문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 실시한 시합 수 : 3

A 승 승 승　　or　　A 패 패 패
B 패 패 패　　　　　B 승 승 승

↓　　　　　　　　　　↓

p^3　　즉가게　　$(1-p)^3$

시합 B가 승리할 확률 $1-p$

실시한 시합 : 4

A 승×3 패시 → $p^3 \times (1-p)$ → A가 우승팀
B

A가 마지막에 승리해야 하므로 경우의수 $\boxed{{}_3C_1}$

A
B 승×3 패시 → $p \times (1-p)^3$ → B가 우승팀

경우의수 $\boxed{{}_3C_1}$

시합: 5
시합 : 5회

A 승×3 패×2 → $p^3 \times (1-p)^2$ → A 우승팀

경우의수 ${}_4C_2$

B 승×3 패×2 → $p^2 \times (1-p)^3$ → B 우승

경우 ${}_4C_2$

기댓값 : $3 \times p^3 \times 1 + 3(1-p)^3 + 4 \times 3p^3(1-p) + 4 \times 3(1-p)^3 p + \overset{\times 5}{6p^3(1-p)^2} + \overset{\times 5}{6p^2(1-p)^3}$

$= p^3(3+12-12p+30(1-p)^2) + (1-p)^3(3+12p+30p^2)$

$= p^3(30p^2-72p+45) + (1-p)^3(30p^2+12p+3)$

$= 6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$

2

접선 中 기울기가 m인 직선 2개와 $-\frac{1}{m}$인 직선 2개가 만나면 직사각형을 이룬다.

그 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$라는건 평행한 두 직선 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$라는것
+
두 직선이 서로 원점 대칭이므로 원점과 떨어진거리 $\sqrt{5}$

타원의 중심이 $(0,0)$이면

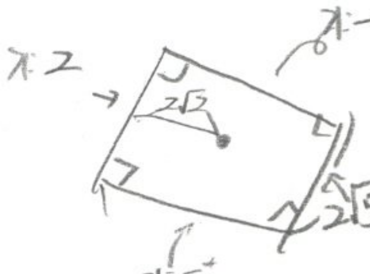
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 이 타원의 방정식이다.

$y = mx \pm \sqrt{9m^2+4}$

$\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$9m^2+4 = 5m^2+5$　　$m = \pm\frac{1}{2}$ 인데 $-$로 놓자.

$4m^2 = 1$



부호는 바뀌도 직사각형이 대칭이동할 뿐이라 주어진 조건과 넓이를 바꾸지 않음

$m = 2$이면

$y = 2x \pm \sqrt{4 \times 10}$

$\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{2}$
↳ 원점과 떨어진 거리

넓이: $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} = \boxed{8\sqrt{10}}$

3. 주어진 식을 $x \geq 0$과 $x < 0$으로 나누면

$\int_0^a (a-x) f(x)dx + \int_{-a}^0 (a+x) f(x)dx = 0$ 이다.

$a\int_0^a f(x)dx - \int_0^a xf(x)dx + a\int_{-a}^0 f(x)dx + \int_{-a}^0 xf(x)dx = 0$

$a\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a xf(x)dx - \int_{-a}^0 xf(x)dx$

$a(f(a) - f(-a)) = [xf(x)]_0^a - \int_0^a f(x)dx - [xf(x)]_{-a}^0 + \int_{-a}^0 f(x)dx$

$af(a) - af(-a) = af(a) - af(-a) - \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx$

→ $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx$　　$F(a) - F(0) = F(0) - F(-a)$　$F(x) = \int_0^x f(t)dt$

↳ a에 대하여 미분　$f(a) = f(-a)$ 이다.

식에 $-a$를 대입하면 음수범위 내에서도 성립.

0을 대입하면 $f(0) = f(0)$ 이므로 성립

따라서 $f(x) = f(-x)$는 모든실수 x에 대하여 성립한다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. B가 승리할 확률: $1-p$

무승부가 없으므로 게임이 5회 초과로 진행될 수 없다.
(6회 이상 진행되면 비둘기집 원리에 의해 두팀 모두 3승을 하거나 한 팀이 4승 이상을 한다)

게임이 3회 미만으로 진행되면 우승자가 결정되지 않으므로 실시된 시합 횟수는 3, 4, 5 번이 가능하다.

i) 3회만에 우승자가 나온 경우 $(A, B) = (0,3)$ or $(3,0)$
A 또는 B가 3회 모두 승리
∴ 확률 = $p^3+(1-p)^3 = 1-3p+3p^2$

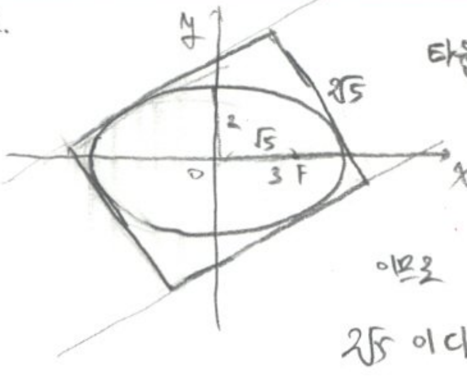
ii) 4회만에 우승자가 나온 경우 $(A,B) = (1,3)$ or $(3,1)$
① A가 우승
4회 중 마지막은 A가 승. ⇒ $_3C_1 \cdot p^2(1-p)\cdot p$
$= 3p^3(1-p)$
② B가 우승
4회 중 마지막은 B가 승 ⇒ $_3C_1\cdot p(1-p)^2\cdot(1-p)$
$= 3p(1-p)^3$
∴ 확률 = $3p^3(1-p)+3p(1-p)^3 = 3p(1-p)(2p^2-2p+1)$

iii) 5회만에 우승자가 나온 경우 $(A,B)=(2,3)$ or $(3,2)$
① A 우승
5회 중 마지막은 A가 승 ⇒ $_4C_2\cdot p^2(1-p)^2\cdot p = 6p^3(1-p)^2$
② B가 우승.
5회 중 마지막은 B가 승 ⇒ $_4C_2 \cdot p^2(1-p)^2\cdot(1-p) = 6p^2(1-p)^3$
∴ 확률 = $6p^3(1-p)^2+6p^2(1-p)^3 = 6p^2(1-p)^2$

∴ 기댓값 = $3\cdot(1-3p+3p^2)+4\cdot 3p(1-p)(2p^2-2p+1)+5\cdot 6p^2(1-p)^2$
$=3(2p^4-4p^3+p^2+p+1)$

답: $6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$

2.



타원의 방정식을 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 이라 하면, 네 변이 모두 이 타원에 접하는 직사각형의 한 변의 길이가 $2\sqrt5$ 이므로 기울기가 같은 두 접선 사이의 거리가 $2\sqrt5$ 이다.

기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$ 이므로
두 접선 사이 거리는 $2\sqrt{9m^2+4}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = 2\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt5$ 이다.
(∵ m이 기울기 ⇒ $\sqrt{9m^2+4}$는 y좌표 차이 이므로 $\times\cos\theta$를 해줘야 하는데 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$)

$\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt5$ 이므로 $9m^2+4=5m^2+5$
$m=\pm\frac12$ 이다. ($+\frac12$이든 $-\frac12$이든 직사각형의 넓이는 동일)

$m=-\frac12$이라 하고 다른 두 접선을 구하면
$y=2x\pm\sqrt{40}=2x\pm2\sqrt{10}$ 이므로 (접선의 기울기 = $-\frac{1}{-\frac12}=2$)
두 접선 사이 거리는 $2\cdot2\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt5}=4\sqrt2$ 이다.
∴ $2\sqrt5\cdot4\sqrt2=8\sqrt{10}$

답: $8\sqrt{10}$

3. $\int_{-a}^{a}(a-|x|)f'(x)dx = \int_{-a}^{a}af'(x)dx - \int_{-a}^{a}|x|f'(x)dx$
$=a(f(a)-f(-a)) - \int_0^a xf'(x)dx + \int_{-a}^0 xf'(x)dx$
$=a(f(a)-f(-a)) - af(a)+\int_0^a f(x)dx$
$-(-a)f(-a) + \int_{-a}^0 f(x)dx$
$=\int_0^a f(x)dx - \int_{-a}^0 f(x)dx = 0$

∴ $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx$ 이를 a에 대해 미분하면
$f(a) = -(-f(-a)) = f(-a)$ ⇒ a가 양수이므로
$x>0$ 에서 $f(x)=f(-x)$
$x<0$ 에서 $x=-a$ $f(-a)=f(a)$ 성립 ⇒ $f(x)=f(-x)$
$x=0$에서 $f(0)=f(0)$ 성립; ∴ $f(x)=f(-x)$