

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	①	2	④	3	①	4	②	5	⑤
6	①	7	③	8	⑤	9	②	10	②
11	③	12	④	13	④	14	⑤	15	③
16	4	17	11	18	427	19	18	20	66
21	12	22	729						

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$\sqrt[3]{8} \times \frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})} = 2 \times 2^{-1} = 1$$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x \text{ 이므로 } f'(1) = 6 - 2 = 4$$

3. [출제의도] 등비수열을 이용하여 항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면
 $a_7 = 4a_6 - 16$ 에서 $a_5 r^2 = 4a_5 r - 16$ 이므로
 $4r^2 = 4 \times 4r - 16$, $r^2 - 4r + 4 = 0$, $(r-2)^2 = 0$
 따라서 $r = 2$
 $a_8 = a_5 r^3 = 4 \times 2^3 = 32$

4. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하여 함수값을 구한다.

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 - ax + 1 \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $1-a+1=0$, $a=2$
 ①의 양변을 x 에 대하여 미분하고 $a=2$ 를 대입하면
 $f(x) = 3x^2 - 2$ 이므로
 $f(2) = 12 - 2 = 10$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 에서 } \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta > 0 \text{ 에서 } \sin \theta < 0$$

θ 는 제 3 사분면의 각이고

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

6. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \{f(x)\}^2 = \{f(2)\}^2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \{f(x)\}^2 = (5-2a)^2, \lim_{x \rightarrow 2^+} \{f(x)\}^2 = 1, \{f(2)\}^2 = 1$$

에서 $(5-2a)^2 = 1$
 따라서 $a=2$ 또는 $a=3$
 모든 상수 a 의 값의 합은 $2+3=5$ 이다.

7. [출제의도] 정적분을 활용하여 곡선과 x 축 사이의 넓이를 구한다.

구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^2 (|x^2 - 2x| + 1) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 1) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

8. [출제의도] 선분의 내분점과 로그함수를 이해하여 상수의 값을 구한다.

선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{2(m+3)+m}{2+1}, \frac{2(m-3)+(m+3)}{2+1} \right)$ 즉, $(m+2, m-1)$
 점 $(m+2, m-1)$ 이 곡선 $y = \log_4(x+8) + m - 3$ 위에 있으므로
 $m-1 = \log_4(m+10) + m - 3$ 에서 $\log_4(m+10) = 2$
 $m+10 = 16$ 이므로 $m=6$

9. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$g(x) = x^3 - 3x^2 + p$ 라 하면 $f(x) = |g(x)|$
 $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
 $g'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$
 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x) = |g(x)|$ 가 극대가 되는 x 가 2개가 되려면
 $g(0) = p > 0$, $g(2) = p - 4 < 0$ 즉, $0 < p < 4$
 $f(0) = |p| = p$, $f(2) = |p-4| = 4-p$
 $f(0) = f(2)$ 이므로 $p = 4-p$ 즉, $p=2$

10. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^9 a_k = \frac{9(2a+8d)}{2} = 27$
 $a+4d=3$ 즉, $a_5 = 3 \dots\dots \textcircled{1}$
 $a_5 > 0$ 이고 $d > 0$ 이므로 $a_6 > 0$
 (i) $a_4 \geq 0$ 인 경우
 $|a_4| + |a_6| = (a+3d) + (a+5d) = 2a+8d = 8$
 $a+4d=4$ 이므로 ①에 모순이다.
 (ii) $a_4 < 0$ 인 경우
 $|a_4| + |a_6| = -(a+3d) + a+5d = 2d = 8$, $d=4$
 (i), (ii)에서 $d=4$ 이므로
 $a_{10} = a_5 + 5d = 3 + 5 \times 4 = 23$

11. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 PBC에서
 $\angle BPC = 180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$
 삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135^\circ} = \frac{PC}{\sin 30^\circ}$ 이므로
 $PC = 2\sqrt{3} \times \frac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \sqrt{6}$
 $AC = b$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + b^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times b \times \cos 60^\circ$
 $b^2 - 2\sqrt{2}b - 4 = 0$
 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{2} + \sqrt{6}$
 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ 이므로 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $A = 60^\circ$ 에서 $C < 120^\circ$ 이므로 $C = 45^\circ$
 $\angle PCA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ 이므로 삼각형 APC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times \sin 30^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

12. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 함수의 극한에 관한 문제를 해결한다.

직선 l 의 기울기가 1이고 y 절편은 $g(t)$ 이므로
 직선 l 의 방정식은 $y = x + g(t)$ 이다.
 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면
 α, β 는 이차방정식 $x^2 = x + g(t)$ 즉, $x^2 - x - g(t) = 0$ 의 두 근이다.

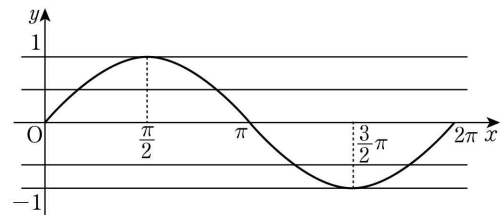
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -g(t) \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $A(\alpha, \alpha + g(t)), B(\beta, \beta + g(t))$ 이므로
 $\overline{AB}^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha - \beta)^2$
 이고 ①에서 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4g(t)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 = 2 + 8g(t)$ 에서 $4t^2 = 2 + 8g(t)$
 $g(t) = \frac{2t^2 - 1}{4}$
 따라서 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - 1}{4t^2} = \frac{1}{2}$

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함수값을 추론한다.

(가)에서 $g(a\pi) = -1$ 또는 $g(a\pi) = 1$ 이다.
 $\sin(a\pi) = -1$ 에서 $a = \frac{3}{2}$, $\sin(a\pi) = 1$ 에서 $a = \frac{1}{2}$
 (나)에서 방정식 $f(g(x)) = 0$ 의 해가 존재하므로
 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 $f(t) = 0$ 인 실수 t 가 존재한다.



$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $g(x) = t$ 의 모든 해의 합은
 $t = -1$ 일 때 $\frac{3}{2}\pi$, $-1 < t < 0$ 일 때 3π ,

$0 < t < 1$ 일 때 π , $t = 1$ 일 때 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(g(x)) = 0$ 의 모든 해의 합이 $\frac{5}{2}\pi$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 두 실근 $-1, \alpha$ 를 가지고 $0 < \alpha < 1$ 이다.

(i) $a = \frac{3}{2}$ 인 경우

$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + b$ 에서 $f(-1) = 0$ 이므로

$f(-1) = b - \frac{1}{2} = 0$ 즉, $b = \frac{1}{2}$

$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = (x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 에서

방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근은 $x = -1$ 또는 $x = -\frac{1}{2}$
 이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a = \frac{1}{2}$ 인 경우

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + b$ 에서 $f(-1) = 0$ 이므로

$f(-1) = b + \frac{1}{2} = 0$ 즉, $b = -\frac{1}{2}$

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 에서

방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근은 $x = -1$ 또는 $x = \frac{1}{2}$
 이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이고 $f(2) = \frac{9}{2}$ 이다.

14. [출제의도] 함수의 미분가능성과 그래프를 활용하여 도형의 넓이를 추론한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
 함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.
 이때 함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 에서 연속이므로
 $f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = ak$

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하므로

$$f'(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{ax - ak}{x - k} = a$$

∴ $f'(k) = a$ 이고 $a=1$ 이므로 $f'(k) = 1$ 이다. (참)

∴ $g(x) = -x^2 + 4bx - 3b^2$ 이라 하자.

직선 $y = ax$ 는 원점에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은
 기울기가 양수인 접선 중 하나이고,

접점의 좌표는 $(k, g(k))$ 이다.

$g'(x) = -2x + 4b$ 이므로 곡선 $y = g(x)$ 위의 점

$(k, g(k))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-k^2 + 4bk - 3b^2) = (-2k + 4b)(x - k)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 - (-k^2 + 4bk - 3b^2) = (-2k + 4b)(0 - k)$$

$$k^2 - 3b^2 = 0$$

$k > 0, b > 0$ 이므로 $k = \sqrt{3}b$

$k = 3$ 이므로 $b = \sqrt{3}$ 이고

$$a_3 = g'(k) = -2k + 4b = (4 - 2\sqrt{3})b$$

$$= -6 + 4\sqrt{3} \quad (\text{참})$$

ㄷ. ㄴ에서

$$f(x) = \begin{cases} (4 - 2\sqrt{3})bx & (x < \sqrt{3}b) \\ -x^2 + 4bx - 3b^2 & (x \geq \sqrt{3}b) \end{cases}$$

이고

$$f'(x) = \begin{cases} (4 - 2\sqrt{3})b & (x < \sqrt{3}b) \\ -2x + 4b & (x \geq \sqrt{3}b) \end{cases}$$

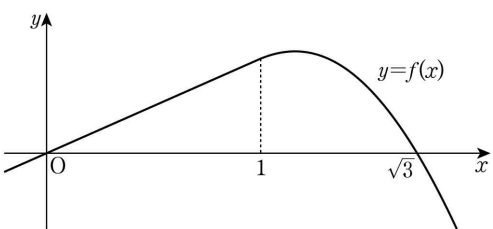
$f(k) = f'(k)$ 에서 $f(\sqrt{3}b) = f'(\sqrt{3}b)$ 이므로

$$-3b^2 + 4\sqrt{3}b^2 - 3b^2 = -2\sqrt{3}b + 4b$$

따라서 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x < 1) \\ -x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축은 $x = 0, x = \sqrt{3}$ 에서 만나므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4\sqrt{3}-6}{3} + \int_1^{\sqrt{3}} \left(-x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 1\right) dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - x\right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

$a_5 + a_4$ 가 홀수이면 a_6 이 홀수이므로 $a_6 = 34$ 에 모순이다. 따라서 $a_5 + a_4$ 는 짝수이고 a_4, a_5 는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

a_4, a_5 가 모두 짝수이면 a_3 도 짝수이고 마찬가지로 a_2, a_1 도 모두 짝수이다. 이는 $a_1 = 1$ 에 모순이므로 a_4, a_5 는 모두 홀수이다.

따라서 a_1, a_4 는 모두 홀수이므로 가능한 a_2, a_3 의 값은 다음과 같다.

(i) a_2, a_3 이 모두 홀수인 경우

$$a_2 = 2l - 1 \quad (l \text{ 은 자연수}) \text{라 하자.}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = l$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2) = \frac{3}{2}l - \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = \frac{5}{4}l - \frac{1}{4}$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{11}{8}l - \frac{3}{8} = 34$$

이므로 $l = 25$ 이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 25 - 1 = 49$

(ii) a_2 는 짝수, a_3 은 홀수인 경우

$a_2 = 2m$ (m 은 자연수)라 하자.

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2m + 1$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 4m + 1$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = 3m + 1$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}m + 1 = 34$$

이므로 m 은 자연수가 아니다.

(iii) a_2 는 홀수, a_3 은 짝수인 경우

$a_2 = 2n - 1$ (n 은 자연수)라 하자.

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = n$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3n - 1$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 4n - 1$$

$$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}n - 1 = 34$$

이므로 $n = 10$ 이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 10 - 1 = 19$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a_2 의 값의 합은

$$49 + 19 = 68$$

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\begin{aligned} \log_2 96 - \frac{1}{\log_6 2} &= \log_2 96 - \log_2 6 = \log_2 \frac{96}{6} \\ &= \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \end{aligned}$$

17. [출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 상수의 값을 구한다.

직선 $y = 4x + 5$ 와 곡선 $y = 2x^4 - 4x + k$ 가

점 $P(a, b)$ 에서 접한다고 하자.

$$f(x) = 2x^4 - 4x + k \text{ 라 하면 } f'(x) = 8x^3 - 4$$

곡선 위의 점 P 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(a) = 8a^3 - 4 = 4, \quad a^3 = 1 \text{ 즉, } a = 1$$

점 P 는 직선 $y = 4x + 5$ 위의 점이므로

$$b = 4 \times 1 + 5 = 9$$

$$\text{이때 } f(1) = 2 - 4 + k = k - 2 = 9$$

따라서 $k = 11$

18. [출제의도] \sum 의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$$x^2 - 5nx + 4n^2 = (x - n)(x - 4n) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = n \text{ 또는 } x = 4n$$

$$\sum_{n=1}^7 (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) = \sum_{n=1}^7 (1 - n)(1 - 4n)$$

$$= \sum_{n=1}^7 (1 - 5n + 4n^2) = 7 - 5 \times \frac{7 \times 8}{2} + 4 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} = 427$$

19. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.

시각 t 에서 두 점 P, Q 의 위치를 각각

$x_1(t), x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + kt, \quad x_2(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2$$

두 점 P, Q 가 출발한 후 한 번만 만나므로 $t > 0$ 에서 방정식 $x_1(t) = x_2(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1 이다.

$$x_1(t) - x_2(t) = t(2t^2 - 12t + k) = 0 \text{ 에서 } k > 0 \text{ 이고}$$

$t > 0$ 이므로 이차방정식 $2t^2 - 12t + k = 0$ 은 중근을

가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-12)^2 - 4 \times 2 \times k = 0$$

따라서 $k = 18$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결한다.

$g(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x - p) - f(-p)}{x} = f'(-p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + p) - f(p)}{x} = f'(p)$$

$g'(0) = 0$ 이므로 $f'(-p) = f'(p) = 0$

$f'(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로

$$f'(x) = 3(x + p)(x - p) = 3x^2 - 3p^2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3p^2x + C$ (단, C 는 적분상수)

$$f(0) = 1 \text{ 이므로 } f(x) = x^3 - 3p^2x + 1$$

$x \geq 0$ 에서 $g(x) = f(x + p) - f(p)$ 이므로

$$\int_0^p g(x) dx = \int_0^p \{f(x + p) - f(p)\} dx$$

$$= \int_0^p (x^3 + 3px^2) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + px^3 \right]_0^p = \frac{5}{4}p^4 = 20$$

$p > 0$ 이므로 $p = 2$ 이고, $f(x) = x^3 - 12x + 1$

따라서 $f(5) = 66$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 문제를 해결한다.

두 점 A 와 B 의 y 좌표는 모두 k 이므로

$A(1, k), B(\log_a k + k, k)$ 이다.

두 점 C 와 D 의 x 좌표는 모두 k 이므로

$C(k, 2\log_a k + k), D(k, 1)$ 이다.

두 선분 AB 와 CD 가 만나는 점을 E 라 하면

$E(k, k)$ 이므로

$$\overline{AE} = k - 1, \quad \overline{BE} = \log_a k, \quad \overline{CE} = 2\log_a k, \quad \overline{DE} = k - 1$$

사각형 $ADBC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{85}{2}$ 이고,

삼각형 CAD 의 넓이는 35 이므로

삼각형 CBD 의 넓이는 $\frac{85}{2} - 35 = \frac{15}{2}$ 이다.

$\overline{AE} = p, \overline{BE} = q$ 라 하면 두 삼각형 CAD, CBD 의 넓이의 비는

$$p : q = 35 : \frac{15}{2} = 14 : 3 \text{ 즉, } q = \frac{3}{14}p$$

이때 $\overline{CE} = 2q, \overline{DE} = p$ 이므로 삼각형 CAD 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times (\overline{CE} + \overline{DE})$$

$$= \frac{1}{2} \times p \times (2q + p) = \frac{p}{2} \times \left(\frac{3}{7}p + p\right)$$

$$= \frac{5}{7}p^2 = 35$$

$p^2 = 49$ 이고 $p > 0$ 이므로

$$p = 7, \quad q = \frac{3}{2}$$

$k - 1 = p, \log_a k = q$ 이므로

$$k = p + 1 = 8$$

$$q = \log_a k = \log_a 8 = \frac{3}{2}, \quad a^{\frac{3}{2}} = 8 \text{ 즉, } a = 4$$

따라서 $a + k = 12$

22. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$ 의 값이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|} = \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|} \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow k^-} \left(\frac{g(x) - g(k)}{x - k} \times \frac{x - k}{|x - k|} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{g(x) - g(k)}{x - k} \times (-1) \quad \text{..... ㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow k^+} \left(\frac{g(x) - g(k)}{x - k} \times \frac{x - k}{|x - k|} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{g(x) - g(k)}{x - k} \times 1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{x - k} = 0$ 이거나

$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{g(x) - g(k)}{x - k}$ 와 $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{g(x) - g(k)}{x - k}$ 의 절댓값이

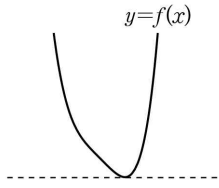
같고 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $g'(k)=0$ 즉, $f'(k)=0$ 이거나

$g(k)=0$ 즉, $f(k)=t$ 이다.

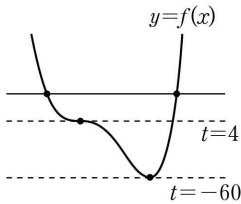
방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 실수 t 가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

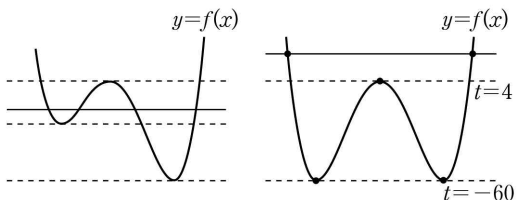


함수 $h(t)$ 가 $t=-60$ 과 $t=4$ 에서 불연속이므로 $f'(a)=0$ 일 때 $f(a)$ 의 값은 -60 과 4 이다.

이때 $\lim_{t \rightarrow 4^+} h(t)=4$ 가 되어 조건 (가)를

만족시키지 못한다.

(iii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]

[그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면

함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 서로 다른 실수 t 가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4이면 $\lim_{t \rightarrow 4^+} h(t)=5$ 이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

이때 $h(4)=5$

(i), (ii), (iii)에서 사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 두 극솟값은 모두 -60 , 극댓값은 4이다. $f(2)=4$ 이고 $f'(2)>0$ 이므로 방정식 $f(x)=4$ 의 가장 큰 실근이 2가 된다.

함수 $f(x)$ 의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$ 라 하면, $p(0)=0$ 이고 $p'(0)=0$ 이므로 $p(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다. 또한 함수 $p(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 양수 a 에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$ 이라 하면

$$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$$

$$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$$

이므로 $p'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64 \text{ 이므로}$$

$$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{a^4}{4}=-64$$

즉, $a^4=256=4^4$ 이므로 $a=4$ 이다.

이때 $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$

방정식 $p(x)=0$ 의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서

$$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$$

$$f(4)=724, h(4)=5 \text{ 이므로}$$

$$f(4)+h(4)=724+5=729$$

[확률과 통계]

23	①	24	③	25	④	26	⑤	27	②
28	⑤	29	120	30	45				

23. [출제의도] 중복순열의 수를 계산한다.

$${}_3P_2 + {}_3P_2 = 3 \times 2 + 3^2 = 15$$

24. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

학생 5명을 배열하는 원순열의 수는

$$(5-1)! = 24$$

25. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

양 끝 모두에 B가 적힌 카드를 놓고 그 사이에 A, A, A, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 나머지 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

26. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_2P_3 = 2^3 = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 8 = 160$$

27. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, d'=d-1$ 이라 하면

$a+b+c+3d=10$ 에서

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+3(d'+1)=10$$

$$a'+b'+c'+3d'=4$$

이때 a', b', c', d' 은 모두 음이 아닌 정수이다.

(i) $d'=0$ 인 경우

$a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = 15$$

(ii) $d'=1$ 인 경우

$a'+b'+c'=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는

$${}_3H_1 = {}_{3+1-1}C_1 = {}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$$15+3=18$$

28. [출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키려면 한 접시에는 빵을 2개 담고, 나머지 세 접시에는 빵을 1개씩 담아야 한다. 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

2개의 빵이 담긴 접시를 A, 1개의 빵이 담긴 세 접시를 각각 B, C, D라 하자.

(i) 접시 A에 사탕을 담지 않는 경우

접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담고 나머지 접시에 사탕 1개를 담는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

(ii) 접시 A에 사탕 1개를 담는 경우

접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 1개씩 담고 나머지 접시에 사탕 2개를 담는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

(i), (ii)에 의하여 접시 A, B, C, D에 사탕을 담는 경우의 수는

$$3+3+3=9$$

접시 A, B, C, D를 원 모양의 식탁에 놓는 원순열의 수는

$$(4-1)! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 9 \times 6 = 540$$

29. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키도록 선택한 6개의 수를 각각

1, 2, 3, a, b, c (a, b, c 는 3 이하의 자연수)

라 하자.

$$3 \leq a+b+c \leq 9 \text{ 에서}$$

$$9 \leq 1+2+3+a+b+c \leq 15$$

이므로 조건 (나)를 만족시키려면

$$1+2+3+a+b+c=12$$

$$a+b+c=6$$

(i) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 1, 2, 3인 경우 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

(ii) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 2, 2, 2인 경우 6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!} = 30$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$90+30=120$$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$${}_5H_5 = {}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = 126$$

조건 (나)의 부정은

$$f(2)=1 \text{ 또는 } f(4) \times f(5) \geq 20 \dots \textcircled{1}$$

이다.

(i) $f(2)=1$ 인 경우

$f(1)=1$ 이고 $1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 5$ 이므로

$f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$

(ii) $f(4) \times f(5) \geq 20$ 인 경우

$f(4)=4, f(5)=5$ 일 때

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 4$ 이므로

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

$f(4)=5, f(5)=5$ 일 때

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 5$ 이므로

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$

그러므로 이 경우 구하는 함수 f 의 개수는

$$20+35=55$$

(iii) $f(2)=1$ 이고 $f(4) \times f(5) \geq 20$ 인 경우

$f(1)=1$ 이고 $f(4)=4, f(5)=5$ 일 때

$1 \leq f(3) \leq 4$ 에서 $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

$f(1)=1$ 이고 $f(4)=5, f(5)=5$ 일 때

$1 \leq f(3) \leq 5$ 에서 $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

그러므로 이 경우 구하는 함수 f 의 개수는

$$4+5=9$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$35+55+9=81$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$126-81=45$$

[미적분]

23	④	24	②	25	③	26	⑤	27	①
28	②	29	50	30	25				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

24. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$3^n - 2^n < a_n < 3^n + 2^n$ 에서

$$\frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} + 2^n} < \frac{a_n}{3^{n+1} + 2^n} < \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^{n+1} + 2^n} = \frac{1}{3}$$

25. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} - 6n}{a_n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + (2n-1)d - 6n}{a_1 + (n-1)d + 5}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2d-6)n + a_1 - d}{dn + a_1 - d + 5}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d-6 + \frac{a_1-d}{n}}{d + \frac{a_1-d+5}{n}}$$

$$= \frac{2d-6}{d}$$

$$\frac{2d-6}{d} = 4 \text{ 에서 } d = -3$$

$$a_2 - a_1 = d \text{ 이므로}$$

$$a_2 - a_1 = -3$$

26. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+1)a_n = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} (4n^2+1)(a_n+b_n) = 1 \text{ 에서}$$

$c_n = (n^2+1)a_n, d_n = (4n^2+1)(a_n+b_n)$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1 \text{ 이고}$$

$$a_n = \frac{c_n}{n^2+1}, b_n = \frac{d_n}{4n^2+1} - \frac{c_n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2+1)(a_n+2b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2+1) \left(\frac{2d_n}{4n^2+1} - \frac{c_n}{n^2+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1} \times d_n - \frac{2n^2+1}{n^2+1} \times c_n \right\}$$

$$= 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5$$

27. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$\frac{a_1}{b_1} = 3 \text{ 에서 } \frac{3}{b_1} = 3, b_1 = 1$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = 2 \text{ 에서 } \frac{a_2}{b_2} = -1$$

$$-\frac{4}{1+d} = -1 \text{ 에서 } d = 3$$

$$b_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_k}$$

$$= \frac{6}{n+1} - \frac{6}{n}$$

$$= -\frac{6}{n(n+1)}$$

이므로 $a_n = -\frac{6(3n-2)}{n^2+n} \quad (n \geq 2)$

$$a_n b_n = -\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n} \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n} \right\} = -54$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -54$$

28. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 A_n 의 좌표는 $(0, n)$ 이다.

$$\log_a(x-1) = n \text{ 에서 } x = a^n + 1 \text{ 이므로}$$

점 B_n 의 좌표는 $(a^n + 1, n)$ 이다.

$$\overline{B_n B_{n+1}} = \sqrt{\{(a^{n+1}+1) - (a^n+1)\}^2 + 1} = \sqrt{(a-1)^2 a^{2n} + 1}$$

사각형 $A_n B_n B_{n+1} A_{n+1}$ 은 사다리꼴이므로

$$S_n = \frac{1}{2} \times 1 \times \{(a^n+1) + (a^{n+1}+1)\}$$

$$= \frac{(a+1)a^n + 2}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{B_n B_{n+1}}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(a-1)^2 a^{2n} + 1}}{(a+1)a^n + 2}$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{B_n B_{n+1}}}{S_n} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$\frac{3}{2a+2} = 1 \text{ 에서 } a = \frac{1}{2}$$

(ii) $a > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{B_n B_{n+1}}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(a-1)^2 + \frac{1}{a^{2n}}}}{(a+1) + \frac{2}{a^n}}$$

$$= \frac{2|a-1|}{a+1}$$

$$= \frac{2(a-1)}{a+1}$$

$$\frac{2(a-1)}{a+1} = \frac{3}{2a+2} \text{ 에서 } a = \frac{7}{4}$$

(i), (ii)에 의하여 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

29. [출제의도] 이차부등식의 해를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

x 에 대한 부등식 $x^2 - 4nx - n < 0$ 의 해는

$$2n - \sqrt{4n^2 + n} < x < 2n + \sqrt{4n^2 + n}$$

$$2n < \sqrt{4n^2 + n} < 2n + 1 \text{ 에서}$$

$$-1 < 2n - \sqrt{4n^2 + n} < 0$$

$$4n < 2n + \sqrt{4n^2 + n} < 4n + 1$$

부등식 $x^2 - 4nx - n < 0$ 을 만족시키는 정수 x 는

$$0, 1, 2, \dots, 4n$$

이므로 그 개수는 $4n+1$ 이다.

$$a_n = 4n+1 \text{ 에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{na_n} = \infty \text{ 이다.}$$

$$p \leq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{na_n} - pn) = \infty \text{ 이므로 } p > 0 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{na_n} - pn) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n} - pn)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-p^2)n^2 + n}{\sqrt{4n^2 + n} + pn}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-p^2)n^2 + n}{\sqrt{4n^2 + n} + pn} = q \text{ 이려면}$$

$$4-p^2 = 0 \text{ 에서 } p > 0 \text{ 이므로}$$

$$p = 2$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+2}} = \frac{1}{4}$$

따라서 $100pq = 100 \times 2 \times \frac{1}{4} = 50$

30. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수의 그래프에 대한 문제를 해결한다.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1} \text{ 에서}$$

$$|x| < 1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = -x$$

$$|x| = 1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x^{2n} - 1)}{x^{2n} + 1} = 0$$

$$|x| > 1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - x\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = x$$

그러므로

$$f(x) = \begin{cases} -x & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| = 1) \\ x & (|x| > 1) \end{cases}$$

자연수 k 에 대하여

(i) $2k-2 \leq |x| < 2k-1$ 일 때

$$\left| \frac{x}{2k-1} \right| < 1 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = (2k-1) \times \left(-\frac{x}{2k-1} \right) = -x$$

(ii) $|x| = 2k-1$ 일 때

$$\left| \frac{x}{2k-1} \right| = 1 \text{ 이므로}$$

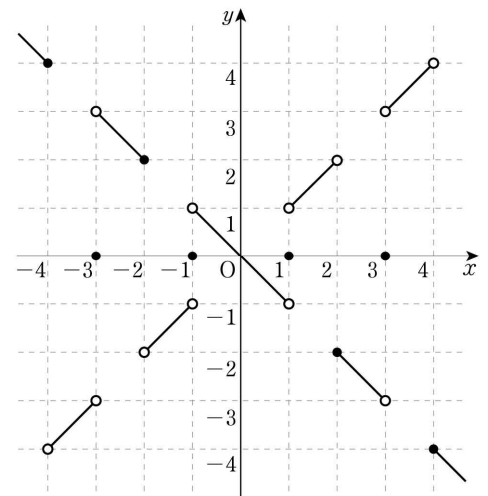
$$g(x) = (2k-1) \times 0 = 0$$

(iii) $2k-1 < |x| < 2k$ 일 때

$$\left| \frac{x}{2k-1} \right| > 1 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = (2k-1) \times \left(\frac{x}{2k-1} \right) = x$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$t = 2m - 1$ (m 은 정수) 일 때 직선 $y = t$ 는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 만나지 않는다.

따라서 $0 < t < 10$ 인 모든 t 의 값의 합은

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

[기하]

23	⑤	24	①	25	③	26	②	27	④
28	④	29	96	30	100				

23. [출제의도] 타원의 장축의 길이를 계산한다.

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 장축의 길이는
 $2 \times \sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$

24. [출제의도] 포물선의 방정식을 이해하여 포물선의 초점과 준선 사이의 거리를 구한다.

포물선 $x^2 = 8y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 2)$ 이고 준선의 방정식은 $y = -2$ 이다.
 따라서 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는 4이다.

25. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이는 $2a$ 이므로

$2a = 4$ 에서 $a = 2$

점 $F(3, 0)$ 이 쌍곡선의 한 초점이므로

$a^2 + b^2 = 3^2$ 에서

$b^2 = 5, b = \sqrt{5}$

쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선 l 의 방정식은

$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$

$\sqrt{5}x - 2y = 0$

따라서 점 $F(3, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$

26. [출제의도] 포물선의 평행이동을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

$y^2 = 4x + 4y + 4$ 에서

$(y-2)^2 = 4(x+2)$

포물선 $y^2 = 4x + 4y + 4$ 는 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 포물선 $y^2 = 4x + 4y + 4$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 2)$, 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

두 점 A, B 에서 초점까지의 거리는 모두 원의 반지름의 길이인 2이므로 포물선의 정의에 의하여 두 점 A, B 와 준선 사이의 거리는 모두 2이다.

$|a - (-3)| = 2, |c - (-3)| = 2$ 이고

$a \geq -2, c \geq -2$ 이므로

$a = -1, c = -1$

두 점 A, B 는 포물선 $y^2 = 4x + 4y + 4$ 의 축인 직선 $y = 2$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+d}{2} = 2$

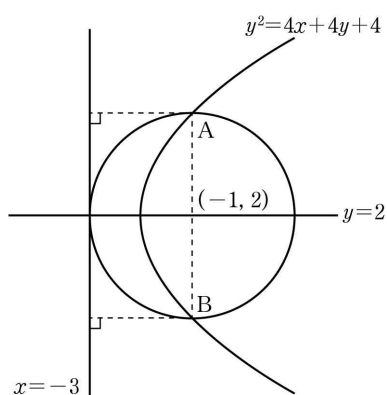
$b+d = 4$

따라서

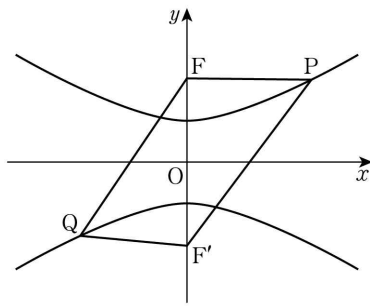
$a+b+c+d = (-1) + (-1) + 4$

$= 2$

[참고]



27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하여 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 주축의 길이는 4이므로

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \dots \textcircled{1}$

$\overline{QF} - \overline{QF'} = 4 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$(\overline{PF'} - \overline{PF}) + (\overline{QF} - \overline{QF'}) = 8$

$(\overline{PF'} - \overline{QF'}) + (\overline{QF} - \overline{PF}) = 8$

$5 + (\overline{QF} - \overline{PF}) = 8$

$\overline{QF} - \overline{PF} = 3$

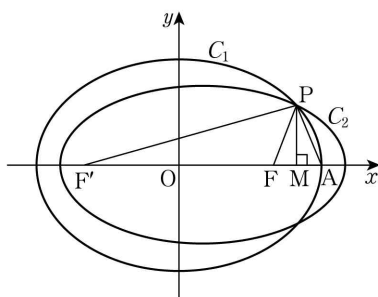
$\overline{PF} = \frac{2}{3}\overline{QF}$ 이므로

$\overline{QF} - \frac{2}{3}\overline{QF} = \frac{1}{3}\overline{QF} = 3$

$\overline{QF} = 9, \overline{PF} = 6$ 이므로

$\overline{PF} + \overline{QF} = 15$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



두 타원 C_1, C_2 의 장축의 길이가 같으므로

$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PA} + \overline{PF'}$

$\overline{PF} = \overline{PA}$

삼각형 PFA가 이등변삼각형이므로

선분 FA의 중점을 M이라 하면

$\angle PMF = 90^\circ$

$\cos(\angle AFP) = \frac{\overline{FM}}{\overline{PF}} = \frac{3}{8}$ 에서

$\overline{FM} = 3k (k > 0)$ 이라 하면 $\overline{PF} = 8k$

타원 C_1 의 장축의 길이가 6이므로

$\overline{PF'} = 6 - 8k$

$\overline{OF} = \overline{OA} - \overline{FA} = \overline{OA} - 2\overline{FM} = 3 - 6k$ 이므로

$\overline{F'M} = \overline{F'O} + \overline{OM} = 2\overline{OF} + \overline{FM}$

$= 2(3 - 6k) + 3k = 6 - 9k$

직각삼각형 PF'M에서 $\overline{PM}^2 = \overline{PF'}^2 - \overline{F'M}^2$ 이고

직각삼각형 PFM에서 $\overline{PM}^2 = \overline{PF}^2 - \overline{FM}^2$ 이므로

$(6 - 8k)^2 - (6 - 9k)^2 = (8k)^2 - (3k)^2$

$k(12 - 17k) = 55k^2, 12k(6k - 1) = 0$

$k > 0$ 이므로 $k = \frac{1}{6}$

따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이는

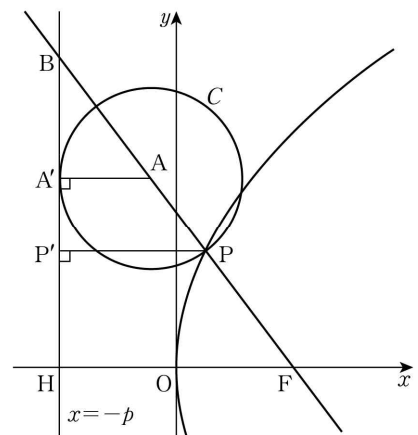
$\overline{PF} + \overline{PA} + \overline{FA} = 8k + 8k + 6k = 22k = \frac{11}{3}$

29. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결한다.

원 C 의 중심을 A라 하자.

세 점 A, P, F에서 포물선의 준선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', P', H라 하자.

직선 FP가 준선 $x = -p$ 와 만나는 점을 B라 하자.



원 C 의 반지름의 길이가 3이므로

$\overline{AA'} = 3, \overline{AP} = 3$

직선 l 의 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 이므로

$\frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}} = \frac{4}{3}$, 즉 $\overline{BA'} = 4, \overline{BA} = 5, \overline{BP} = 8$

두 삼각형 $BA'A, BP'P$ 는 서로 닮음이므로

$\overline{A'A} : \overline{P'P} = \overline{BA} : \overline{BP}, \overline{P'P} = \frac{8 \times 3}{5} = \frac{24}{5}$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{P'P} = \frac{24}{5}$ 이므로

$\overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AP} + \overline{PF} = \frac{64}{5}$

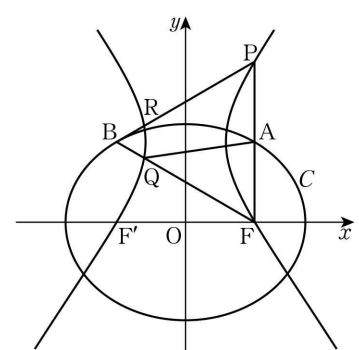
두 삼각형 $BA'A, BHF$ 는 서로 닮음이므로

$\overline{A'A} : \overline{HF} = \overline{BA} : \overline{BF}, \overline{HF} = \frac{\frac{64}{5} \times 3}{5} = \frac{192}{25}$

$2p = \overline{HF} = \frac{192}{25}$ 에서 $p = \frac{96}{25}$

따라서 $25p = 96$

30. [출제의도] 타원과 쌍곡선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



$\overline{AF} = a, \overline{BQ} = b$ 라 하자.

점 A는 선분 PF의 중점이고 조건 (가)에 의하여

$\overline{BF} = \overline{PF} = 2a$

타원 C 의 장축의 길이는

$\overline{BF} + \overline{BF'} = \overline{BF} + \overline{AF} = 2a + a = 3a$

조건 (나)에서

$(\overline{BF} + \overline{BF'}) - 3\overline{BQ} = 3$

$3a - 3b = 3, b = a - 1$

두 점 F, Q는 모두 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{AQ} - \overline{BQ} = \overline{BF} - \overline{AF}$

$\overline{AQ} = (2a - a) + b = 2a - 1$

삼각형 AQF에서

$\overline{QF} = \overline{BF} - \overline{BQ} = 2a - b = a + 1$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AQ}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{QF}^2 - 2 \times \overline{AF} \times \overline{QF} \times \cos 60^\circ$

$(2a - 1)^2 = a^2 + (a + 1)^2 - a(a + 1)$

$3a^2 - 5a = 0$

$a(3a - 5) = 0$

$a > 0$ 이므로 $a = \frac{5}{3}$

따라서 $60 \times \overline{AF} = 60a = 100$