Kd Chapter 3. 상태변수 모델

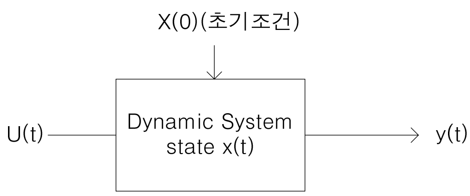
■ 3.1 상태변수모델 개요

- 시간 영역에서의 상태변수 모델은 컴퓨터를 활용한 해를 구하기가 용이하며, 비선형, 시변시스템time-varying system, 다변수시스템multivariable system 등 좀더 넓은 영역에 사용 가능하다.
- n차 상미분방정식을 여러 개의 1차 미분방정식으로 분해 하는 원리를 이용함.
- state (상태) 개념의 이용하며, 기본적으로 time domain 에서의 tool임.

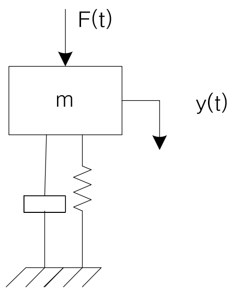
※ 시스템의 상태state란? : 시스템의 역학을 나타내는 식에서, 앞으로의 변화 및 출력에 대한 정보를 알려줄 수 있는 변수들의 집합

■ 3.2 상태변수state variables

[$x_1(t)$, $x_2(t)$, ····, $x_n(t)$] → 현재의 값과 입력 신호를 알면 미래의 행동(출력)을 결정할 수 있는 변수들



Example)



$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+ky=u(t) \tag{3.2.1}$$

이 때 상태변수를 다음과 같이 정의하면

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases} \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

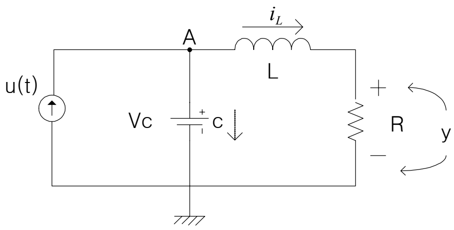
$$m\frac{dx_2}{dt}+ bx_2+kx_1=u(t) \tag{3.2.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{b}{m}x_2 - \dfrac{K}{m}x_1 + \dfrac{1}{m}u \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$\therefore\ \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}\mathbf{u} \tag{3.2.5}$$

❖ 기본형

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$



$$\left(\begin{array}{ll} \text{capacitor의 equ.} & i = C \cdot \dfrac{dV}{dt} \\ \text{coil equ.} & V = L \cdot \dfrac{di}{dt} \end{array} \right)$$

미분방정식 $$\begin{bmatrix} C \cdot \dfrac{dV_c}{dt} = u(t) - i_L : \text{node A에서의 KCL} \\ L \cdot \dfrac{di_L}{dt} = -Ri_L + Vc\ :\ \text{KVL} \end{bmatrix}$$

에너지 방정식: $$\frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}CV_C^2 \tag{3.2.7}$$

여기서 state를 식(3.2.8)과 같이 정의 하면,

$$\begin{cases} x_1 = V_C \\ x_2 = i_L \end{cases} \tag{3.2.8}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} \cdot u(t) - \frac{1}{C}x_2 \tag{3.2.9}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}x_1 \tag{3.2.10}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \tag{3.2.11}$$

$$\mathbf{y} = Ri_L = Rx_2 = [0\ \ R]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.2.12}$$

$$= [0\ \ R]\mathbf{x} \tag{3.2.13}$$

■ 3.3 상태 미분 방정식과 라플라스Laplace 변환과의 관계

$$\dot{\mathbf{x}} = a\mathbf{x} + b\mathbf{u} \tag{3.3.1}$$

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \tag{3.3.2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}x(0) + \frac{b}{s-a}U(s) \tag{3.3.3}$$

식 (3.3.3)에 Inverse Laplace transform을 취하면,

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{3.3.4}$$

cf) convolution: Y(s) = H(s)X(s)일 때 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ (3.3.5)

Transition matrix $\Phi(t)=e^{at}$라 정의하면

$$\therefore x(t) = \Phi(t)\cdot x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)bu(\tau)d\tau \tag{3.3.6}$$

x, a, b, u 가 matrix일 경우 (확장해보자.)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\cdot\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{bu}(\tau)d\tau \tag{3.3.7}$$

cf) State transition matrix: $\exp(At) = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!}$ (3.3.8)

< 표 3.1 Matrix와 vector의 일반적인 표기법notation>

표기	예시	설명	내용예
대문자 Bold	**A, B, C**	matrix	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
소문자 Bold	**x, b, u**	vector	$[x_1\ x_2\ x_3]$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
소문자 normal	d, e	Scalar constant	상수
소문자 Italic	*k, q*	Scalar variable	변수

■ 3.4 상태방정식으로부터 전달함수 구해내기

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u \tag{3.4.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx} \tag{3.4.2}$$

각각의 Laplace tr. 을 취하면,

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{B}U(s) \tag{3.4.3}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) \tag{3.4.4}$$

(3.4.3)을 다시 정리하면

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \qquad \text{where} \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{s}) \tag{3.4.5}$$

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s) \cdot \mathbf{B}U(s) \tag{3.4.6}$$

식(3.4.6)을 식(3.4.4)에 대입하면

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \Phi(s) \cdot \mathbf{B} \cdot U(s) \tag{3.4.7}$$

$$\text{where } \ G(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{X} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} \tag{3.4.8}$$

Example)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u \tag{3.4.9}$$

$$y = [0 \quad 3]\mathbf{x} = \mathbf{cx} \tag{3.4.10}$$

$$\mathbf{c}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = [0\ 3]\begin{bmatrix} s & +2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.11}$$

$$= \frac{1}{S(s+3)+2} \times [0 \quad 3] \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.12}$$

$$= \frac{6}{s(s+3)+2} \tag{3.4.13}$$

■ 3.5 상태천이행렬state transition matrix

직접 exp.을 통해서 구하는 방법과 라플라스 변환을 통한 방법, 두 가지 방법이 있다.

❶ exp. 활용

$$\Phi(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots \tag{3.5.1}$$

❷ Laplace 역변환 활용

Φ(s)를 구해서 Laplace 역변환 한다.

$$\Phi(s) = (sI - \mathbb{A})^{-1} \tag{3.5.2}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - \mathbb{A})^{-1}] \tag{3.5.3}$$

∴ 상태천이 행렬을 구할수 있으면, 컨볼루션convolution을 활용하여 시간영역에서의 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \tag{3.5.4}$$

■ 3.6 상태변수state variable 모델을 이용한 시간응답계산

이산 시간의 근사화와 미분의 기본정의 활용함

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{3.6.1}$$

충분히 작은 $\Delta t = T$에 대하여

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} \tag{3.6.2}$$

$$\frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} \cong \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{3.6.3}$$

$$\mathbf{x}(t+T) \cong (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + T\mathbf{B}u(t) \tag{3.6.4}$$

t=KT   (k=0,1,2,⋯) 라 놓으면

$$\therefore\ \mathbf{x}[(k+1)T] \cong (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{B}u(kT) \tag{3.6.5}$$

Example (3.6) RLC 회로의 응답.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \tag{3.6.6}$$

T= 0.2로 잡으면 (가장 작은 시정수의 절반 이하)

$$\mathbf{x}(k+1) \cong \underbrace{(0.2\mathbf{A} + \mathbf{I})}_{\begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}}\mathbf{x}(k) \ + \underbrace{0.2\mathbf{B}}_{\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}}u(k) \tag{3.6.7}$$

$$\therefore \mathbf{x}(k+1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}u(k) \tag{3.6.8}$$

만약 u(k)=0 이고, $x_1(0) = x_2(0) = 1$ 이면

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \tag{3.6.9}$$

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{bmatrix} \tag{3.6.10}$$

< 표3.2 계산 결과표>

	0	T	2T	3T	
x_1	1	0.6	0.36	…	…
x_2	1	0.6	0.36	…	…

★