2025학년도 논술우수자전형 모의논술
자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

> 1. 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 순열의 수는
>
> $${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \le n)$$
>
> $$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 \quad (\text{단, } 0! = 1)$$
>
> 2. 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수는
>
> $${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \le n)$$
>
> 3. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
>
> $$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[1] 다음과 같이 문자가 적힌 9장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 일렬로 나열해 보자.

K	W	A	N	G	W	O	O	N

(1) 9장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [5점]

(2) 9개의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, K와 G사이에 3개의 문자가 있도록 하는 경우의 수를 구하시오. [8점]

(3) 9장의 카드를 영어사전처럼 알파벳순으로 모두 나열할 때, KWANGWOON은 몇 번째로 나열되는지 구하시오. [12점]

[2] 이차방정식 $x^2 - nx - (n^3+3n^2+2n) = 0$의 두 근을 a_n, b_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, n은 자연수)

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2+b_n^2\right)$의 값을 구하시오. [10점]

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2024}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$의 값을 구하시오. [10점]

(3) 이차함수 $y = x^2 - nx - n^3 - 3n^2 - 2n$의 최솟값을 n에 대한 식으로 나타내시오. [5점]

■ 출제 의도

[1]

(1) 서로 다른 요소만으로 구성된 배열에 대한 경우의 수와 같은 요소가 일부 포함된 배열에 대한 경우의 수를 구별하는 능력을 평가한다.

(2) 지정된 구성의 문자열을 반드시 포함하는 것을 하나의 문자로 간주하여 경우의 수를 계산하는 능력을 평가한다.

(3) 문자열을 사전식으로 배열했을 때 지정된 문자열의 사전 내에서의 순번을 찾아내는 능력을 평가한다.

[2]

(1) 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 통해 찾은 근의 합과 곱을 활용하여 제곱 형태로 주어진 일반항을 표현하고, 이 일반항을 이용하여 수열의 합을 계산하는 능력을 평가한다.

(2) 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 통해 찾은 근의 합과 곱을 활용하여 분수 형태로 주어진 일반항을 표현하고, 이 일반항을 이용하여 수열의 합을 계산하는 능력을 평가한다.

(3) 이차함수를 완전제곱식의 꼴로 고쳐서 주어진 이차함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

[1]

(1) 한 개씩만 존재하는 3개의 문자와 두 개씩 존재하는 3개의 문자를 이용하여 만들 수 있는 문자열의 개수를 찾을 수 있는 지를 묻는 문항이다.

(2) 지정된 구성의 문자열을 반드시 포함한다는 조건이 부여되었을 때, 이것을 하나의 문자로 간주하여 경우의 수를 계산할 수 있는 지를 묻는 문항이다.

(3) 문자열을 사전식으로 배열했을 때 지정된 문자열의 사전 내에서의 순번을 순차적으로 찾아갈 수 있는 지를 묻는 문항이다.

[2]

(1) 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 통해 찾은 근의 합과 곱을 활용하여 제곱 형태로 주어진 일반항을 표현하고, 이 일반항을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는 묻는 문항이다.

(2) 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 통해 찾은 근의 합과 곱을 활용하여 분수 형태로 주어진 일반항을 표현하고, 이 일반항을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는 묻는 문항이다.

(3) 이차함수를 완전제곱식의 꼴로 고쳐서 주어진 이차함수의 최솟값을 구할 수 있는 지를 묻는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1](1)	9개의 서로 다른 문자를 배열하는 경우의 수 ${}_{9}P_{9}=9!$를 찾으면	2
	같은 문자끼리 자리를 바꾸는 것은 동일한 문자열로 간주하여 나누어주면	3
[1](2)	K□□□G와 G□□□K 배열의 문자열이 있는 경우를 파악하면	2
	서로 다른 문자를 배열하는 경우의 수 ${}_{7}P_{3}$를 찾으면	2
	K□□□G을 하나의 문자라고 생각하고 경우의 수 ${}_{5}P_{5}$를 찾으면	2
	같은 문자끼리 자리를 바꾸는 것은 동일한 문자열로 간주하여 나누어주면	2
[1](3)	KWANGWOON의 문자를 알파벳순으로 나열하면	1
	A로 시작하는 문자열의 총 개수 $5{,}040$을 찾으면	1
	G로 시작하는 문자열의 총 개수 $5{,}040$을 찾으면	1
	KA로 시작하는 문자열의 총 개수 630을 찾으면	1
	KG로 시작하는 문자열의 총 개수 630을 찾으면	1
	KN로 시작하는 문자열의 총 개수 $1{,}260$을 찾으면	1
	KO로 시작하는 문자열의 총 개수 $1{,}260$을 찾으면	1
	KWAG로 시작하는 문자열의 총 개수 30을 찾으면	1
	KWANGN로 시작하는 문자열의 총 개수 3을 찾으면	1
	KWANGO로 시작하는 문자열의 총 개수 6을 찾으면	1
	KWANGWN로 시작하는 문자열의 총 개수 1을 찾으면	1
	KWANGWON로 시작하는 문자열의 총 개수 1을 찾으면	1
[2](1)	$a_n+b_n=n$이고, $a_nb_n=-n^3-3n^2-2n$임을 찾으면	3
	$a_n^2+b_n^2=(a_n+b_n)^2-2a_nb_n=2n^3+7n^2+4n$로 정리하면	3
	$\sum_{n=1}^{5}n^3$, $\sum_{n=1}^{5}n^2$, $\sum_{n=1}^{5}n$을 구하여 $\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2+b_n^2\right)=895$를 찾으면	4
[2](2)	$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{a_n+b_n}{a_nb_n}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}$로 정리하면	4
	$\left(\frac{1}{1+2}-\frac{1}{1+1}\right)+\left(\frac{1}{2+2}-\frac{1}{2+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2024+2}-\frac{1}{2024+1}\right)$를 전개하면	3
	항이 소거되어 $\sum_{n=1}^{2024}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)=-\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2024+2}=-\frac{506}{1013}$임을 보이면	3
[2](3)	$y=x^2-nx-n^3-3n^2-2n=\left(x-\frac{n}{2}\right)^2-n^3-\frac{13}{4}n^2-2n$를 보이면	3
	$x=\frac{n}{2}$일 때, 최솟값 $-n^3-\frac{13}{4}n^2-2n$을 가짐을 보이면	2

■ 예시 답안

[1]

(1) 9개의 서로 다른 문자를 배열하는 경우의 수는 ${}_9P_9 = 9!$이다.

W, N, O가 2개씩 있어서 같은 문자끼리 자리를 바꾸는 것은 동일한 문자열로 간주되기 때문에 이들 문자 각각에 의해 만들어지는 배열의 경우의 수인 ${}_2P_2 = 2!$로 나누어주어야 한다.

따라서 2개씩 같은 문자 3개를 포함하는 9개의 문자를 배열하여 만들어지는 문자열에 대한 경우의 수는 $\dfrac{{}_9P_9}{{}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = 45,360$이다.

(2) K와 G 사이에 3개의 문자가 있는 경우는 K□□□G와 G□□□K 배열의 문자열이 있는 경우이고, 각 경우의 수는 동일하다.

(i) K□□□G인 경우 W, W, N, N, O, O, A를 서로 다른 문자라고 생각하고, 그 중에서 3개를 선택하여 K와 G사이에 배치하는 경우의 수는 ${}_7P_3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = 210$이다.

그 다음에 K□□□G을 하나의 문자라고 생각하고, 나머지 4개의 문자와 합쳐 총 5(=1+4)개의 문자를 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_5 = 5! = 120$이다.

그런데, W, W, N, N, O, O, A는 서로 다른 문자가 아니고, W, N, O가 각각 2개씩 있다.

따라서, 앞에서 구한 결과에서 같은 문자끼리 자리를 바꾸는 것은 동일한 문자열로 간주되기 때문에 ${}_2P_2 = 2! = 2$로 나누어주어야 한다.

그러므로, 구하고자 하는 경우의 수는 $\dfrac{{}_7P_3 \times {}_5P_5}{{}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{210 \times 120}{2! \times 2! \times 2!} = 3,150$이다.

(ii) G□□□K인 경우도 같은 방법으로 경우의 수는 3,150이다.

그러므로, K와 G사이에 3개의 문자가 있는 경우의 수는 6,300(= 2×3,150)이다.

(3) KWANGWOON의 문자를 알파벳순으로 나열하면 A,G,K,N,N,O,O,W,W와 같다.

A로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_8P_8}{{}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5,040$

G로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_8P_8}{{}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5,040$

KA로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_7P_7}{{}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$

KG로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_7P_7}{{}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$

KN로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_7P_7}{{}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{7!}{2! \times 2!} = 1,260$

KO로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_7P_7}{{}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{7!}{2! \times 2!} = 1,260$

KWAG로 시작하는 문자열의 총 개수: $\dfrac{{}_5P_5}{{}_2P_2 \times {}_2P_2} = \dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$

KWANGN로 시작하는 문자열의 총 개수: $\frac{{}_3P_3}{{}_2P_2} = \frac{3!}{2!} = 3$

KWANGO로 시작하는 문자열의 총 개수: ${}_3P_3 = 3! = 6$

KWANGWN로 시작하는 문자열의 총 개수: $\frac{{}_2P_2}{{}_2P_2} = \frac{2!}{2!} = 1$

KWANGWON로 시작하는 문자열의 총 개수: ${}_1P_1 = 1! = 1$

KWANGWOON의 순서$= 5040 \times 2 + 630 \times 2 + 1260 \times 2 + 30 + 3 + 6 + 1 + 1 + 1 = (5040 + 630 + 1260) \times 2 + 42$
$= 13902$

[2]

(1) 이차방정식 $x^2 - nx - n^3 - 3n^2 - 2n = 0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n + b_n = n$이고, $a_n b_n = -n^3 - 3n^2 - 2n$이다.

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n \\ &= n^2 - 2(-n^3 - 3n^2 - 2n) \\ &= 2n^3 + 7n^2 + 4n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{5} (a_n^2 + b_n^2) &= \sum_{n=1}^{5} (2n^3 + 7n^2 + 4n) \\ &= 2\sum_{n=1}^{5} n^3 + 7\sum_{n=1}^{5} n^2 + 4\sum_{n=1}^{5} n \\ &= 2 \times \left\{ \frac{5(5+1)}{2} \right\}^2 + 7 \times \frac{5(5+1)(2 \times 5 + 1)}{6} + 4 \times \frac{5(5+1)}{2} \\ &= 450 + 385 + 60 = 895 \end{aligned}$$

(2) 이차방정식 $x^2 - nx - n^3 - 3n^2 - 2n = 0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n + b_n = n$이고, $a_n b_n = -n^3 - 3n^2 - 2n$이다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} &= \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} \\ &= \frac{n}{-n^3 - 3n^2 - 2n} = \frac{n}{-n(n^2 + 3n + 2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2024} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \sum_{n=1}^{2024} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2+2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2024+2} - \frac{1}{2024+1} \right) \\ &= -\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2024+2} = \frac{1}{2026} - \frac{1}{2} = \frac{1-1013}{2026} = -\frac{1012}{2026} \\ &= -\frac{506}{1013} \end{aligned}$$

(3) $y = x^2 - nx - n^3 - 3n^2 - 2n$

$= x^2 - 2\times\frac{n}{2}x + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 - n^3 - 3n^2 - 2n$

$= \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}n^2 - n^3 - \frac{12}{4}n^2 - 2n$

$= \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - n^3 - \frac{13}{4}n^2 - 2n$

그러므로, $x = \frac{n}{2}$일 때, 최솟값은 $-n^3 - \frac{13}{4}n^2 - 2n$이다.