

$$\frac{4x^2 + 24x + 36}{9} = 6x, \quad 2x^2 - 15x + 18 = 0$$

$$(2x-3)(x-6) = 0$$

$$\text{그런데 } x < 6 \text{이므로 } x = \frac{3}{2}$$

답 ③

28

점 P 가 원점을 출발하여 t ($t=1, 2, 3, \dots$)초 동안 움직인 거리는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 합이므로 점 P 가 원점을 출발하여 t 초 동안 움직인 거리를 $s(t)$ 라 하면

$$s(t) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) = 2 - \frac{1}{2^{t-1}}$$

$$2 - s(t) = \frac{1}{2^{t-1}} \leq \frac{1}{500} \text{에서 } 2^{t-1} \geq 500$$

$2^8=256$, $2^9=512$ 이므로 점 P 와 점 $A(2)$ 사이의 거리가 처음으로 $\frac{1}{500}$ 이내가 되는 것은 출발 후 9초와 10초 사이이다.

$$\text{따라서 } n=9$$

답 9

29

n 개월 후에 주문 받는 목표량은 $100 \times 1.1^{n-1}$ (l)이므로 12개월 동안의 목표량은

$$100 + 100 \times 1.1 + 100 \times 1.1^2 + \cdots + 100 \times 1.1^{11}$$

$$= \frac{100(1.1^{12}-1)}{1.1-1} = \frac{100(3.14-1)}{0.1}$$

$$= 2140(l)$$

답 ④

30

매월 초 10만 원씩 적립한 금액의 원리합계는 다음과 같다.

현재	1개월 후	2개월 후	3개월 후	...	34개월 후	35개월 후	36개월 후
1회	10만 원				36개월		$10(1+0.005)^{36}$
2회		10만 원			35개월		$10(1+0.005)^{35}$
3회			10만 원		34개월		$10(1+0.005)^{34}$
⋮				⋮			⋮
35회				10만 원	2개월		$10(1+0.005)^2$
36회				10만 원	1개월		$10(1+0.005)$

즉 첫째항이 $10(1+0.005)$ (만 원), 공비가 1.005, 항수가 36인 등비수열의 합이므로

$$\frac{10 \times 1.005(1.005^{36} - 1)}{1.005 - 1} = \frac{10 \times 1.005 \times 0.2}{0.005} = 402(\text{만 원})$$

답 402만 원

단권화 노트

적립금의 원리합계

일정한 금액을 일정한 기간마다 적립할 때, 매년 초와 매년 말에 적립하는 경우의 적립금의 원리합계는 다음과 같다.

연이율 r , 1년마다 복리로 a 원씩 적립할 때, n 년째 말의 적립금의 원리합계 S_n 는

(1) 매년 초에 적립하는 경우

$$\Rightarrow S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} (\text{원})$$

(2) 매년 말에 적립하는 경우

$$\Rightarrow S = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} (\text{원})$$

내신&수능 대비 실력 문제

pp.109~110

- 01 16 02 ① 03 132 04 ④ 05 ④ 06 ②
 07 ④ 08 6 09 ③ 10 12 11 28
 12 3150만 원

01

수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로

수열 $\{b_n\}$, 즉 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a_1 이고 공차가 1인 등차수열이고,

수열 $\{c_n\}$, 즉 수열 $\{a_{3n-2}\}$ 는 첫째항이 a_1 이고 공차가 $\frac{3}{2}$ 인 등차수열이다.

따라서

$$b_n + c_n = a_1 + (n-1) + a_1 + (n-1) \times \frac{3}{2} = 2a_1 + (n-1) \times \frac{5}{2}$$

$$\text{이때 } b_{11} + c_{11} = 10 \text{에서 } 2a_1 + 10 \times \frac{5}{2} = 2a_1 + 25 = 10$$

$$a_1 = -\frac{15}{2}$$

$$\text{따라서 } a_n = -\frac{15}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = 0 \text{에서}$$

$$n = 16$$

답 16

단권화 노트

수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 d 인 등차수열일 때

(1) $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\} \Rightarrow$ 공차가 $2d$ 인 등차수열

(2) $\{a_{3n}\}, \{a_{3n-1}\}, \{a_{3n-2}\} \Rightarrow$ 공차가 $3d$ 인 등차수열

(3) $\{a_{4n}\}, \{a_{4n-1}\}, \{a_{4n-2}\}, \{a_{4n-3}\} \Rightarrow$ 공차가 $4d$ 인 등차수열

02

공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{3}{2}(2 \times 14 + 2d) = 42 + 3d$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(2 \times 14 + 4d) = 70 + 10d$$

이때 $S_3 = S_5$ 이므로

$$42 + 3d = 70 + 10d \text{에서}$$

$$7d = -28, d = -4$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \times 14 + (n-1) \times (-4)\}$$

$$= -2n^2 + 16n$$

$$= -2n(n-8)$$

$$S_n < 0 \text{이라면 } n(n-8) > 0 \text{이므로}$$

$$n < 0 \text{ 또는 } n > 8$$

$$\text{그런데 } n > 0 \text{이므로 } n > 8$$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

답 ①

03

점 $(n, 0)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y 좌표를 a_n 이라 하면 a_n 을 n 에 대한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 4 \text{에서 } a + 2d = 4 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_9 = 8 \text{에서 } a + 8d = 8 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = \frac{8}{3}, d = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{8}{3} + (n-1) \times \frac{2}{3} = \frac{2n+6}{3} \text{이므로}$$

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} = \frac{11\left(\frac{26}{3} + \frac{46}{3}\right)}{2} = 132$$

답 132

04

$S_n = 3n - 1 = 2 + 3(n-1)$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 2이고
공차가 3인 등차수열이다.

따라서

$$\begin{aligned} & 10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + \cdots + 2a_9 + a_{10} \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_8) \\ & \quad + \cdots + (a_1 + a_2) + a_1 \\ &= S_{10} + S_9 + S_8 + \cdots + S_2 + S_1 \\ &= \frac{10(2 \times 2 + 9 \times 3)}{2} \\ &= 155 \end{aligned}$$

답 ④

05

제 n 행의 수열의 합을 S_n 이라 하면

제 1행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_1 = \frac{10(2 \times 1 + 9 \times 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 100, 공차가 $3 \times 10 = 30$ 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{10} &= \frac{10(2 \times 100 + 9 \times 30)}{2} \\ &= 2350 \end{aligned}$$

답 ④

06

세 수 $a, b, 5$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 5 \quad \text{..... ㉠}$$

세 수 $2b-3, a, 1$ 은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 2b - 3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2 = (a+5) - 3, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0, \quad a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때

$b = 2$ 이고 $2b - 3 = 1$ 이므로 $2b - 3, a, 1$ 이 서로 다른 세 수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$b = \frac{7}{2}$ 이고 $2b - 3 = 4$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a = 2, \quad b = \frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{11}{2}$$

답 ②

07

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\text{따라서 } \frac{b_4}{b_7} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{13-7}} = \frac{1}{\frac{1}{2^6}} = 2^6 = 64$$

답 ④

08

공비를 r 라 하면

$$a = 2\sqrt{2}r, \quad d = \frac{5\sqrt{5}}{r} \text{이므로}$$

$$ad = 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{10} = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$b = 2\sqrt{2}r^2, \quad c = \frac{5\sqrt{5}}{r^2} \text{이므로}$$

$$bc = 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{10} = 10^{\frac{3}{2}}$$

따라서

$$\log a^2 + \log b^2 + \log c^2 + \log d^2$$

$$= \log a^2 b^2 c^2 d^2$$

$$= \log (abcd)^2$$

$$= \log (10^{\frac{3}{2}} \times 10^{\frac{3}{2}})^2$$

$$= \log 10^6$$

$$= 6$$

답 6

09

A 도시의 올해 인구를 a , 인구 증가율을 r 라 하면 n 년 후의 인구는 $a(1+r)^n$ 명이다.

10년 후의 인구가 6만 명이므로

$$a(1+r)^{10} = 6 \times 10^4 \quad \text{..... ㉠}$$

20년 후의 인구가 9만 명이므로

$$a(1+r)^{20} = 9 \times 10^4 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면 } (1+r)^{10} = \frac{3}{2}$$

30년 후의 인구는

$$a(1+r)^{30} = a(1+r)^{10} \{(1+r)^{10}\}^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 135000(\text{명})$$

따라서 A 도시의 30년 후의 인구는 13.5만 명이다.

답 ③

10

공차를 d 라 하면

조건 ㉠에서

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 114 \text{이므로}$$

$$3a_1 + 3d = 114$$

$$a_1 + d = 38 \quad \text{..... ㉡}$$

조건 ㉡에서

$$(a_m - 2d) + (a_m - d) + a_m = 66 \text{이므로}$$

$$3a_m - 3d = 66$$

$$a_m - d = 22 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면 $a_1 + a_m = 60$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = \frac{m}{2}(a_1 + a_m) = \frac{m}{2} \times 60 = 330 \text{에서}$$

$$m = 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$m = 11$ 을 \textcircled{A} 에 대입하면

$$a_{11} - d = 22 \text{에서}$$

$$a_1 + 10d - d = 22$$

$$a_1 + 9d = 22 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a_1 = 40, d = -2$ 이므로

$$a_n = 40 + (n-1) \times (-2) = -2n + 42 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } a_{15} = -30 + 42 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 12

채점 기준	배점 비율
① m 의 값을 구한 경우	50%
② 수열의 일반항을 구한 경우	30%
③ a_{15} 의 값을 구한 경우	20%

11

$$a_1 + a_5 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또한 a_1, a_3, a_5 는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_1 \times a_5 = a_3^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 a_1, a_5 는 이차방정식 $x^2 - 12x + 32 = 0$ 의 두 근이다.

$$(x-4)(x-8) = 0 \text{이므로}$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 $a_1 > a_2$, 즉 공비가 1보다 작으므로

$$a_1 = 8, a_5 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

공비를 r 라 하면 $a_5 = 4$ 에서

$$8r^4 = 4, r^4 = \frac{1}{2}$$

즉 $r = 2^{-\frac{1}{4}}$ 이므로 일반항은

$$a_n = 8 \times \left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^{n-1} = 2^{\frac{13-n}{4}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 a_n 이 자연수가 되는 경우는 $\frac{13-n}{4}$ 에서 $13-n$ 이 4의 배수가 될 때이다.

즉 $13-n = 12, 8, 4, 0$ 에서

$$n = 1, 5, 9, 13$$

따라서 집합 $A = \{1, 5, 9, 13\}$ 이므로 모든 원소의 합은

$$1 + 5 + 9 + 13 = 28 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 28

채점 기준	배점 비율
① a_1, a_5 의 값을 구한 경우	30%
② 수열의 일반항을 구한 경우	30%
③ 집합 A 의 모든 원소의 합을 구한 경우	40%

12

매년 말 갚는 금액 a 억 원의 원리합계는 다음과 같다.

현재	1년 후	2년 후	3년 후	...	9년 후	10년 후
1회	a 억 원				9년간	$a(1+0.05)^9$
2회	$a(1+0.05)$ 억 원				8년간	$a(1+0.05)^9$
3회	$a(1+0.05)^2$ 억 원				7년간	$a(1+0.05)^9$
...				
9회			$a(1+0.05)^8$ 억 원		1년간	$a(1+0.05)^9$
10회			$a(1+0.05)^9$ 억 원			$a(1+0.05)^9$

$$a(1+0.05)^9 + a(1+0.05)^9 + \dots + a(1+0.05)^9$$

$$= 10a(1+0.05)^9 (\text{억 원}) \quad \dots\dots \textcircled{A} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

3억 원의 10년 후의 원리합계는

$$3(1+0.05)^{10} (\text{억 원}) \quad \dots\dots \textcircled{B} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

\textcircled{A} 과 \textcircled{B} 이 같아야 하므로

$$3(1+0.05)^{10} = 10a(1+0.05)^9$$

$$3(1+0.05) = 10a \text{에서}$$

$$a = 0.315 (\text{억 원})$$

따라서 첫 해에 갚아야 할 금액은 3150만 원이다. $\dots\dots \textcircled{3}$

답 3150만 원

채점 기준	배점 비율
① 매년 말에 갚아야 할 금액에 대한 10년 동안의 원리합계를 구한 경우	30%
② 3억 원에 대한 10년 말의 원리합계를 구한 경우	50%
③ 첫 해에 갚아야 할 금액을 구한 경우	20%

III 수열

9 수열의 합

pp.114~122

- 01 100 02 ④ 03 ③ 04 ① 05 56 06 ①
 07 ③ 08 ⑤ 09 ④ 10 ① 11 ② 12 ⑤
 13 ③ 14 ④ 15 ③ 16 ② 17 ④ 18 ②
 19 ① 20 12 21 ③ 22 ③ 23 ① 24 ②
 25 ③

01

$$\sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k})$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k = 10^2 = 100 \quad \text{답 100}$$

02

$$\sum_{k=1}^{10} (a_{k+1} - a_k)$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{11} - a_{10})$$

$$= a_{11} - a_1 = 32 - 1 = 31 \quad \text{답 ④}$$

03

$$\neg. 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \sum_{k=1}^n 3^k \text{ (거짓)}$$

$$\neg. 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + \cdots + n \times 1$$

$$= \sum_{k=1}^n k(n-k+1) \text{ (거짓)}$$

$$\square. \text{수열 } 1 \times 2^2, 2 \times 2^3, 3 \times 2^4, \dots \text{의 제} k \text{항이 } k \times 2^{k+1} \text{이므로}$$

$$1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + 4 \times 2^5 + \cdots + 10 \times 2^{11}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \times 2^{k+1} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 \square 뿐이다. 답 ③

04

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2 = \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 - 12a_k + 9)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 4a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 12a_k + \sum_{k=1}^{10} 9$$

$$= 4 \times 20 - 12 \times 5 + 9 \times 10$$

$$= 110 \quad \text{답 ①}$$

05

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{10} \{(a_k + b_k) + (2a_k - b_k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 3a_k = 3 \sum_{k=1}^{10} a_k$$

에서 $3 \sum_{k=1}^{10} a_k = 22 + 8 = 30$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \quad \cdots \text{㉠} \quad \text{..... ①}$$

㉠을 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 22$ 에 대입하면

$$10 + \sum_{k=1}^{10} b_k = 22 \text{에서 } \sum_{k=1}^{10} b_k = 12 \quad \text{..... ②}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= 2 \times 10 + 3 \times 12$$

$$= 56 \quad \text{..... ③}$$

답 56

채점 기준	배점 비율
① $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구한 경우	40%
② $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구한 경우	30%
③ $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k)$ 의 값을 구한 경우	30%

06

$$\sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) = 50$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^{20} a_k = 50$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k + 2)^2 - \sum_{k=1}^{20} (a_k - 3)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + 4a_k + 4) - \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 - 6a_k + 9)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (10a_k - 5)$$

$$= 10 \sum_{k=1}^{20} a_k - 5 \sum_{k=1}^{20} 1$$

$$= 10 \times 50 - 5 \times 20 = 400 \quad \text{답 ①}$$

07

$$\sum_{k=1}^{10} (k+1)(k+a) = \sum_{k=1}^{10} \{k^2 + (1+a)k + a\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + (1+a) \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} a$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + (a+1) \times \frac{10 \times 11}{2} + 10a$$

$$= 385 + 55(a+1) + 10a$$

$$= 65a + 440$$

따라서 $65a + 440 = 50$ 에서 $65a = -390$

그러므로 $a = -6$

답 ③

08

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (k-1)^3 \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{ (k+1)^3 - (k-1)^3 \} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (6k^2 + 2) \\
 &= 6 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 20 \\
 &= 2330
 \end{aligned}$$

답 ⑤

09

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^9 \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3}{k^2} \\
 &= \sum_{k=1}^9 \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 \frac{1}{k^2} \\
 &= \sum_{k=1}^9 \frac{k^2(k+1)^2}{4k^2} \\
 &= \sum_{k=1}^9 \frac{(k+1)^2}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^9 (k^2 + 2k + 1) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{9 \times 10 \times 19}{6} + 2 \times \frac{9 \times 10}{2} + 9 \right) \\
 &= \frac{1}{4} (285 + 90 + 9) = 96
 \end{aligned}$$

답 ④

10

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^m (4k-3) \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^{10} \left\{ 4 \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m 3 \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^{10} \left\{ 4 \times \frac{m(m+1)}{2} - 3m \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^{10} (2m^2 - m) \\
 &= 2 \sum_{m=1}^{10} m^2 - \sum_{m=1}^{10} m \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} \\
 &= 715
 \end{aligned}$$

답 ①

11

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^5 \left(\sum_{m=1}^5 nm \right) &= \sum_{n=1}^5 \left(n \sum_{m=1}^5 m \right) = \sum_{n=1}^5 \left(n \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^5 15n = 15 \sum_{n=1}^5 n \\
 &= 15 \times \frac{5 \times 6}{2} = 15^2 = 225
 \end{aligned}$$

답 ②

12

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n 2^{k-n} &= \sum_{k=1}^n 2^k \times 2^{-n} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k=1}^n 2^k \\
 &= 2^{-n} \times \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \\
 &= 2(1 - 2^{-n})
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^n 2^{k-n} \right) &= \sum_{n=1}^5 2(1 - 2^{-n}) \\
 &= 2 \left\{ \sum_{n=1}^5 1 - \sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \\
 &= 2 \left[5 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5}{1 - \frac{1}{2}} \right] \\
 &= 2 \left(5 - 1 + \frac{1}{32} \right) = 8 + \frac{1}{16} = \frac{129}{16}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

13

$$\begin{aligned}
 & 1 \times 19 + 2 \times 18 + 3 \times 17 + \dots + 19 \times 1 \\
 &= 1 \times (20 - 1) + 2(20 - 2) + 3(20 - 3) + \dots + 19(20 - 19) \\
 &= \sum_{k=1}^{19} k(20 - k) \\
 &= \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2) \\
 &= 20 \times \frac{19 \times 20}{2} - \frac{19 \times 20 \times 39}{6} \\
 &= 1330
 \end{aligned}$$

답 ③

14

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+2) = n^2 + 2n$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + 2n - \{ (n-1)^2 + 2(n-1) \} \\
 &= 2n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3$

이것은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1 \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} a_{3k} &= \sum_{k=1}^{10} \{ 2(3k) + 1 \} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (6k + 1) \\
 &= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 \\
 &= 340
 \end{aligned}$$

답 ④

15

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
 &= \log_2(n^2+n) - \log_2\{(n-1)^2+(n-1)\} \\
 &= \log_2(n^2+n) - \log_2(n^2-n) \\
 &= \log_2 \frac{n^2+n}{n^2-n} \\
 &= \log_2 \frac{n(n+1)}{n(n-1)} \\
 &= \log_2 \frac{n+1}{n-1}
 \end{aligned}$$

이므로 $a_{2n+1} = \log_2 \frac{n+1}{n}$ (단, $n \geq 1$)

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{31} a_{2n+1} &= \log_2 2 + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{32}{31} \\
 &= \log_2 \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{32}{31} \right) \\
 &= \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5
 \end{aligned}$$

답 ③

16

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{15} \frac{2}{k^2+k} &= 2 \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16} \right) \right] \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{16} \right) \\
 &= \frac{15}{8}
 \end{aligned}$$

답 ②

17

수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \dots, \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 제 k 항은

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right] \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) \\
 &= \frac{20}{11}
 \end{aligned}$$

답 ④

18

수열 $\frac{3}{1^2 \times 2^2}, \frac{5}{2^2 \times 3^2}, \frac{7}{3^2 \times 4^2}, \dots$ 의 제 k 항은

$$\begin{aligned}
 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \text{ 이므로} \\
 (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^9 \frac{2k+1}{k^2 \times (k+1)^2} \\
 &= \sum_{k=1}^9 \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \right) \\
 &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{10^2} \\
 &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}
 \end{aligned}$$

답 ②

19

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\
 &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{47} \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^{47} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{48}) \\
 &= 7 - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $5 < 7 - \sqrt{2} < 6$

따라서 $n = 5$

답 ①

20

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \\
 &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1)
 \end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1) = 2$ 에서

$$\sqrt{2n+1} = 5, \quad 2n+1 = 25$$

$2n = 24$ 이므로 $n = 12$

답 12

21

첫째항과 공차가 모두 3인 등차수열의 일반항은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k}} \\ &= \sum_{k=1}^{48} \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}}{(\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k})(\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k})} \\ &= \sum_{k=1}^{48} \frac{\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \{ (\sqrt{6} - \sqrt{3}) + (\sqrt{9} - \sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{147} - \sqrt{144}) \} \\ &= \frac{1}{3} (-\sqrt{3} + \sqrt{147}) \\ &= \frac{1}{3} (-\sqrt{3} + 7\sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ③

22

$$\sum_{n=1}^{16} n \times 3^n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + 16 \times 3^{16} \text{이므로}$$

$$S = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + 16 \times 3^{16} \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + 16 \times 3^{16} \\ -) 3S &= \quad \quad 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 15 \times 3^{16} + 16 \times 3^{17} \\ -2S &= \quad 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{16} - 16 \times 3^{17} \\ &= \frac{3 \times (3^{16} - 1)}{3 - 1} - 16 \times 3^{17} \\ &= \frac{3^{17} - 3 - 32 \times 3^{17}}{2} \\ &= -\frac{31 \times 3^{17} + 3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } S = \frac{1}{4} (31 \times 3^{17} + 3) \text{이므로 } a = 31$$

답 ③

23

$$f(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + 21x^{10} \quad \cdots \textcircled{A}$$

①의 양변에 x 를 곱하면

$$xf(x) = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots + 21x^{11} \quad \cdots \textcircled{B}$$

①-②을 하면

$$\begin{aligned} (1-x)f(x) &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^{10} - 21x^{11} \\ &= 1 + \frac{2x(x^{10}-1)}{x-1} - 21x^{11} \quad (\text{단, } x \neq 1) \end{aligned}$$

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$-2 \times f(3) = 1 + 3(3^{10}-1) - 21 \times 3^{11} = -20 \times 3^{11} - 2$$

$$\text{따라서 } f(3) = 10 \times 3^{11} + 1$$

답 ①

24

제1행은 항이 1개, 제2행은 항이 2개, 제3행은 항이 3개, ...이므로 제 k 행은 항이 k 개이다.

제1행부터 제10행까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

따라서 제10행의 오른쪽 끝의 수는 55이므로 오른쪽에서 두 번째 수는 54이다.

답 ②

25

주어진 수열을 $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \dots$ 과 같이 군으로 묶으면 각 군의 항의 개수는 1, 2, 3, ...이다.

$$\text{한편 } 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{에서}$$

$$n=13 \text{일 때 } \frac{13 \times 14}{2} = 91 \text{이므로 제13군까지의 항의 개수는 91이다.}$$

따라서 제100항은 제14군의 9번째 수이다.

$$\text{그러므로 이 수열의 제100항은 } \frac{14-8}{14} = \frac{6}{14}$$

답 ③

내신&수능 대비 실력 문제

pp.123~124

01 ①	02 29	03 670	04 ②	05 ③	06 132
07 ③	08 ①	09 261	10 90	11 $\frac{20}{21}$	12 112

01

x_i 중 1을 a 개, 2를 b 개 택한다면

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \times a + 2 \times b = 20 \text{이므로 } a + 2b = 20 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1^2 \times a + 2^2 \times b = 34 \text{이므로 } a + 4b = 34 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=6, b=7$

$$\text{따라서 } \sum_{i=1}^n x_i^3 = 1^3 \times 6 + 2^3 \times 7 = 62$$

답 ①

02

$y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{29}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(14) = -12, f(15) = 12 \text{에서 } a_{14} + a_{15} = 0$$

$$f(13) = -4, f(16) = 4 \text{에서 } a_{13} + a_{16} = 0$$

\vdots

$$f(1) = -\frac{12}{27} = -\frac{4}{9}, f(28) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \text{에서 } a_1 + a_{28} = 0$$

$$f(29) = \frac{12}{29} > 0$$

따라서

$$m \leq 27 \text{ 일 때 } \sum_{n=1}^m a_n < 0$$

$$m = 28 \text{ 일 때 } \sum_{n=1}^m a_n = 0$$

$$m \geq 29 \text{ 일 때 } \sum_{n=1}^m a_n > 0$$

이므로 $\sum_{n=1}^m a_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값은 29이다.

답 29

03

$m = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 10$)일 때, m^2 도 짝수이므로

$$f(m^2) = \frac{m^2}{2} = 2k^2$$

$m = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, 10$)일 때, m^2 은 홀수이므로

$$f(m^2) = -10$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{20} f(m^2) &= \sum_{k=1}^{10} 2k^2 + \sum_{k=1}^{10} (-10) \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 10 \times 10 \\ &= 670 \end{aligned}$$

답 670

04

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^l k \right) &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \text{ 이므로}$$

$$n(n+1)(n+2) = 336$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 336 = 0$$

$$(n-6)(n^2 + 9n + 56) = 0$$

따라서 $n = 6$

답 ②

05

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2k-a)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4ak + a^2) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 4a \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} a^2 \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4a \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 \times a^2 \\ &= 10a^2 - 220a + 1540 \\ &= 10(a^2 - 22a + 154) \\ &= 10(a-11)^2 + 330 \end{aligned}$$

따라서 $a = 11$ 일 때, 최솟값 330을 갖는다.

답 ③

06

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 이므로 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면

$$(1+2+3+\dots+10)^2 = (1^2+2^2+3^2+\dots+10^2) + 2S$$

$$\begin{aligned} 2S &= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\ &= 2640 \end{aligned}$$

$$S = 1320$$

$$\text{따라서 } \frac{S}{10} = 132$$

답 132

07

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항끼리의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 6n$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 6n) - \{(n-1)^2 - 6(n-1)\} \\ &= 2n - 7 \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = -5$$

$$\text{따라서 } a_n = 2n - 7 \quad (n \geq 1)$$

$$20 \leq 2n - 7 \leq 40 \text{ 에서 } 27 \leq 2n \leq 47 \text{ 이므로}$$

$$13.5 \leq n \leq 23.5$$

따라서 $20 \leq a_n \leq 40$ 을 만족시키는 모든 항의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=14}^{23} (2k-7) &= \frac{10(21+39)}{2} \\ &= 300 \end{aligned}$$

답 ③

08

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+2}} + \frac{1}{\sqrt{4+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{20+19}} \\ = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{20}-\sqrt{19}) \\ = \sqrt{20} - 1 \end{aligned}$$

$$4 < \sqrt{20} < 5 \text{ 이므로 } 3 < \sqrt{20} - 1 < 4$$

따라서 $n = 3$

답 ①

09

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right), \dots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n} \right)$$

제 n 군의 항의 개수는 2^{n-1} 이므로 제 1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

이때 $n=7$ 이면 $2^7-1=128-1=127$ 이므로 제130항은 제8군의 3번째 항이다.

제 n 군에서 각 항의 분모는 2^n 이고, k 번째 항의 분자는 $2k-1$ 이므로 제8군의 3번째 항은 $\frac{2 \times 3 - 1}{2^8} = \frac{5}{256}$

따라서 제130항은 $\frac{5}{256}$ 이므로 $p=256$, $q=5$

그러므로 $p+q=261$

답 261

10

$n=1$, 2일 때, $2^m < n$ 을 만족시키는 자연수 m 의 값은 없다.

즉 $a_1=a_2=0$

$n=3$, 4일 때, $2^m < n$ 을 만족시키는 자연수 m 은 1의 1개이다.

즉 $a_3=a_4=1$

$n=5$, 6, 7, 8일 때, $2^m < n$ 을 만족시키는 자연수 m 은 1, 2의 2개이다.

즉 $a_5=a_6=a_7=a_8=2$

$n=9$, 10, ..., 16일 때, $2^m < n$ 을 만족시키는 자연수 m 은 1, 2, 3의 3개이다.

즉 $a_9=a_{10}=\cdots=a_{16}=3$

$n=17$, 18, ..., 30일 때, $2^m < n$ 을 만족시키는 자연수 m 은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

즉 $a_{17}=a_{18}=\cdots=a_{30}=4$

..... ①

따라서

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = 0 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 14$$

$$= 2 + 8 + 24 + 56 = 90$$

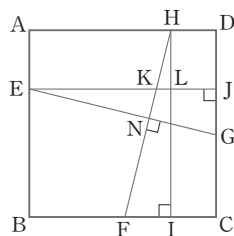
..... ②

답 90

채점 기준	배점 비율
① $n=1, 2, \dots, 30$ 일 때 m 의 값을 구한 경우	60%
② $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값을 구한 경우	40%

11

오른쪽 그림과 같이 점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 J라 하자. 두 선분 HF, HI와 선분 EJ가 만나는 점을 각각 K, L이라 하고, 선분 EG와 선분 HF가 만나는 점을 N이라 하면 $\angle HKL = \angle NKE$ 이고, $\angle KLH = \angle KNE = 90^\circ$ 이므로 $\angle KEN = \angle KHL$



또한 $\overline{HI} = \overline{EJ}$ 이고 $\angle FIH = \angle GJE = 90^\circ$ 이므로 두 삼각형 HFI, EGJ는 합동이다.

따라서 $\overline{EG} = \overline{HF} = \sqrt{4n^2 + 1}$ ①

$$S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{4n^2 + 1} \times \sqrt{4n^2 + 1} = \frac{4n^2 + 1}{2} = 2n^2 + \frac{1}{2} \quad \text{..... ②}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n - 1} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n^2 + \frac{1}{2} - 1} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n^2 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n^2 - 1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

답 $\frac{20}{21}$

채점 기준	배점 비율
① \overline{EG} 의 길이를 n 을 사용하여 나타낸 경우	30%
② S_n 을 구한 경우	20%
③ $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n - 1}$ 의 값을 구한 경우	50%

12

자연수를 군으로 묶으면 다음과 같다.

(1), (2, 3, 4) (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), ...
..... ①

제 n 군의 항의 개수는 $2n-1$ 이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \quad \text{..... ②}$$

이때 제10행 제11열에 있는 수는 제11군의 12번째 수이므로

$$10^2 + 12 = 112 \quad \text{..... ③}$$

답 112

채점 기준	배점 비율
① 나열된 자연수를 군으로 묶어서 나타낸 경우	30%
② 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수를 구한 경우	30%
③ 제10행 제11열에 있는 수를 구한 경우	40%

III 수열

10 수학적 귀납법

pp.128~134

- 01 -40 02 ⑤ 03 ③ 04 256 05 ③ 06 127
 07 27 08 ② 09 ② 10 ② 11 12 12 ①
 13 ② 14 ② 15 ④ 16 풀이 참조
 17 풀이 참조 18 풀이 참조 19 풀이 참조

01

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 $a_2 - a_1 = -1 - 2 = -3$ 이므로 첫째항이 2, 공차가 -3이다.
 따라서 $a_n = 2 + (n-1) \times (-3) = -3n + 5$ 이므로
 $a_{15} = -3 \times 15 + 5 = -40$ 답 -40

02

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -3인 등차수열이므로
 $a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$
 이때 $a_k = -22$ 에서 $a_k = -3k + 23 = -22$, $-3k = -45$
 따라서 $k = 15$ 답 ⑤

03

$\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$
 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$, 공차가 2인 등차수열
 이므로
 $\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$
 즉 $a_n = \frac{1}{2n-1}$ 이므로 $a_{20} = \frac{1}{39}$ 답 ③

04

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{2}$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$ 이므로
 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열이다.
 따라서 $a_9 = 1 \times (-2)^8 = 256$ 답 256

05

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{9}$, 공비가 $\sqrt{3}$ 인 등비수열이므로
 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{(\sqrt{3})^n}{9}$
 이때 $a_k = 27$ 에서 $\frac{(\sqrt{3})^k}{9} = 27$
 $(\sqrt{3})^k = 9 \times 27 = 3^{2+3} = 3^5$
 따라서 $k = 10$ 답 ③

06

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

공비를 r 라 하면

$$a_1 = \frac{1}{8}, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$$

이므로 첫째항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 2이다. ①

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{\frac{1}{8}(2^{10}-1)}{2-1} = 2^7 - \frac{1}{8} \text{이므로} \quad \text{..... ②}$$

$$2^7 - 1 < 2^7 - \frac{1}{8} < 2^7 \quad \text{..... ③}$$

그러므로 $l = 2^7 - 1 = 127$ 답 127

채점 기준	배점 비율
① 공비를 구한 경우	40%
② $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구한 경우	30%
③ l 의 값을 구한 경우	30%

07

$a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ 에 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} q'_2 &= a_1 + 1 \\ q'_3 &= q'_2 + 3 \\ q'_4 &= q'_3 + 5 \\ q'_5 &= q'_4 + 7 \\ +) a_6 &= q'_5 + 9 \\ \hline a_6 &= a_1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ &= 2 + \frac{5(1+9)}{2} = 27 \end{aligned}$$

답 27

단권화 노트

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 꼴은 $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ ($n \geq 2$)가 성립한다.

08

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} q'_2 &= 2a_1 \\ q'_3 &= 2^2 q'_2 \\ q'_4 &= 2^3 q'_3 \\ &\vdots \\ \times) a_{10} &= 2^9 q'_9 \\ a_{10} &= 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^9 \times a_1 \\ &= 2^{1+2+3+\dots+9} \times 1 = 2^{\frac{9 \times 10}{2}} = 2^{45} \end{aligned}$$

따라서 $k = 45$ 답 ②

09

$(n+1)a_{n+1}=na_n$ 에서

$$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에 $n=1, 2, 3, \dots, 18, 19$ 를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1$$

$$a_3=\frac{2}{3}a_2$$

$$a_4=\frac{3}{4}a_3$$

\vdots

$$a_{19}=\frac{18}{19}a_{18}$$

$$\begin{aligned} \times \Big) a_{20} &= \frac{19}{20}a_{19} \\ a_{20} &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{19}{20} \right) a_1 \\ &= \frac{1}{20} \times 2 = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

답 ②

10

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ 에서 $a_1=1$ 이므로

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+1=\frac{1}{2}+1, \quad a_3=\frac{1}{2}a_2+1=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1$$

$$a_4=\frac{1}{2}a_3+1=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1$$

\vdots

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{1}{2}a_9+1=\left(\frac{1}{2}\right)^9+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots+\frac{1}{2}+1 \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^9 \end{aligned}$$

답 ②

다른풀이

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ 을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하면

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\alpha}{2} \text{에서 } \frac{\alpha}{2}=1 \text{이므로 } \alpha=2$$

$$\text{즉 } a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

따라서 수열 $\{a_n-2\}$ 는 첫째항이 $a_1-2=-1$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비 수열이므로

$$a_n-2=(-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{에서 } a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{그러므로 } a_{10}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

답 ②

11

$$a_{n+1}=\frac{k}{a_n+3} \text{에서}$$

$$a_2=\frac{k}{a_1+3}=\frac{k}{4}$$

$$a_3=\frac{k}{a_2+3}=\frac{k}{\frac{k}{4}+3}=\frac{4k}{k+12}$$

이때 $a_3=2$ 이므로

$$\frac{4k}{k+12}=2, \quad 2k+24=4k$$

따라서 $k=12$

답 12

12

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$ 에서 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n}=b_n \text{으로 놓으면 } b_1=\frac{1}{a_1}=2, \quad b_{n+1}=b_n+2$$

즉 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n=2+(n-1) \times 2=2n$$

$$\text{따라서 } a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2n} \text{이므로 } a_{20}=\frac{1}{40}$$

답 ①

13

$P_1=x_1=0, P_2=x_2=2$ 이므로

$$P_3=x_3=\frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{3}{2}$$

$$P_4=x_4=\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9+4}{8} = \frac{13}{8}$$

$$P_5=x_5=\frac{3}{4} \times \frac{13}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{39}{32} + \frac{3}{8} = \frac{51}{32}$$

$$\text{따라서 } \overline{P_4P_5}=|x_5-x_4|=\left|\frac{51}{32}-\frac{13}{8}\right|=\left|-\frac{1}{32}\right|=\frac{1}{32} \quad \text{답 ②}$$

단권화 노트

선분의 내분점과 외분점

수직선 위의 두 점 $A(x_1), B(x_2)$ 에 대하여 선분 AB를

$m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right), Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right) \quad (\text{단, } m \neq n)$$

14

n 번째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_n 이라 하면

$$a_1=7, \quad a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-1 \text{이므로}$$

$$a_2=\frac{4}{3} \times 7 - 1, \quad a_3=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 7 - \frac{4}{3} - 1$$

$$a_4=\left(\frac{4}{3}\right)^3 \times 7 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 1$$

\vdots

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \left(\frac{4}{3}\right)^9 \times 7 - \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^8 + \left(\frac{4}{3}\right)^7 + \cdots + \frac{4}{3} + 1 \right\} \\
 &= 7 \times \left(\frac{4}{3}\right)^9 - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^9 - 1}{\frac{4}{3} - 1} \\
 &= 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^9 + 3(L)
 \end{aligned}$$

답 ②

다른풀이

n 번째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 7, a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - 1$$

이때 $a_{n+1} - a = \frac{4}{3}(a_n - a)$ 라 하면 $-\frac{1}{3}a = -1, a = 3$ 이므로

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4}{3}(a_n - 3)$$

따라서 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 7 - 3 = 4$, 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \text{에서 } a_n = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3$$

따라서 열 번째 날 물탱크에 채우는 물의 양은

$$a_{10} = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^9 + 3(L)$$

15

명제 $p(n)$ 이 참이면 $p(n+4)$ 가 참이므로 $p(3)$ 이 참이면

$p(3+4n)$ 도 모두 참이다.

$103 = 3 + 4 \times 25$ 이므로 $p(103)$ 은 참임을 알 수 있다.

답 ④

16

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$, (우변) $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 이므로

주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

이므로 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

17

(i) $n=2$ 일 때, $3^2 - 2 \times 2 - 1 = 4$ 이므로 4의 배수이다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, $3^k - 2k - 1 = 4m$ (m 은 자연수)이라 가정하면

$$3^{k+1} - 2(k+1) - 1 = 3(2k+1+4m) - 2k - 3 = 4(k+3m)$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 4의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여

$3^n - 2n - 1$ 은 4의 배수이다.

답 풀이 참조

18

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= 2$, (우변) $= 1^2 = 1$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k > k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $2(k+1)$ 을 더하면

$$\begin{aligned}
 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) &> k^2 + 2(k+1) \\
 &= (k+1)^2 + 1 \\
 &> (k+1)^2
 \end{aligned}$$

즉 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) > (k+1)^2$ 이므로

$n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조

19

(i) $n=2$ 일 때, (좌변) $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, (우변) $= \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$ 이므로

주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

이므로 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} &> \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} \\
 &= \frac{2k+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

$k \geq 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{k+2} &= \frac{(2k+1)(k+2) - 2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2} \text{이므로}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조

01 ① 02 ② 03 ② 04 ④ 05 ⑤ 06 25
07 ② 08 ① 09 32 10 8

01

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 -4 인 등차수열이므로
 $a_n = 1 + (n-1) \times (-4) = -4n + 5$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로
 $b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^8 a_k + \sum_{k=1}^8 b_k \\ &= \sum_{k=1}^8 (-4k + 5) + \sum_{k=1}^8 2^{k-1} \\ &= -4 \times \frac{8 \times 9}{2} + 5 \times 8 + \frac{2^8 - 1}{2 - 1} \\ &= -144 + 40 + 255 = 151 \end{aligned}$$

답 ①

02

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} q'_2 &= \frac{1 \times 3}{2^2} a_1 \\ q'_3 &= \frac{2 \times 4}{3^2} q'_2 \\ q'_4 &= \frac{3 \times 5}{4^2} q'_3 \\ &\vdots \\ \times \Big) a_{10} &= \frac{9 \times 11}{10^2} q'_9 \\ a_{10} &= a_1 \times \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{4^2} \times \dots \times \frac{9 \times 11}{10^2} \\ \text{따라서 } a_{10} &= 5 \times \frac{11}{2 \times 10} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

답 ②

03

$3a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면

$$3 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{1}=1$, 공차가 3인 등차수열이다.

$$\text{즉 } \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{1}{3n-2}$$

답 ②

04

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n \text{이라 하면 } 3S_n = (n+2)a_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3S_{n-1} = (n+1)a_{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$3(S_n - S_{n-1}) = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$$

$$3a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1} \text{이므로}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} a_{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③에 $n=2, 3, 4, \dots, n$ 을 대입하여 변끼리 곱하면

$$q'_2 = \frac{3}{1} a_1$$

$$q'_3 = \frac{4}{2} q'_2$$

$$q'_4 = \frac{5}{3} q'_3$$

\vdots

$$\times \Big) a_n = \frac{n+1}{n-1} q'_{n-1}$$

$$a_n = \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1} a_1$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{n(n+1)}{1 \times 2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{이때 } \frac{n(n+1)}{2} > 100 \text{에서 } \frac{13 \times 14}{2} = 91, \frac{14 \times 15}{2} = 105 \text{이므로}$$

$$n=14$$

답 ④

05

ㄱ. $p(1)$ 이 참 $\implies p(3)$ 이 참 $\implies p(5)$ 가 참 (참)

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots$ 이 참이 되므로 모든 짝수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이다.

즉 $p(2n)$ 이 참이다. (참)

ㄷ. $p(1)$ 이 참이면 모든 홀수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이다.

마찬가지로 $p(2)$ 가 참이면 모든 짝수 m 에 대하여 $p(m)$ 이 참이다.

따라서 $p(1), p(2)$ 가 참이면 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

06

$$a_1 = 8 > 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = 3 - a_1 = 3 - 8 = -5$$

$$a_2 < 0 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_2 + p = -5 + p$$

$$(i) -5 + p \geq 0, \text{ 즉 } p \geq 5 \text{일 때}$$

$$a_4 = 3 - a_3$$

$$= 3 - (-5 + p)$$

$$= 8 - p > 0$$

즉 $p < 8$ 이므로 $5 \leq p < 8$

(ii) $-5 + p < 0$, 즉 $p < 5$ 일 때

$$a_4 = a_3 + p = (-5 + p) + p = -5 + 2p > 0$$

즉 $p > \frac{5}{2}$ 이므로 $\frac{5}{2} < p < 5$

(i), (ii)에서 $\frac{5}{2} < p < 8$

따라서 자연수 p 는 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$$

답 25

07

$a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ 이므로

(i) $n=2$ 일 때,

$$a_2 = a_3 + a_1, \quad 3 = a_3 + 1 \text{에서 } a_3 = 2 \text{이므로}$$

$$a_3^2 = 2^2 = 4$$

(ii) $n=3$ 일 때,

$$a_3 = a_4 + a_2, \quad 2 = a_4 + 3 \text{에서 } a_4 = -1 \text{이므로}$$

$$a_4^2 = (-1)^2 = 1$$

(iii) $n=4$ 일 때,

$$a_4 = a_5 + a_3, \quad -1 = a_5 + 2 \text{에서 } a_5 = -3 \text{이므로}$$

$$a_5^2 = (-3)^2 = 9$$

(iv) $n=5$ 일 때,

$$a_5 = a_6 + a_4, \quad -3 = a_6 + (-1) \text{에서 } a_6 = -2 \text{이므로}$$

$$a_6^2 = (-2)^2 = 4$$

(v) $n=6$ 일 때,

$$a_6 = a_7 + a_5, \quad -2 = a_7 + (-3) \text{에서 } a_7 = 1 \text{이므로}$$

$$a_7^2 = 1^2 = 1$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 1, 9, 4가 반복되어 나오는 주기가 3인 수열이다.

$$\text{그러므로 } \sum_{n=1}^{20} a_n^2 = 6(1+9+4) + 9 = 93$$

답 ②

08

$$\begin{aligned} & 1 \times (2k+2) + 3 \times 2k + 5 \times (2k-2) + \cdots + (2k+1) \times 2 \\ &= 1 \times 2k + 3 \times (2k-2) + 5 \times (2k-4) + \cdots + (2k-1) \times 2 \\ &\quad + \boxed{2+6+10+\cdots+2(2k-1)} + (2k+1) \times 2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} + 2\{1+3+5+\cdots+(2k-1)\} + 2(2k+1) \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} + 2 \times \frac{k\{1+(2k-1)\}}{2} + 2(2k+1) \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} + 2k^2 + 2(2k+1) \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} + \boxed{2(k+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}} \end{aligned}$$

따라서 $f(k) = 2+6+10+\cdots+2(2k-1) = 2k^2$,

$g(k) = 2(k+1)^2$, $h(k) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$ 이므로

$$\frac{f(5) \times h(3)}{g(4)} = \frac{50 \times 60}{50} = 60$$

답 ①

09

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + (-1) \times 2 = a - 2$$

$$a_3 = a_2 + (-1)^2 \times 2 = (a-2) + 2 = a$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^3 \times 2 = a - 2$$

$$a_5 = a_4 + 3 = (a-2) + 3 = a+1$$

$$a_6 = a_5 + (-1)^5 \times 2 = (a+1) - 2 = a-1$$

$$a_7 = a_6 + (-1)^6 \times 2 = (a-1) + 2 = a+1$$

$$a_8 = a_7 + (-1)^7 \times 2 = (a+1) - 2 = a-1$$

$$a_9 = a_8 + 3 = (a-1) + 3 = a+2$$

⋮

즉 $a_{4n+1} = a + n$ ($n \geq 1$)이므로

..... ①

$$a_{33} = a + 8 = 40$$

..... ②

따라서 $a = 32$

답 32

채점 기준	배점 비율
① a_{4n+1} 을 구한 경우	70%
② a 의 값을 구한 경우	30%

10

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{이므로}$$

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2' = a_1 + 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_3' = a_2' + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_4' = a_3' + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

⋮

$$+) a_n = a_{n-1}' + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$a_n = a + 1 - \frac{1}{n} = \frac{(a+1)n-1}{n}$$

..... ①

따라서 $a_9 = \frac{9(a+1)-1}{9} = \frac{80}{9}$ 에서 $9(a+1)-1=80$

이므로 $a=8$

..... ②

답 8

채점 기준	배점 비율
① a_n 을 구한 경우	60%
② a 의 값을 구한 경우	40%

학교 시험 대비 | 1 | 지수

pp.2~3

01 ⑤ 02 ③ 03 ⑤ 04 ② 05 ④ 06 ⑤
 07 ② 08 35 09 ③ 10 27 11 126

01

$$\begin{aligned}
 (2^{15}+4^8)(8^4+2^{17}) &= \{2^{15}+(2^2)^8\} \{(2^3)^4+2^{17}\} \\
 &= (2^{15}+2^{16})(2^{12}+2^{17}) \\
 &= 2^{27}+2^{32}+2^{28}+2^{33} \\
 &= 2^{27}(1+2^5+2+2^6) \\
 &= 99 \times 2^{27}
 \end{aligned}$$

따라서 $n=99$

답 ⑤

02

$-\sqrt[4]{3}$ 이 음의 실수이고 11이 홀수이므로 $-\sqrt[4]{3}$ 의 11제곱근 중 실수인 것은 한 개이다.

즉 $a=1$

$\sqrt[4]{2}$ 가 양의 실수이고 12가 짝수이므로 $\sqrt[4]{2}$ 의 12제곱근 중 실수인 것은 두 개이다.

즉 $b=2$

$\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{5}$ 는 양의 실수이고 15는 홀수이므로 $\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{5}$ 의 15제곱근 중 실수인 것은 한 개이다.

즉 $c=1$ 따라서 $a+b+c=1+2+1=4$

답 ③

03

$$\begin{aligned}
 &\sqrt[3]{128}+5\sqrt[6]{4}-\sqrt[9]{8} \\
 &= \sqrt[3]{2^6 \times 2}+5\sqrt[6]{2^2}-\sqrt[9]{2^3} \\
 &= \sqrt[3]{4^3 \times 2}+5\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^2}}-\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3}} \\
 &= 4\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2} \\
 &= (4+5-1)\sqrt[3]{2} \\
 &= 8\sqrt[3]{2} \\
 &= 2^3 \times 2^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{\frac{10}{3}}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=10$

답 ⑤

04

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}} &= \sqrt[16]{4}, \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} = \sqrt[24]{4} \text{이므로} \\
 \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} &= \sqrt[16]{4} \times \sqrt[24]{4} \\
 &= 4^{\frac{1}{16} + \frac{1}{24}} \\
 &= 4^{\frac{5}{48}} \\
 &= 2^{\frac{5}{24}}
 \end{aligned}$$

따라서 $k=24$

답 ②

05

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

한편, $a>0$ 이므로 $\sqrt[n]{a}>0$ 이다.

$$\text{즉 } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} > 0$$

따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ 는 양수 a 의 양의 $[mn]$ 제곱근이다.

$$\text{그러므로 } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{즉 (가) : } a, \text{ (나) : } mn$$

답 ④

06

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{28}} = \sqrt[6]{28}$$

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{36}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{27}$$

$$(\sqrt[3]{31})^{\frac{1}{3}} = 31^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{31}$$

$$\text{즉 } \sqrt[6]{27} < \sqrt[6]{28} < \sqrt[6]{31} < \sqrt[6]{36} \text{이므로}$$

$$\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\sqrt[3]{28}} < (\sqrt[3]{31})^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{6}$$

따라서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱은

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{6} &= \sqrt[6]{27 \times 36} \\
 &= \sqrt[6]{3^3 \times 2^2 \times 3^2} \\
 &= \sqrt[6]{2^2 \times 3^5}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

07

$$5^{x+1}-5^x = (5-1)5^x = 4 \times 5^x \text{이므로}$$

$$4 \times 5^x = 12 \text{에서 } 5^x = 3$$

$$2^{x+1}+2^x = (2+1)2^x = 3 \times 2^x \text{이므로}$$

$$3 \times 2^x = 15 \text{에서 } 2^x = 5$$

따라서

$$\begin{aligned}
 20^x &= (2^2 \times 5)^x \\
 &= 2^{2x} \times 5^x \\
 &= (2^x)^2 \times 5^x \\
 &= 5^2 \times 3 = 75
 \end{aligned}$$

답 ②

08

$$(\sqrt[3]{2})^{m-1} \times (\sqrt[5]{3})^{2m} = 2^{\frac{m-1}{3}} \times 3^{\frac{2m}{5}} \text{에서}$$

2와 3은 서로소이므로 $\frac{m-1}{3}$ 과 $\frac{2m}{5}$ 은 0 또는 자연수이어야 한다.

즉 m 의 값은 30 이하의 자연수 중에 3으로 나눌 때의 나머지가 1 이면서 동시에 5의 배수이어야 한다.

따라서 $m=10$ 또는 $m=25$ 이므로 그 합은

$$10+25=35$$

답 35

09

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{z} \text{에서 } \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{z} \text{이므로}$$

$$\frac{z(x+y)}{xy} = 3$$

한편, $a^x = b^y = 2^z$ 에서

$$a^x = 2^z, b^y = 2^z \text{이므로}$$

$$a = 2^{\frac{z}{x}}, b = 2^{\frac{z}{y}}$$

$$\text{따라서 } ab = 2^{\frac{z}{x}} \times 2^{\frac{z}{y}} = 2^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = 2^{\frac{z(x+y)}{xy}} = 2^3 = 8$$

답 ③

10

$$x = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{6}} - a^{-\frac{1}{6}}) \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} - 2 + a^{-\frac{1}{3}}) \text{이므로}$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} - 2 + a^{-\frac{1}{3}}) + 1$$

$$= \frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + 2 + a^{-\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{4}(a^{\frac{1}{6}} + a^{-\frac{1}{6}})^2$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{6}} + a^{-\frac{1}{6}})$$

$$\text{따라서 } x + \sqrt{x^2 + 1} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{즉 } a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{3} \text{에서 } a = 3^3 = 27$$

답 27

11

$$\sqrt{ab}\sqrt{ab}\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = (ab)^{\frac{7}{8}}$$

$(ab)^{\frac{7}{8}}$ 의 값이 1보다 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 ab 는

k^8 (k 는 1보다 큰 자연수) 꼴이어야 한다.

그러므로 최소의 자연수 ab 는

$$ab = 2^8 = 256$$

이때 두 수가 2, 2^7 일 때 두 수의 차가 최대이므로 최댓값은

$$2^7 - 2 = 128 - 2 = 126$$

답 126

학교 시험 대비 | 2 | 로그

pp.4~5

01 ③

02 ②

03 5

04 9

05 ⑤

06 6646

07 ②

08 4

09 ①

10 1

11 ⑤

01

$$4^a \times 8^b = 10 \text{에서 } 2^{2a} \times 2^{3b} = 10$$

$$2^{2a+3b} = 10$$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } 2a + 3b = \log_2 10$$

답 ③

02

$$\log_3 2 + \log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2} \log_3 8$$

$$= \log_3 2 + \log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{8}$$

$$= \log_3 \left(\frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{8}} \right)$$

$$= \log_3 \sqrt{3}$$

$$= \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

답 ②

03

밑의 조건에 의하여

$$n > 0, n \neq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

진수 조건에 의하여

$$x^2 + 2nx + 4n > 0$$

이차방정식 $x^2 + 2nx + 4n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = n^2 - 4n < 0$$

$$\text{즉 } 0 < n < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$0 < n < 1 \text{ 또는 } 1 < n < 4$$

따라서 자연수 n 은 2, 3이므로 그 합은

$$2 + 3 = 5$$

답 5

04

$x = 10^{a-\sqrt{2}}$ 에서 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x = a - \sqrt{2}$$

$$= (a-2) + 2 - \sqrt{2}$$

이때 x 의 상용로그의 정수 부분이 7이므로

$$a - 2 = 7$$

$$\text{따라서 } a = 9$$

답 9

05

$\log_a c + \log_b c = 0$ 에서

$$\frac{\log c}{\log a} + \frac{\log c}{\log b} = 0 \text{이므로}$$

$$\log c \left(\frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} \right) = 0$$

$$\log c \left(\frac{\log a + \log b}{\log a \times \log b} \right) = 0$$

$$\text{그러므로 } \log c = 0 \text{ 또는 } \log a + \log b = 0$$

$$\text{따라서 } c=1 \text{ 또는 } \boxed{ab=1}$$

$$\text{즉 } (가) : \log c, (나) : \log a \times \log b, (다) : ab=1$$

답 ⑤

06

$$10^{25.58} = A \text{에서}$$

$$25.58 = \log_{10} A = \log A$$

$$100^{2.62} = (10^2)^{2.62} = 10^{5.24} = B \text{에서}$$

$$5.24 = \log_{10} B = \log B$$

$$\log \frac{A}{B^4} = \log A - \log B^4$$

$$= \log A - 4 \log B$$

$$= 25.58 - 4 \times 5.24$$

$$= 4.62$$

따라서

$$\log \left(\log \frac{A}{B^4} \right)^{10000} = 10000 \log 4.62$$

$$= 10000 \times 0.6646$$

$$= 6646$$

답 6646

07

A^{40} 이 81자리의 수이므로 $\log A^{40}$ 의 정수 부분은 80이다.

$$80 \leq \log A^{40} < 81 \text{이므로}$$

$$80 \leq 40 \log A < 81$$

$$20 \leq 10 \log A < 20.25$$

$$60 \leq 30 \log A < 60.75$$

$$60 \leq \log A^{30} < 60.75$$

$$30 \leq \frac{1}{2} \log A^{30} < 30.375$$

$$30 \leq \log \sqrt{A^{30}} < 30.375$$

따라서 $\log \sqrt{A^{30}}$ 의 정수 부분이 30이므로

$\sqrt{A^{30}}$ 은 31자리의 수이다.

답 ②

08

$$\log_6 3 = x, \log_6 12 = y \text{라 하면}$$

$$x + y = \log_6 3 + \log_6 12$$

$$= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

$$xy = (\log_6 3)(\log_6 12) = a$$

$$(\log_6 3)^2 + (\log_6 12)^2 = x^2 + y^2$$

$$= (x+y)^2 - 2xy$$

$$= 4 - 2a$$

따라서 $k=4$

답 4

09

$L : M : N = 2 : 3 : 4$ 에서

$$\frac{L}{2} : \frac{M}{3} : \frac{N}{4} = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면}$$

$$L=2k, M=3k, N=4k$$

$$2 \log L - \log M - \log N = \log \frac{L^2}{M} - \log N$$

$$= \log \frac{L^2}{MN}$$

$$= \log \frac{(2k)^2}{3k \times 4k}$$

$$= \log \frac{1}{3}$$

$$10^{2 \log L - \log M - \log N} = 10^{\log \frac{1}{3}} = x \text{라 하면}$$

$$\log \frac{1}{3} = \log x \text{이므로 } x = \frac{1}{3}$$

답 ①

10

$$\log_5 2 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 양변에 3을 곱하면

$$3 \log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8 = a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3^2} + \dots$$

이때 $5^1 < 8 < 5^2$ 이므로

$$1 < \log_5 8 < 2 \text{에서 } a_1 = 1$$

$$\text{따라서 } \log_5 8 = 1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3^2} + \dots \text{이므로}$$

$$\log_5 8 - 1 = \log_5 \frac{8}{5} = \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3^2} + \dots \quad \text{..... ㉡}$$

㉡의 양변에 3을 곱하면

$$3 \log_5 \frac{8}{5} = \log_5 \left(\frac{8}{5} \right)^3 = a_2 + \frac{a_3}{3} + \dots$$

$$\text{그런데 } \left(\frac{8}{5} \right)^3 = \left(\frac{2^3}{5} \right)^3 = \frac{2^9}{5^3} = \frac{512}{125} \text{이고}$$

$$\text{이때 } 4 < \left(\frac{8}{5} \right)^3 < 5 \text{이므로}$$

$$0 < \log_5 \left(\frac{8}{5} \right)^3 < 1 \text{에서 } a_2 = 0$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 = 1 + 0 = 1$$

답 1

11

$$\neg. 10^3 < 2018 < 10^4 \text{이므로}$$

$$\log 2018 = 3 + \alpha \text{ (} 0 < \alpha < 1 \text{)에서}$$

$$f(2018) = 3 \text{ (참)}$$

$$\neg. f(n) = m \text{에서 } 10^m \leq n < 10^{m+1} \text{이므로}$$

n 의 개수는

$$10^{m+1} - 10^m = 10^m(10 - 1) = 9 \times 10^m \text{ (참)}$$

$$\neg. f(10^m) = m \text{이고, } 2^m, 5^m \text{은 } 10 \text{의 배수가 될 수 없으므로}$$

$$\log 2^m = l + \alpha \text{ (} l \text{은 자연수, } 0 < \alpha < 1 \text{)}$$

$$\log 5^m = k + \beta \text{ (} k \text{는 자연수, } 0 < \beta < 1 \text{)라 하면}$$

$$f(2^m) = l, f(5^m) = k$$

$$\log 2^m + \log 5^m = \log 10^m \text{이므로}$$

$$l + k + \alpha + \beta = m$$

이때 $0 < \alpha + \beta < 2$ 이고, l, k, m 은 자연수이므로

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\text{그러므로 } m = l + k + 1$$

$$f(10^m) = f(2^m) + f(5^m) + 1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

학교 시험 대비 | 3 | 지수함수

pp. 6~7

01 ⑤	02 ④	03 ⑤	04 ①	05 ②	06 ③
07 ①	08 ①	09 2	10 ①		

01

$y = 2^x, y = 3^x$ 의 밑이 모두 1보다 크므로

$y = 2^x, y = 3^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $1 < 2 < 3$ 이므로 $y = 2^x$ 의 그래프는 ㉠이고, $y = 3^x$ 의 그래프는 ㉡이다.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 밑이 모두 1보다 작으므로

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 ㉢이고,

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 ㉣이다.

따라서 옳게 연결된 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02

$$f(x) = 4 \times 2^{2x} = 2^2 \times 2^{2x} = 2^{2(x+1)} = 4^{x+1}$$

이므로 지수함수 $f(x) = 4^{x+1}$ 은 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.

즉 $x = 2$ 일 때, 최댓값 $M = f(2) = 4^{2+1} = 64$ 를 가진다.

$$g(x) = 4 \times 2^{-x-2} = 2^2 \times 2^{-x-2} = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

이므로 지수함수 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값은 감소한다.

즉 $x = 2$ 일 때, 최솟값 $m = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 을 가진다.

$$\text{따라서 } Mm = 64 \times \frac{1}{4} = 16$$

답 ④

03

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+1}$ 에서 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작으므로

$x^2 - 4x + 1$ 이 최소일 때, y 는 최댓값을 갖고

$x^2 - 4x + 1$ 이 최대일 때, y 는 최솟값을 가진다.

그런데 $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ 에서

$1 \leq x \leq 4$ 이므로

$x = 2$ 일 때, $x^2 - 4x + 1$ 은 최솟값 -3 을 가지므로

y 의 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

$x = 4$ 일 때, $x^2 - 4x + 1$ 은 최댓값 1 을 가지므로

$$y \text{의 최솟값은 } \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

따라서 y 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$27 + \frac{1}{3} = \frac{82}{3}$$

답 ⑤

04

$$(\sqrt{2})^{x^2} = (2^{\frac{1}{2}})^{x^2} = 2^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} = (2^{-2})^{1-x} = 2^{2x-2} \text{이므로}$$

$$(\sqrt{2})^{x^2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} = 0 \text{에서}$$

$$2^{\frac{1}{2}x^2} - 2^{2x-2} = 0$$

$$2^{\frac{1}{2}x^2} = 2^{2x-2}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x - 2$$

$$x^2 = 4x - 4, x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0, x = 2$$

따라서 $a = 2$ 이므로

$$a^3 - 2a = 2^3 - 2 \times 2 = 4$$

답 ①

05

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -2^{x-c}$$

이 식이 $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{ax+b} = -2^{-ax-b}$ 와 같으므로

$$a = -1, b = c$$

한편 $y = -2^{x-c}$ 의 그래프가 점 $(5, -1)$ 을 지나므로
 $-1 = -2^{5-c}$ 에서 $c = 5$

$$\text{따라서 } a + b + c = -1 + 5 + 5 = 9$$

답 ②

06

$$x(0) = k \times a^0 = k = 3 \times 10^5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x(5) = k \times a^5 = 1.2 \times 10^6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$3 \times 10^5 \times a^5 = 1.2 \times 10^6$$

$$a^5 = 4 \text{이므로 } a = \sqrt[5]{4}$$

답 ③

07

점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$$k \times 3^a = 3^{-a}, k \times 3^{2a} = 1 \text{에서}$$

$$3^{2a} = \frac{1}{k} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 Q의 x 좌표는 $4a$ 이므로

$$k \times 3^{4a} = -4 \times 3^{4a} + 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$k \times \frac{1}{k^2} = -4 \times \frac{1}{k^2} + 8$$

$$\frac{1}{k} = -\frac{4}{k^2} + 8$$

$$k = -4 + 8k^2, 8k^2 - k - 4 = 0$$

따라서 모든 k 의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{1}{8}$ 이다.

답 ①

08

$$4^x - 2^{x+k} + 33 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 2^k \times 2^x + 33 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{라 하면}$$

$$t^2 - 2^k \times t + 33 = 0$$

$$t^2 - 2 \times 2^{k-1} \times t + 33 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) ①의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (2^{k-1})^2 - 33 > 0, 2^{2k-2} > 33$$

$$2^{2k} > 132 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

k 는 정수이고 $2^7 = 128, 2^8 = 256$ 이므로 부등식 ②을 만족하는 k 의 값의 범위는

$$k \geq 4$$

(ii) (두 근의 합) $= 2^k > 0$

즉 k 는 모든 정수이다.

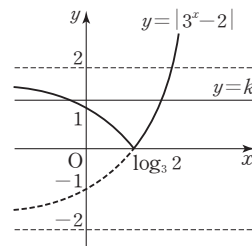
(iii) (두 근의 곱) $= 33 > 0$

(i), (ii), (iii)을 만족하는 정수 k 는 4 이상이므로 최솟값은 4이다.

답 ①

09

방정식 $|3^x - 2| = k$ 의 실근은 함수 $y = |3^x - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.



그림에서 두 함수 $y = |3^x - 2|$, $y = k$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 음수 하나와 양수 하나가 될 때는 $1 < k < 2$ 일 때이다.

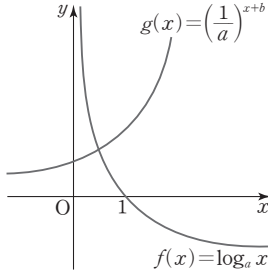
따라서 $\alpha = 1, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha\beta = 2$$

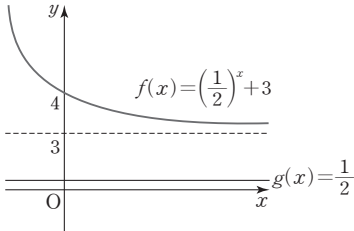
답 2

10

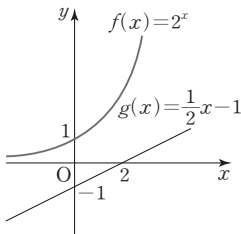
ㄱ. $\frac{1}{a} > 1$ 이므로 두 함수 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{x+b}$ 의 그래프는 다음 그림과 같고 항상 만난다.



ㄴ. (반례) $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ 일 때, 두 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$, $g(x) = \frac{1}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 만나지 않는다.



ㄷ. (반례) $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ 일 때, 두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 만나지 않는다.



따라서 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프가 항상 만나는 것은 ㄱ이다.

답 ①

학교 시험 대비 | 4 | 로그함수

pp.8~9

01 ②	02 ③	03 ④	04 8	05 ③	06 ⑤
07 ②	08 16	09 ⑤	10 ⑤	11 117	

01

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

$$x=1\text{일 때, } y = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

$$x=81\text{일 때, } y = \log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4$$

이므로 치역은 $\{y \mid -4 \leq y \leq 0\}$ 이다.

따라서 $a = -4$, $b = 0$ 이므로

$$a+b = -4$$

답 ②

02

진수 조건에서

$$x-1 > 0, 5-x > 0$$

$$1 < x < 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-\log_3(5-x) = \log_{\frac{1}{3}}(5-x) = \log_{\frac{1}{3}}(5-x) \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) < \log_{\frac{1}{3}}(5-x) \text{에서}$$

밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작으므로

$$x-1 > 5-x, 2x > 6$$

$$x > 3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } 3 < x < 5$$

답 ③

03

지수함수 $y = 3^{x-1}$ 의 역함수는 로그의 정의에 의하여

$$x-1 = \log_3 y \text{에서 } x = \log_3 y + 1$$

$$\text{즉 } y = \log_3 x + 1$$

$y = \log_3 x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$$y-4 = \log_3(x-1) + 1$$

$$y-5 = \log_3(x-1)$$

이 그래프가 점 $(k, 8)$ 을 지나므로

$$8-5 = \log_3(k-1) \text{에서 } k-1 = 3^3$$

$$\text{따라서 } k = 3^3 + 1 = 28$$

답 ④

04

진수 조건에서

$$\log_2 x > 0, x > 0, x-4 > 0$$

$$x > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) \geq -2 \text{에서}$$

밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$$\log_2 x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

밑 2가 1보다 크므로

$$x \leq 2^4 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x(x-4) < -5 \text{에서}$$

밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$$x(x-4) > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}, x(x-4) > 32$$

$$x^2 - 4x - 32 > 0, (x+4)(x-8) > 0$$

$$x < -4 \text{ 또는 } x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$\textcircled{L}, \textcircled{L}, \textcircled{E}$ 에서 $8 < x \leq 16$

따라서 정수 x 의 개수는 $16 - 8 = 8$

답 8

05

진수 조건에서

$$x^2 - 4x + 12 = (x-2)^2 + 8 > 0 \text{이므로}$$

x 는 모든 실수이다.

함수 $f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 진수가 최소일 때, $f(x)$ 는 최대가 된다.

$$x^2 - 4x + 12 = (x-2)^2 + 8 \text{에서 } x=2 \text{일 때 최솟값 } 8 \text{을 가지므로}$$

$f(x)$ 의 최댓값은

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -\log_2 2^3 = -3$$

따라서 $a=2, b=-3$ 이므로 $ab=-6$

답 ③

06

$2^x > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$2^x + 2 > 0$$

$$\log_3(2^x + 2) = \log_3 9(2^x + 2) \text{에서}$$

$$\log_3(2^x + 2) = \log_3(2^x + 2) + 1$$

$$\log_3(2^x + 2) = \frac{1}{2} \log_3(2^x + 2) + 1$$

$$\log_3(2^x + 2) - \frac{1}{2} \log_3(2^x + 2) = 1$$

$$\frac{1}{2} \log_3(2^x + 2) = 1$$

$$\log_3(2^x + 2) = 2$$

$$2^x + 2 = 3^2 = 9, 2^x = 7$$

따라서 $x = \log_2 7$

답 ⑤

07

세 점 A_x, B_x, C_x 의 x 좌표를 각각 a, b, c 라 하면

세 점 A_y, B_y, C_y 의 y 좌표는 $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c$

$\overline{A_y B_y} = \overline{B_y C_y} = 1$ 에서

$$\log_2 b - \log_2 a = \log_2 c - \log_2 b = 1 \text{이므로}$$

$$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{c}{b} = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = 2$$

$$\text{즉 } c=2b, a=\frac{1}{2}b \text{이므로}$$

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{2b-b}{b-\frac{1}{2}b} = 2$$

따라서 $\overline{A_x B_x} : \overline{B_x C_x} = 1 : 2$ 이므로

$$\overline{A_x C_x} : \overline{B_x C_x} = 3 : 2$$

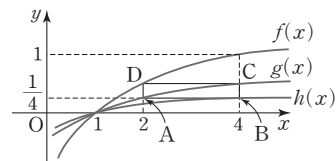
그러므로 $m=3, n=2$ 이므로

$$2m^2 + n = 18 + 2 = 20$$

답 ②

08

$4 < a < b$ 일 때, 세 함수 $f(x) = \log_4 x, g(x) = \log_a x, h(x) = \log_b x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



점 A의 y 좌표는 $\log_a 2$ 이므로 $A(2, \log_a 2)$

점 D의 y 좌표는 $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ 이므로 $D(2, \frac{1}{2})$

그런데 점 D의 y 좌표와 점 C의 y 좌표가 같으므로

$$\frac{1}{2} = \log_a 4 \text{에서 } a=16$$

$$\text{즉 } A(2, \log_{16} 2) \text{에서 } A(2, \frac{1}{4})$$

또한, 점 A와 점 B의 y 의 좌표가 같으므로

$$\frac{1}{4} = \log_b 4 \text{에서 } b=256$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} = \frac{256}{16} = 16$$

답 16

09

밑과 진수 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$$\log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

$$\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x} \text{이므로}$$

$$(\log_2 2x)^2 - 5 \log_2 x + 3 \log_x 2 = 2 \text{에서}$$

$$(1 + \log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} = 2$$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$$(1+t)^2 - 5t + \frac{3}{t} = 2$$

$$t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$$

$$(t+1)(t-1)(t-3)=0$$

$$t=-1 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = 1 \text{ 또는 } \log_2 x = 3$$

$$\text{따라서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=8$$

이므로 구하는 모든 해의 곱은

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

답 ⑤

10

$$\neg. 2^a = b \text{에서 } a = \log_2 b$$

$$2^b = c \text{에서 } b = \log_2 c$$

$$\text{따라서 } a+b = \log_2 b + \log_2 c = \log_2 bc \text{ (참)}$$

$$\neg. a = \log_2 b \text{이므로 } \log_3 b < \log_2 b = a \text{ ㉠}$$

$$a < b \text{이고 } b = \log_2 c \text{이므로 } a < b = \log_2 c \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \log_3 b < a < \log_2 c \text{ (참)}$$

$$\neg. a = \log_2 b, b = \log_2 c \text{이므로}$$

$$\log_3 c < \log_2 c = b$$

$$\frac{1}{\log_b 2} + \frac{1}{\log_c 3} = \log_2 b + \log_3 c$$

$$< a+b$$

$$\text{그런데 } \neg \text{에서 } a+b = \log_2 bc \text{이므로}$$

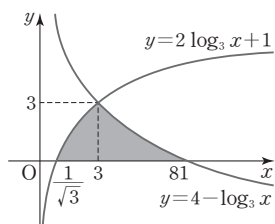
$$\frac{1}{\log_b 2} + \frac{1}{\log_c 3} = \log_2 b + \log_3 c$$

$$< a+b = \log_2 bc \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 \neg , \neg , \neg 이다.

답 ⑤

11



두 함수 $y = 2 \log_3 x + 1$ 과 $y = 4 - \log_3 x$ 의 그래프의 교점의 좌표는

$$2 \log_3 x + 1 = 4 - \log_3 x \text{에서 } \log_3 x = 1 \text{이므로}$$

$$x=3, y=3$$

$$y = 2 \log_3 x + 1 \text{ ㉠}$$

$$y = 4 - \log_3 x \text{ ㉡}$$

(i) $y=0$ 일 때

$$\text{㉠에서 } x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

$$\text{㉡에서 } x=81$$

즉 $x=1, 2, 3, \dots, 81$ 의 81개이다.

(ii) $y=1$ 일 때

$$\text{㉠에서 } \log_3 x = 0, x=1$$

$$\text{㉡에서 } \log_3 x = 3, x=27$$

즉 $x=1, 2, 3, \dots, 27$ 의 27개이다.

(iii) $y=2$ 일 때

$$\text{㉠에서 } \log_3 x = \frac{1}{2}, x=\sqrt{3}$$

$$\text{㉡에서 } \log_3 x = 2, x=9$$

즉 $x=2, 3, 4, \dots, 9$ 의 8개이다.

(iv) $y=3$ 일 때

$x=3$ 의 1개이다.

(i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$81 + 27 + 8 + 1 = 117$$

답 117

01 ② 02 ④ 03 ② 04 ③ 05 ⑤ 06 ③
 07 ④ 08 ⑤ 09 ③ 10 ④

01

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{답 ②}$$

02

$$y = x^2 - 2x \cos \theta - \sin^2 \theta$$

$$= (x - \cos \theta)^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= (x - \cos \theta)^2 - 1$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\cos \theta, -1)$

이 점이 직선 $y = 3x + 1$ 위에 있으므로

$$3 \cos \theta + 1 = -1, \cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \text{답 ④}$$

03

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2 \times \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

04

$$\overline{OP} = \sqrt{4 + k^2} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{4 + k^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \sqrt{4 + k^2} = 6 \text{에서}$$

$$4 + k^2 = 36$$

$$k^2 = 32$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } k = 4\sqrt{2}$$

답 ③

05

중심각의 크기가 120° 이고 호의 길이가 4π 인 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\text{중심각의 크기가 } 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$r \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi \text{에서 } r = 6$$

즉 중심각의 크기가 120° 이고 호의 길이가 4π 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$$

한편, 넓이가 12π 이고 호의 길이가 6π 인 부채꼴의 반지름의 길이를 r' 이라 하면

$$12\pi = \frac{1}{2} \times r' \times 6\pi \text{에서 } r' = 4$$

넓이가 12π 이고 호의 길이가 6π 인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$12\pi = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \theta \text{에서 } \theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{답 ⑤}$$

06

$$y = -3x \text{를 } x^2 + y^2 = 10 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (-3x)^2 = 10 \text{에서 } x^2 = 1$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 1$$

$$x = 1 \text{을 } y = -3x \text{에 대입하면 } y = -3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, -3)$ 이다.

$$\overline{OP} = \sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{그러므로 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{10} \quad \text{답 ③}$$

07

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\sin \theta + \cos \theta = 1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = k - 2 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠에서 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$\sin \theta \cos \theta = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉢을 ㉡에 대입하면 } 0 = k - 2$$

$$\text{따라서 } k = 2 \quad \text{답 ④}$$

08

원점 $(0, 0)$ 에서 직선 $x \cos a + y \sin a - 4 = 0$ 에 이르는 거리 d 는

$$d = \frac{|0+0-4|}{\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a}} = \frac{4}{1} = 4$$

직선 l 의 기울기는 $-\frac{\cos a}{\sin a}$ 이므로

$$-\frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\frac{\sin a}{\cos a} = 3, \tan a = 3$$

따라서 $d + \tan a = 7$

답 ⑤

09

$\angle AOC$ 는 호 AC 에 대한 중심각이고

$\angle ABC$ 는 원주각이므로

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

삼각형 ABO 에서 $\overline{OB} = \overline{OA}$ 이므로

$$\angle BAO = \angle ABC = \frac{\pi}{8}$$

$$\angle BOA = \pi - 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}\pi$$

따라서 부채꼴 AOB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$$

답 ③

10

집합 A 의 원소 (x, y) 에 대하여

$$x = a + \cos \theta, y = b + \sin \theta \text{이므로}$$

$$x - a = \cos \theta, y - b = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$$

즉 집합 A 가 나타내는 영역은 점 (a, b) 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다.

한편, 집합 B 가 나타내는 영역은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 경계선 및 내부이므로

$A \subset B$ 이라면 원 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 내접하거나 내부에 있어야 한다.

두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{a^2 + b^2}$,

반지름의 길이의 차는 $4 - 1 = 3$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq 3, \text{ 즉 } a^2 + b^2 \leq 9$$

따라서 점 (a, b) 가 나타내는 영역의 넓이는 9π 이다.

답 ④

학교 시험 대비 | 6 | 삼각함수의 그래프 pp.12~13

01 ⑤	02 ④	03 4	04 ⑤	05 ②	06 ④
07 ③	08 15	09 ②	10 5π		

01

$y = \sin(4x + 1)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $a = \frac{\pi}{2}$

$y = 2 \tan \frac{x}{2} - 1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ 이므로 $b = 2\pi$

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

답 ⑤

02

$$\sin \frac{2}{3}\pi = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left(-\frac{4}{3}\pi \right) = \cos \frac{4}{3}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5}{6}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서

$$\sin \frac{2}{3}\pi \cos \left(-\frac{4}{3}\pi \right) \tan \frac{5}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{4}$$

답 ④

03

$y = \sin ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이므로

$$\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{20} = \frac{\pi}{|a|} \text{에서}$$

$$|a| = 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 4$

답 4

04

주어진 그래프의 주기는 $\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x) = \tan a(x - b)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2}$ 에서

$$a = 2$$

$$\text{또한 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \tan(\pi - 2b) = 0$$

$$0 < b < \pi \text{이므로 } -2\pi < -2b < 0, -\pi < \pi - 2b < \pi$$

$$\text{즉 } \pi - 2b = 0 \text{이므로}$$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $ab = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

답 ⑤

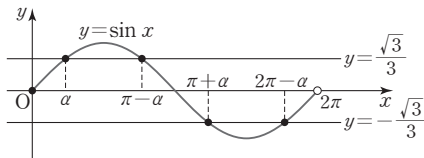
05

$$\begin{aligned}
 y &= \cos^2\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right) - 3\cos^2\theta + 4\sin(\theta + \pi) \\
 &= \sin^2\theta - 3\cos^2\theta - 4\sin\theta \\
 &= \sin^2\theta - 3(1 - \sin^2\theta) - 4\sin\theta \\
 &= 4\sin^2\theta - 4\sin\theta - 3 \\
 \sin\theta &= t \text{라 하면} \\
 0 \leq \theta < 2\pi \text{이므로 } -1 \leq t \leq 1 \\
 y &= 4t^2 - 4t - 3 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \\
 t &= -1 \text{일 때 최댓값 } M = 5, \\
 t &= \frac{1}{2} \text{일 때 최솟값 } m = -4 \text{이므로} \\
 M + m &= 5 - 4 = 1
 \end{aligned}$$

답 ②

06

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\
 \cos\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{이므로} \\
 -\sin^2 x &= -\frac{1}{3}, \sin^2 x = \frac{1}{3} \\
 \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\
 \text{구하는 해는 } x &= \alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, 2\pi - \alpha
 \end{aligned}$$



따라서 모든 해의 합은

$$\alpha + (\pi - \alpha) + (\pi + \alpha) + (2\pi - \alpha) = 4\pi$$

답 ④

07

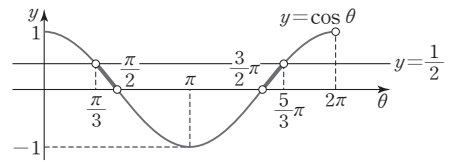
$$\begin{aligned}
 0 \leq x < \pi \text{이므로 } 0 \leq 3x < 3\pi \\
 2\sin 3x &= 1 \text{에서 } \sin 3x = \frac{1}{2} \text{이므로} \\
 3x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi \\
 x &= \frac{\pi}{18}, \frac{5}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi, \frac{17}{18}\pi \\
 \text{따라서 구하는 모든 해의 합은} \\
 \frac{\pi}{18} + \frac{5}{18}\pi + \frac{13}{18}\pi + \frac{17}{18}\pi &= 2\pi
 \end{aligned}$$

답 ③

08

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 4x\cos\theta + 2\cos\theta > 0$ 이 항상 성립하므로
 이차방정식 $x^2 - 4x\cos\theta + 2\cos\theta = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= 4\cos^2\theta - 2\cos\theta < 0 \\
 2\cos\theta(2\cos\theta - 1) &< 0 \\
 0 < \cos\theta &< \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{3}{2}\pi, \delta = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{3}{2}\pi \times \frac{5}{3}\pi}{\frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{2}} = 15$$

답 15

09

$2\cos^2 x - \sin x = k$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x = k$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 2 = k$$

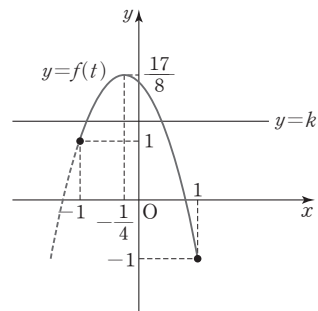
이때 $\sin x = t$ 라 하면

$$-2t^2 - t + 2 = k \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$f(t) = -2t^2 - t + 2 = -2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} \quad (-1 \leq t \leq 1)$ 이라 하면

$y = f(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-1 \leq k \leq \frac{17}{8}$$



따라서 k 의 최댓값은 $\frac{17}{8}$, 최솟값은 -1 이므로 그 합은

$$\frac{17}{8} + (-1) = \frac{9}{8}$$

답 ②

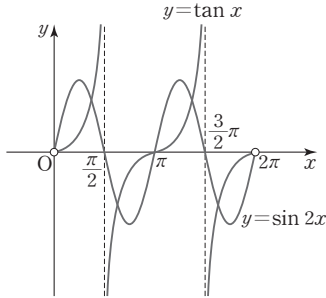
10

방정식 $\tan x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ 의 실근은 두 함수 $y = \tan x$,

$y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

$$y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$$

두 함수 $y = \tan x$, $y = \sin 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 $0 < x < 2\pi$ 에서 5개의 점에서 만난다.



만나는 5개의 점의 x 좌표를 작은 값부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 라 하자.

두 함수 $y = \tan x$, $y = \sin 2x$ 의 그래프는 모두 원점에 대하여 대칭이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ 에 대하여도 대칭이다.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{에서 } x_1 + x_2 = \pi$$

$$x_3 = \pi$$

$$\frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{에서 } x_4 + x_5 = 3\pi$$

따라서 모든 근의 합은

$$\pi + \pi + 3\pi = 5\pi$$

답 5π

01 ③	02 16	03 ④	04 ④	05 5	06 40
07 ⑤	08 3	09 127	10 ①		

01

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = 10 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 4 \times \sin \frac{5}{6}\pi = 10$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 4 \times \frac{1}{2} = 10$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 10$$

답 ③

02

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하고, 삼각형의 각 변의 길이를 각각 a, b, c 라 하면 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{(a+b+c)r}{2}$$

$$\text{이때 } S = 8(a+b+c) \text{이므로}$$

$$8(a+b+c) = \frac{(a+b+c)r}{2} \text{에서 } 8 = \frac{r}{2}$$

$$\text{따라서 } r = 16$$

답 16

03

$$C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$$

따라서

$$\overline{BC} = \frac{6\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18(\text{km})$$

답 ④

04

$B = C$ 이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 10 \text{에서 } \overline{AB} = \overline{AC} = 5 \text{이므로}$$

코사인법칙의 변형에서

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 5} = \frac{17}{25}$$

답 ④

05

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos 60^\circ = 52$$

원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180° 이므로

$$\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\overline{AD} = \overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

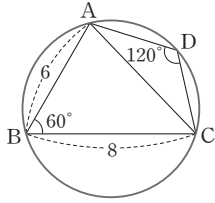
$$\overline{AC}^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos 120^\circ = 3x^2$$

$$\text{즉 } 3x^2 = 52 \text{에서 } x^2 = \frac{52}{3}$$

$$x = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$ 이므로

$$p+q=5$$



답 5

06

$\overline{BC} = x$ 라 하면 코사인법칙의 변형에서

$$\cos B = \frac{9^2 + x^2 - (3\sqrt{5})^2}{2 \times 9 \times x}$$

$$= \frac{x^2 + 36}{18x}$$

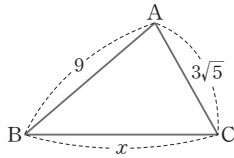
$$= \frac{1}{18} \times \left(x + \frac{36}{x}\right)$$

$$\geq \frac{1}{18} \times 2\sqrt{x \times \frac{36}{x}}$$

$$= \frac{2}{3} \quad (\text{단, 등호는 } x=6 \text{일 때 성립})$$

따라서 $\cos B$ 의 최솟값 $m = \frac{2}{3}$ 이므로

$$60m = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$



답 40

07

코사인법칙의 변형에서

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이므로 $a \cos A + b \cos B = c \cos C$ 에서

$$a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) - c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} = 0$$

$$\frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{2abc} = 0$$

$$\frac{\{c^2 - (a^2 - b^2)\} \{c^2 + (a^2 - b^2)\}}{2abc} = 0$$

$$c^2 - a^2 + b^2 = 0 \text{ 또는 } c^2 + a^2 - b^2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ 또는 } b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 또는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 ⑤

08

$\overline{BP} = x$ 라 하면 $\overline{PC} = 10 - x$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= 8^2 + x^2 - 2 \times 8 \times x \times \cos 60^\circ \\ &= x^2 - 8x + 64 \end{aligned}$$

그런데 $\overline{AP} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{PC}^2$

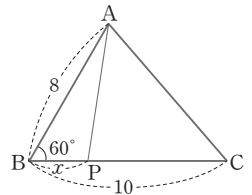
이므로

$$x^2 - 8x + 64 = (10 - x)^2$$

$$x^2 - 8x + 64 = x^2 - 20x + 100$$

$$12x = 36$$

따라서 $x=3$



답 3

09

삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉠$$

한편, 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 120^\circ = 76$$

그런데 $\overline{BC} > 0$ 이므로 $\overline{BC} = 2\sqrt{19}$

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{19} \times \overline{AH}$$

$$= \sqrt{19} \times \overline{AH} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

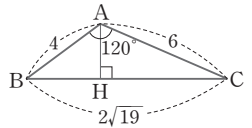
$$\sqrt{19} \times \overline{AH} = 6\sqrt{3} \text{ 이므로 } \overline{AH} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\text{따라서 } \overline{AH}^2 = \frac{108}{19}$$

즉 $p=19$, $q=108$ 이므로

$$p+q=127$$

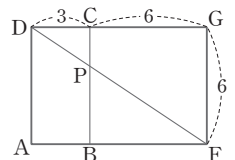
답 127



10

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 전개도에서 생각하면

$\overline{DP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소일 때는 점 P가 두 선분 DF, CB의 교점일 때이다.



$$\overline{CP} : \overline{GF} = \overline{DC} : \overline{DG} \text{에서}$$

$$\overline{CP} : 6 = 3 : 9$$

$$\overline{CP} = 2$$

삼각형 DPC에서

$$\overline{DP} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

삼각형 PFB에서 $\overline{PB} = 6 - 2 = 4$ 이므로

$$\overline{PF} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

삼각형 DFH에서

$$\overline{DF} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$$

$\angle DPF = \theta$ 라 하면

삼각형 PDF에서 코사인법칙의 변형에서

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{13})^2 - 9^2}{2 \times \sqrt{13} \times 2\sqrt{13}} = -\frac{4}{13}$$

이때 $0 < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{13}\right)^2} = \frac{3\sqrt{17}}{13}$$

따라서 삼각형 PDF의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{DP} \times \overline{PF} \times \sin \theta &= \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times 2\sqrt{13} \times \frac{3\sqrt{17}}{13} \\ &= 3\sqrt{17} \end{aligned}$$

답 ①

학교 시험 대비 | 8 | 등차수열과 등비수열 pp.16~17

01 ① 02 ① 03 71 04 210 05 153 06 ②
07 ④ 08 ⑤ 09 ① 10 ⑤

01

첫째항을 a_1 , 공차를 d 라 하면

$$a_8 - a_3 = (a_1 + 7d) - (a_1 + 2d) = 5d$$

이때 $a_8 - a_3 = 2$ 에서

$$5d = 2 \text{이므로 } d = \frac{2}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} &(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) - 5a_1 \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_1) + (a_6 - a_1) + (a_8 - a_1) + (a_{10} - a_1) \\ &= d + 3d + 5d + 7d + 9d \\ &= 25d \\ &= 25 \times \frac{2}{5} \\ &= 10 \end{aligned}$$

답 ①

02

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_9 = ar^8 = 48 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면 $r^6 = 8$

$$r^2 = 2$$

$r^2 = 2$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$2a = 6, a = 3$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{11} - a_7 &= ar^{10} - ar^6 \\ &= a\{(r^2)^5 - (r^2)^3\} \\ &= 3 \times (2^5 - 2^3) = 72 \end{aligned}$$

답 ①

03

일반항 a_n 은

$$a_n = -\frac{1}{3} + (n-1) \times \frac{2}{15} = \frac{2n-7}{15}$$

이때 $\frac{2n-7}{15} = k$ ($k=1, 2, 3, \dots, 9$)에서

$$n = \frac{15k+7}{2}$$

따라서 $k=1, 3, 5, 7, 9$ 일 때 자연수 n 의 값이 존재하므로 $k=9$ 일 때, n 의 최댓값은

$$\frac{15 \times 9 + 7}{2} = 71$$

답 71

04

세 수 $a, 7, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a+b=2 \times 7=14$$

a 와 $7, 7$ 과 b 사이에 각각 15개의 수를 넣어 만든 a 부터 b 까지 등차수열의 합은 첫째항이 a , 제33항이 b 인 등차수열의 첫째항부터 제33항까지의 합이므로

$$\frac{33 \times (a+b)}{2} = \frac{33 \times 14}{2} = 231$$

따라서 세 수 $a, 7, b$ 사이에 새로 집어 넣은 30개 수의 합은

$$231 - (a+7+b) = 231 - 21 = 210 \quad \text{답 210}$$

05

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = -25 \text{이므로}$$

$$\frac{10 \times (2a+9d)}{2} = -25$$

$$2a+9d = -5 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a+d$, 공차가 $2d$ 인 등차수열이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 30 \text{에서}$$

$$\frac{10 \times \{2(a+d) + 9 \times 2d\}}{2} = 30$$

$$a+10d = 3 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -7, d = 1$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a , 공차가 $2d$ 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} & a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{33} \\ &= \frac{17 \times (2a + 16 \times 2d)}{2} \\ &= \frac{17 \times \{2 \times (-7) + 16 \times 2 \times 1\}}{2} \\ &= 153 \end{aligned} \quad \text{답 153}$$

06

조건 (가)에서 $(2b)^2 = a \times 4c$ 이므로

$$b^2 = ac \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $2 \log_4 b = \log_2 a + \log_8 c$ 이므로

$$\log_2 b = \log_2 a + \frac{1}{3} \log_2 c$$

$$\log_2 b = \log_2 ac^{\frac{1}{3}}$$

$$b = ac^{\frac{1}{3}} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠ ÷ ㉡을 하면 $b = c^{\frac{2}{3}}$

$b = c^{\frac{2}{3}}$ 을 ㉡에 대입하면 $a = c^{\frac{1}{3}}$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 는 $(2, 2^2, 2^3), (3, 3^2, 3^3), \dots, (9, 9^2, 9^3)$ 의 8개이다. 답 ②

07

$$f(x) = 2x + 3,$$

$$g(x) = x^2 - 6x + 4 = (x-3)^2 - 5 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = (2x+3-3)^2 - 5 = 4x^2 - 5$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

따라서

$$c_n = (g \circ f)(a_n)$$

$$= 4(a_1 r^{n-1})^2 - 5$$

$$= 4a_1^2 (r^2)^{n-1} - 5$$

$$\text{이므로 } c_n + k = 4a_1^2 (r^2)^{n-1} - 5 + k$$

따라서 수열 $\{c_n + k\}$ 가 등비수열이 되려면

$$-5 + k = 0, k = 5$$

답 ④

08

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n$ 이라 하면

$$\log_2 S_n = n + 3 \text{에서 } S_n = 2^{n+3}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2^{n+3} - 2^{n+2}$$

$$= 2^{n+2}(2-1)$$

$$= 2^{n+2}$$

따라서 $a_1 = 2^4, a_n = 2^{n+2} (n \geq 2)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} &= a_1 + (a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}) \\ &= 2^4 + \frac{2^5 \{(2^2)^9 - 1\}}{2^2 - 1} \\ &= 2^4 + \frac{2^{23} - 2^5}{3} \\ &= \frac{2^{23} + 2^4}{3} \\ &= \frac{2^4(2^{19} + 1)}{3} \end{aligned}$$

이므로 $k = 19$

답 ⑤

09

$$P = 120 \times 1.06^{10} + 120 \times 1.06^9 + \cdots + 120 \times 1.06$$

$$= \frac{120 \times 1.06(1.06^{10} - 1)}{1.06 - 1} = \frac{120 \times 106 \times 0.8}{6}$$

$$Q = 10 \times 1.005^{120} + 10 \times 1.005^{119} + \cdots + 10 \times 0.05$$

$$= \frac{10 \times 1.005(1.005^{120} - 1)}{1.005 - 1} = \frac{10 \times 1005 \times 0.8}{5}$$

$$\text{따라서 } \frac{Q}{P} = \frac{10 \times 1005 \times 0.8 \times 6}{120 \times 106 \times 0.8 \times 5} = \frac{201}{212}$$

답 ①

10

$12^{15} = (2^2 \times 3)^{15} = 2^{30} \times 3^{15}$ 이므로

12^{15} 의 양의 약수 중 3^2 으로 나누어 떨어지고 3^4 으로는 나누어 떨어지지 않는 수는

$$3^2 \times 2^0, 3^2 \times 2^1, 3^2 \times 2^2, \dots, 3^2 \times 2^{30}$$

$$3^3 \times 2^0, 3^3 \times 2^1, 3^3 \times 2^2, \dots, 3^3 \times 2^{30}$$

이므로 그 합은

$$(3^2 + 3^3)(2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{30})$$

$$= 36 \times \frac{2^{31} - 1}{2 - 1}$$

$$= 36(2^{31} - 1)$$

답 ⑤

학교 시험 대비 | 9 | 수열의 합

pp.18~19

01 ④	02 ②	03 252	04 ⑤	05 ③	06 70
07 ①	08 ②	09 ①	10 307		

01

$$\sum_{k=1}^{12} a_{2k+1} - \sum_{k=1}^{12} a_{2k-1}$$

$$= (a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{23} + a_{25}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{23})$$

$$= a_{25} - a_1$$

$$= \sqrt{50-1} - 1$$

$$= 7 - 1 = 6$$

답 ④

02

$$a_5 = \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^4 a_k$$

$$= 2 \times 5^2 - 2 \times 4^2$$

$$= 18$$

..... ㉠

$$a_5 b_5 = \sum_{k=1}^5 a_k b_k - \sum_{k=1}^4 a_k b_k$$

$$= (4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 - 5) - (4 \times 4^3 + 3 \times 4^2 - 4)$$

$$= 270$$

..... ㉡

㉡ ÷ ㉠을 하면

$$b_5 = \frac{270}{18} = 15$$

답 ②

03

$$\sum_{n=1}^7 \left\{ \sum_{m=1}^6 n(n-m) \right\} = \sum_{n=1}^7 \left\{ \sum_{m=1}^6 (n^2 - nm) \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^7 \left(\sum_{m=1}^6 n^2 - \sum_{m=1}^6 nm \right)$$

$$= \sum_{n=1}^7 \left(6n^2 - n \times \frac{6 \times 7}{2} \right)$$

$$= 6 \sum_{n=1}^7 n^2 - 21 \sum_{n=1}^7 n$$

$$= 6 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 21 \times \frac{7 \times 8}{2}$$

$$= 840 - 588$$

$$= 252$$

답 252

04

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n \text{이므로}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}$$

$$= 2n - 3 \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \text{ 이므로}$$

$$a_n = 2n - 3 \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 ka_k &= \sum_{k=1}^8 k(2k-3) \\ &= \sum_{k=1}^8 (2k^2 - 3k) \\ &= 2 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - 3 \times \frac{8 \times 9}{2} \\ &= 408 - 108 = 300 \end{aligned}$$

답 ⑤

05

첫째항이 1, 공차가 2이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \right. \\ &\quad \left. \cdots + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{41} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{41} \right) = \frac{20}{41} \end{aligned}$$

답 ③

06

수열 $\frac{1}{1+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{62} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{62} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{63} - \sqrt{61}) + (\sqrt{64} - \sqrt{62}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{64} + \sqrt{63} - \sqrt{2} - \sqrt{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{63} - \sqrt{2} + 7) \end{aligned}$$

따라서 $a = 63, b = 7$ 이므로

$$a + b = 70$$

답 70

07

$$d_k = \frac{|3x_k - 4y_k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3x_k - 4y_k|}{5} \text{ 이므로}$$

$$d_k^2 = \frac{9x_k^2 + 16y_k^2 - 24x_k y_k}{25}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} d_k^2 &= \sum_{k=1}^{10} \frac{9x_k^2 + 16y_k^2 - 24x_k y_k}{25} \\ &= \frac{1}{25} \left(\sum_{k=1}^{10} 9x_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 16y_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 24x_k y_k \right) \\ &= \frac{1}{25} \left(9 \sum_{k=1}^{10} x_k^2 + 16 \sum_{k=1}^{10} y_k^2 - 24 \sum_{k=1}^{10} x_k y_k \right) \\ &= \frac{1}{25} (9 \times 9 + 16 \times 1 - 24 \times 3) = 1 \end{aligned}$$

답 ①

08

제 n 행에는 n 개의 자연수가 있으므로 제1행에서 제 n 행까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n = 10 \text{ 일 때, } \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

이때 제11행의 첫번째 수는 수열

1, 3, 5, 7, ...의 제56항과 같다.

수열 1, 3, 5, 7, ...은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 일항 a_n 은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

$$a_{56} = 2 \times 56 - 1 = 111$$

따라서 제11행의 수들은 111부터 연속된 11개의 홀수이므로 구하는 합은

$$\frac{11 \times (2 \times 111 + 10 \times 2)}{2} = 1331$$

답 ②

09

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= \frac{n\{1 + (2n-1)\}}{2} = n^2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \log_8 (2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \cdots \times 2^{a_{13}}) \\ &= \frac{1}{3} \log_2 2^{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{13}} \\ &= \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{13}) \\ &= \frac{1}{3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{13 \times 14 \times 27}{6} \\ &= 273 \end{aligned}$$

답 ①

10

$$f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{2} \text{이므로}$$

부등식 $f(n) < k < f(n) + 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서

$$n^2 + 2n - \frac{1}{2} < k < n^2 + 2n + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

부등식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 k 는 $n^2 + 2n$ 이므로

$$a_n = n^2 + 2n$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{n^2 + 2n} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{n(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{175}{132} \end{aligned}$$

즉 $p=132$, $q=175$ 이므로

$$p+q=307$$

답 307

01 ③ 02 ③ 03 1533 04 ③ 05 ② 06 ⑤
07 ④ 08 ④ 09 ③

01

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d = -10 + 3d = 2$$

$$d = 4$$

$$\text{따라서 } a_{10} = -10 + 9 \times 4 = 26$$

답 ③

02

$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$ 에서

$$a_2 = 2(a_1 - 1) = 2 \times (3 - 1) = 4$$

$$a_3 = 2(a_2 - 1) = 2 \times (4 - 1) = 6$$

$$a_4 = 2(a_3 - 1) = 2 \times (6 - 1) = 10$$

$$a_5 = 2(a_4 - 1) = 2 \times (10 - 1) = 18$$

$$a_6 = 2(a_5 - 1) = 2 \times (18 - 1) = 34$$

답 ③

03

$a_{n+1} = 2a_n + 3$ 에서

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 3 + 3 = 3(2 + 1)$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \times 3(2 + 1) + 3 = 3(2^2 + 2 + 1)$$

$$a_4 = 2a_3 + 3 = 2 \times 3(2^2 + 2 + 1) + 3 = 3(2^3 + 2^2 + 2 + 1)$$

\vdots

$$a_9 = 2a_8 + 3 = 3(2^8 + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$$= 3 \times \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 1533$$

답 1533

04

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n \text{에서 } a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 10$ 을 차례로 대입하여 번끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{2}{1}a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3$$

\vdots

$$\times) a_{10} = \frac{10}{9}a_9$$

$$a_{10} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{10}{9} \times a_1 = 10 \times 3 = 30$$

답 ③

05

$a_{n+1} - a_n = 4n + 1$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 4 \times 1 + 1 \\ a_3 - a_2 &= 4 \times 2 + 1 \\ a_4 - a_3 &= 4 \times 3 + 1 \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= 4 \times (n-1) + 1 \\ a_n - a_1 &= 4\{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} + (n-1) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k + (n-1) \\ &= 1 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) \\ &= 2n^2 - n \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 - k) \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 770 - 55 = 715 \end{aligned}$$

답 ②

06

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + a_1 = 2a_1 \\ a_3 &= a_1 + (a_1 + a_2) = (a_1 + a_1) + a_2 = a_2 + a_2 = 2a_2 = 2^2 a_1 \\ a_4 &= a_1 + (a_1 + a_2 + a_3) = (a_1 + a_1 + a_2) + a_3 = a_3 + a_3 = 2a_3 = 2^3 a_1 \\ &\vdots \\ a_9 &= 2^8 a_1 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 a_k &= a_1(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8) \\ &= a_1 \times \frac{1 \times (2^9 - 1)}{2 - 1} = 511a_1 \end{aligned}$$

이므로 $511a_1 = 73$ 에서

$$a_1 = \frac{73}{511} = \frac{1}{7}$$

답 ⑤

07

$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 2}$ 에서 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 2}{2a_n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{a_n}$$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ 으로 놓으면

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 1, b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2}$$

즉 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $\frac{3}{2}$ 인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3n-1}{2}$$

따라서 $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{32} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

답 ④

08

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2k+1 < 2^k$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2(2k+1) < 2^{k+1}$$

$$\text{이때 } 2(2k+1) - \{2(k+1)+1\} = 2k-1 > 0$$

$$\text{이므로 } 2(k+1)+1 < 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

따라서 $f(k) = k+1$, $g(k) = 2(k+1)+1$ 이므로

$$\frac{g(9)}{f(8)} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

답 ④

09

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{8}{5} + \frac{16}{5^2} + \frac{24}{5^3} + \dots + \frac{8k}{5^k} = \frac{1}{2} \left(5 - \frac{4k+5}{5^k} \right)$$

위 등식의 양변에 $\frac{8(k+1)}{5^{k+1}}$ 을 더하여 정리하면

$$\frac{8}{5} + \frac{16}{5^2} + \frac{24}{5^3} + \dots + \frac{8k}{5^k} + \frac{8(k+1)}{5^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(5 - \frac{4k+5}{5^k} \right) + \frac{8(k+1)}{5^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 5 - \frac{4k+5}{5^k} + \frac{16(k+1)}{5^{k+1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[5 - \frac{1}{5^k} \left\{ (4k+5) - \frac{16(k+1)}{5} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(5 - \frac{1}{5^k} \times \frac{4k+9}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 5 - \frac{4(k+1)+5}{5^{k+1}} \right\}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{16(k+1)}{5}$, $g(k) = 4(k+1)+5$ 이므로

$$f(4) + g(5) = 16 + 29 = 45$$

답 ③