# 개념원리® 수학 Ⅱ

## 정답과 풀이

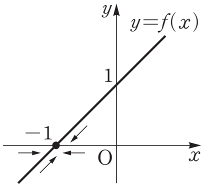
# 개념원리 익히기 · 확인체크

## Ⅰ. 함수의 극한과 연속

### 1

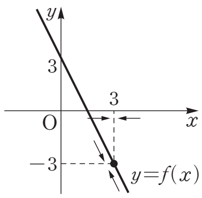
(1) $f(x)=x+1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 $-1$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to -1}(x+1)=0$



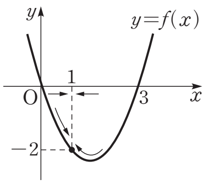

(2) $f(x)=-2x+3$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $-3$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 3}(-2x+3)=-3$



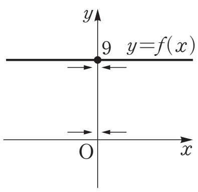

(3) $f(x)=x^2-3x$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $-2$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1}(x^2-3x)=-2$




(4) $f(x)=9$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 항상 9이므로

$\lim_{x \to 0}9=9$

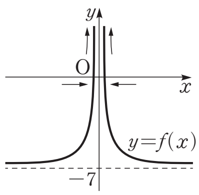



답 (1) **0** (2) **−3** (3) **−2** (4) **9**

### 2

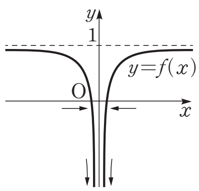
(1) $f(x)=\frac{1}{x^2}-7$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}-7\right)=\infty$




(2) $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty$

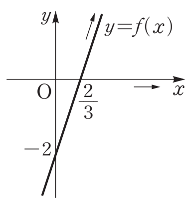



답 (1) **∞** (2) **−∞**

### 3

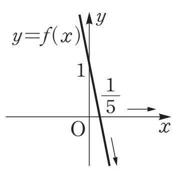
(1) $f(x)=3x-2$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x \to \infty}(3x-2)=\infty$

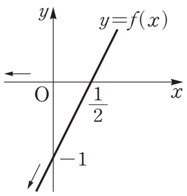



(2) $f(x)=-5x+1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x \to \infty}(-5x+1)=-\infty$

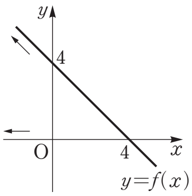


(3) $f(x)=2x-1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로




$\lim_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty$

(4) $f(x)=-x+4$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

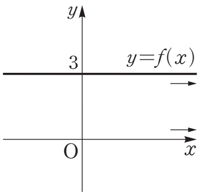



$\lim_{x\to-\infty}(-x+4)=\infty$

**답** (1) $\infty$ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) $\infty$

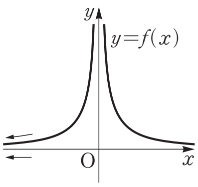
## 4

(1) $f(x)=3$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 항상 3이므로




$\lim_{x\to\infty}3=3$

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로




$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

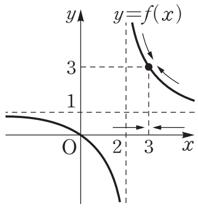
**답** (1) **3** (2) **0**

## 5

(1) $f(x)=\frac{x}{x-2}$로 놓으면

$$f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{(x-2)+2}{x-2}=1+\frac{2}{x-2}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로



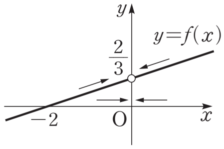

$\lim_{x\to3}\frac{x}{x-2}=3$

(2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{3x}$로 놓으면

$x\neq0$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{3x}=\frac{x+2}{3}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\frac{2}{3}$에 한없이 가까워지므로



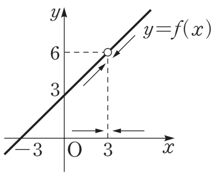

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{3x}=\frac{2}{3}$

(3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$로 놓으면

$x\neq3$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$
$$=x+3$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 6에 한없이 가까워지므로



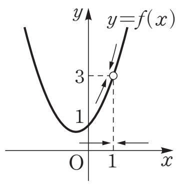

$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

(4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$로 놓으면

$x\neq1$일 때,

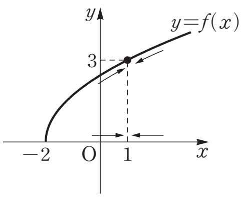
$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=x^2+x+1$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로



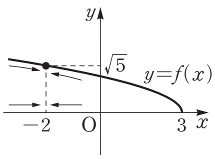

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

(5) $f(x)=\sqrt{3x+6}$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로




$$\lim_{x\to 1}\sqrt{3x+6}=3$$

(6) $f(x)=\sqrt{-x+3}$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 $-2$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\sqrt{5}$에 한없이 가까워지므로

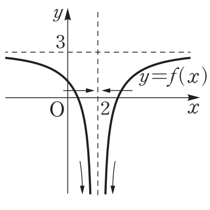



$$\lim_{x\to -2}\sqrt{-x+3}=\sqrt{5}$$

답 (1) **3** (2) $\mathbf{\frac{2}{3}}$ (3) **6** (4) **3** (5) **3** (6) $\mathbf{\sqrt{5}}$

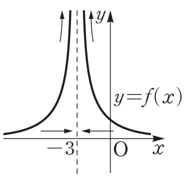
## 6

(1) $f(x)=3-\dfrac{1}{(x-2)^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



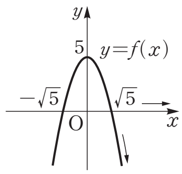

$$\lim_{x\to 2}\left\{3-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}=-\infty$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x+3|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 $-3$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로



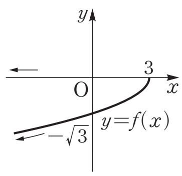

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{|x+3|}=\infty$$

(3) $f(x)=5-x^2$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로




$$\lim_{x\to\infty}(5-x^2)=-\infty$$

(4) $f(x)=-\sqrt{3-x}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

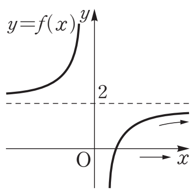



$$\lim_{x\to -\infty}(-\sqrt{3-x})=-\infty$$

답 (1) $\mathbf{-\infty}$ (2) $\mathbf{\infty}$ (3) $\mathbf{-\infty}$ (4) $\mathbf{-\infty}$

## 7

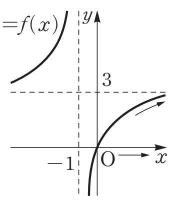
(1) $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로




$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

(2) $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$로 놓으면

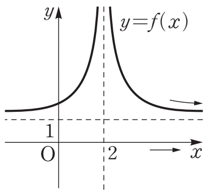
$$f(x)=\frac{3(x+1)-3}{x+1}$$
$$=3-\frac{3}{x+1}$$




함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

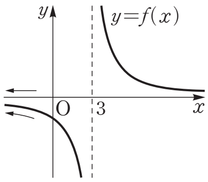
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}=3$$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{|x-2|}+1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로



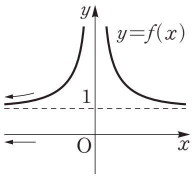

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{|x-2|}+1\right)=1$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로



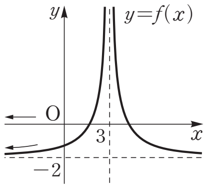

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-3}=0$$

(5) $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로




$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

(6) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}-2$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 $-2$에 한없이 가까워지므로




$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{1}{(x-3)^2}-2\right\}=-2$$

답 (1) **2** (2) **3** (3) **1** (4) **0** (5) **1** (6) $\mathbf{-2}$

## 8

(1) $x$의 값이 3보다 크면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)=0$$

(2) $x$의 값이 4보다 작으면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to4-}f(x)=3$$

(3) $x$의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=1$$

$x$의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)=1$$

즉, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=1$$

(4) $x$의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)=2$$

$x$의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to2-}f(x)=2$$

즉, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to2}f(x)=2$$

(5) $x$의 값이 $-1$보다 크면서 $-1$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=2$$

$x$의 값이 $-1$보다 작으면서 $-1$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $-1$에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=-1$$

즉, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$는 존재하지 않는다.

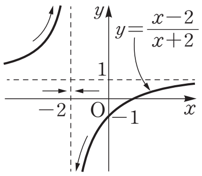
답 (1) **0** (2) **3** (3) **1** (4) **2**
(5) **존재하지 않는다.**

## 9

(1) $x=-2$에서의 우극한과 좌극한을 각각 구하면

$$\lim_{x\to-2+}\frac{x-2}{x+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x-2}{x+2}=\infty$$




따라서

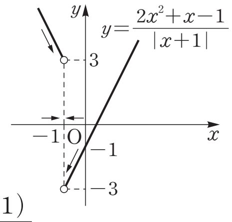
$$\lim_{x\to-2+}\frac{x-2}{x+2}\neq\lim_{x\to-2-}\frac{x-2}{x+2}$$

이므로 $\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{x+2}$ 는 존재하지 않는다.

(2) $x\to-1+$일 때,

$x>-1$이므로

$|x+1|=x+1$




$$\therefore \lim_{x\to-1+}\frac{2x^2+x-1}{|x+1|}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(2x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(2x-1)=-3$$

$x\to-1-$일 때, $x<-1$이므로

$|x+1|=-(x+1)$

$$\therefore \lim_{x\to-1-}\frac{2x^2+x-1}{|x+1|}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{(2x-1)(x+1)}{-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1-}(1-2x)=3$$

즉, $\lim_{x\to-1+}\frac{2x^2+x-1}{|x+1|}\neq\lim_{x\to-1-}\frac{2x^2+x-1}{|x+1|}$이므로 $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{|x+1|}$은 존재하지 않는다.

(3) $-1<x<0$일 때, $0<x+1<1$이므로

$[x+1]=0$

$$\therefore \lim_{x\to-1+}\frac{[x+1]}{x+1}=0$$

답 (1) **존재하지 않는다.** (2) **존재하지 않는다.** (3) **0**

## 10

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x+k)=-1+k$$

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$0=-1+k$

$\therefore k=1$

답 **1**

## 11

(1) $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$

$=3+(-1)=2$

(2) $\lim_{x\to1}\{f(x)-2g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)-2\lim_{x\to1}g(x)$

$=3-2\cdot(-1)=5$

(3) $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)$

$=3\cdot(-1)=-3$

(4) $\lim_{x\to1}\{g(x)\}^2=\{\lim_{x\to1}g(x)\}^2$

$=(-1)^2=1$

(5) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)}{\lim_{x\to1}g(x)}$

$=\frac{3}{-1}=-3$

(6) $\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+3g(x)}{\{f(x)\}^2}$

$=\frac{2\lim_{x\to1}f(x)+3\lim_{x\to1}g(x)}{\{\lim_{x\to1}f(x)\}^2}$

$=\frac{2\cdot3+3\cdot(-1)}{3^2}$

$=\frac{1}{3}$

답 (1) **2** (2) **5** (3) **−3** (4) **1** (5) **−3** (6) $\mathbf{\frac{1}{3}}$

## 12

(1) $\lim_{x\to-1}x^3=(-1)^3=-1$

(2) $\lim_{x\to0}(x^2-1)=0-1=-1$

(3) $\lim_{x\to2}(x^3+x^2-3)=2^3+2^2-3=9$

(4) $\lim_{x\to-2}x(2x+3)=-2\{2\cdot(-2)+3\}=2$

(5) $\lim_{x\to1}(x-2)(x^2+5)=(1-2)(1^2+5)=-6$

(6) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x+7}{5-x}=\frac{\lim_{x\to3}(x^2-2x+7)}{\lim_{x\to3}(5-x)}$

$=\frac{3^2-2\cdot3+7}{5-3}=5$

답 (1) **$-1$** (2) **$-1$** (3) **9** (4) **2** (5) **$-6$** (6) **5**

## 13

주어진 식의 분모, 분자를 각각 $x^2$으로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{3f(x)}{x^2}}{3-\frac{2f(x)}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to0}1+3\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}{\lim_{x\to0}3-2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{1+3a}{3-2a}=-2$$

즉, $1+3a=-2(3-2a)$에서

$a=7$ 답 **7**

## 14

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x+2f(x)}{2x^2+3f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{2f(x)}{x}}{2x+\frac{3f(x)}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}1+2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{2\lim_{x\to0}x+3\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{1+2\cdot1}{0+3\cdot1}=1$$

답 **1**

## 15

(1) $\lim_{x\to0}\frac{6x+5x^2}{2x-3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x(6+5x)}{x(2-3x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{6+5x}{2-3x}=3$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x^3+3x^2-x-3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(x^2-1)}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{2x-1}{x^2-1}=-\frac{7}{8}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$

(5) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=4$

(6) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}=1$

답 (1) **3** (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) $\mathbf{-\frac{7}{8}}$ (4) **2** (5) **4** (6) **1**

## 16

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7}{4x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\frac{2}{x}-1}=-\infty$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$

$=\frac{1}{2}$

(5) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t-1}{\sqrt{t^2+2t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}}=-3$

(6) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+2t}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2-1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+2}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}$

$=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (2) $\mathbf{0}$ (3) $\mathbf{-\infty}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (5) $\mathbf{-3}$ (6) $\mathbf{\frac{2}{3}}$

## 17

(1) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2-2x+4)$

$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$

$=-\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}$

$=\frac{3}{4}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$=-1$

(4) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-7x+10}+x)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+7t+10}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+7t+10}-t)(\sqrt{t^2+7t+10}+t)}{\sqrt{t^2+7t+10}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{7t+10}{\sqrt{t^2+7t+10}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{7+\frac{10}{t}}{\sqrt{1+\frac{7}{t}+\frac{10}{t^2}}+1}$

$=\frac{7}{2}$

답 (1) $\mathbf{-\infty}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{4}}$ (3) $\mathbf{-1}$ (4) $\mathbf{\frac{7}{2}}$

## 18

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=2$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3}-(\sqrt{3-x})}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3-\sqrt{3x}}=\frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+3}}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{4x+3}-2\sqrt{x})}{2\sqrt{4x+3}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{4x+3}-2\sqrt{x})(\sqrt{4x+3}+2\sqrt{x})}{2\sqrt{4x+3}(\sqrt{4x+3}+2\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{8x+6+4\sqrt{4x^2+3x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{8+\frac{6}{x}+4\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$

$=\frac{3}{8+8}=\frac{3}{16}$

(4) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{\sqrt{9x^2+3}}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}t^2\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{9t^2+3}}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{9t^2+3}-3t)}{3\sqrt{9t^2+3}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{9t^2+3}-3t)(\sqrt{9t^2+3}+3t)}{3\sqrt{9t^2+3}(\sqrt{9t^2+3}+3t)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{3(9t^2+3+3t\sqrt{9t^2+3})}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{9t^2+3+\sqrt{81t^4+27t^2}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{9+\frac{3}{t^2}+\sqrt{81+\frac{27}{t^2}}}$

$=\frac{1}{9+9}=\frac{1}{18}$

답 (1) **2** (2) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (3) $\mathbf{\frac{3}{16}}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{18}}$

## 19

(1) $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2-a)=0$이므로

$4-a=0$

$\therefore a=4$

$\therefore b=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

(2) $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1-a+b=0\quad\therefore b=a-1$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)$

$=a-2$

$a-2=2$이므로 $a=4$, $b=3$

(3) $x\to2$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$이므로

$a+b=0\quad\therefore b=-a$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x-2}{a\sqrt{x-1}+b}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{a\sqrt{x-1}-a}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{a(\sqrt{x-1}-1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{a(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}+1}{a}=\frac{2}{a}$

$\frac{2}{a}=1$이므로 $a=2$, $b=-2$

답 (1) $\mathbf{a=4,\ b=4}$ (2) $\mathbf{a=4,\ b=3}$ (3) $\mathbf{a=2,\ b=-2}$

## 20

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x+1)}=-1$에서

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ ($a$는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+a)}{x+1}=1+a=-1$$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{2(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}2(x-1)=2$$ 답 2

## 21

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 2, 이차항의 계수가 2인 다항함수임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=2x^3+2x^2+ax$ ($a$는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+2x+a)=-3$$

$\therefore a=-3$

$\therefore f(x)=2x^3+2x^2-3x$

답 $\boldsymbol{f(x)=2x^3+2x^2-3x}$

## 22

$\lim_{x\to1}(2x+1)=3$, $\lim_{x\to1}(x^2+2)=3$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}h(x)=3$ 답 3

## 23

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{x+2}=5$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+7}{x^2}=5$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ 답 5

## 24

$2x+1<f(x)<2x+5$의 각 변을 세제곱하면

$(2x+1)^3<\{f(x)\}^3<(2x+5)^3$

$x^3+1>0$이므로 각 변을 $x^3+1$로 나누면

$$\frac{(2x+1)^3}{x^3+1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}<\frac{(2x+5)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3}{x^3+1}=8$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^3}{x^3+1}=8$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=8$ 답 8

## 25

직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t}=t$이므로 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$y-t^2=-\frac{1}{t}(x-t)$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=t^2+1$이므로

$f(t)=t^2+1$

$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}(t^2+1)=1$ 답 1

## 26

(1) **$f(1)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.**

(2) $\lim_{x\to1+}f(x)=3$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 **$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.**

(3) $f(1)=1$이고 $\lim_{x\to1}f(x)=2$이므로

**$\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$**

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

답 풀이 참조

## 27

(1) $f(2)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) $x=2$일 때, 함숫값 $f(2)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

답 (1) **연속** (2) **불연속**

## 28

답 (1) $\mathbf{[-2,\ 1]}$ (2) $\mathbf{(-1,\ 2)}$ (3) $\mathbf{[0,\ 2)}$
(4) $\mathbf{(1,\ 3]}$ (5) $\mathbf{(-\infty,\ -2)}$ (6) $\mathbf{[3,\ \infty)}$

## 29

(1) 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $(-\infty,\ \infty)$

(2) 주어진 함수의 정의역은 $x-1\ge0$, 즉 $x\ge1$인 $x$의 값들의 집합이므로 $[1,\ \infty)$

답 (1) $\mathbf{(-\infty,\ \infty)}$ (2) $\mathbf{[1,\ \infty)}$

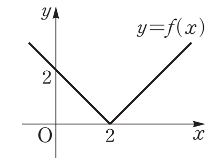
## 30

(1) (i) $x>2$일 때,

$f(x)=x-2$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)$

$=\lim_{x\to2+}(x-2)=0$




(ii) $x<2$일 때,

$f(x)=-(x-2)=-x+2$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+2)=0$

(iii) $x=2$일 때,

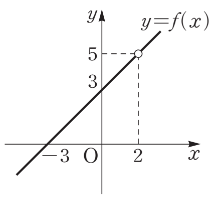
$f(2)=|2-2|=0$

(i)~(iii)에서 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) $x\ne2$일 때,

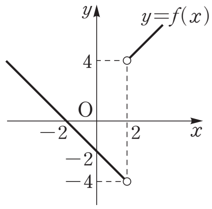
$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}$$
$$=\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$
$$=x+3$$




$x=2$일 때, 함숫값 $f(2)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(3) (i) $x>2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}$$
$$=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$=x+2$$




(ii) $x<2$일 때,

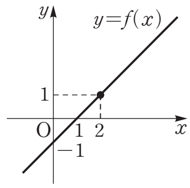
$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}=\frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)}$$
$$=-x-2$$

(iii) $x=2$일 때, 함숫값 $f(2)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(4) $x\ne2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-2}$$
$$=\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$$
$$=x-1$$




(i) $x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=1$

(ii) $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x-1)=1$

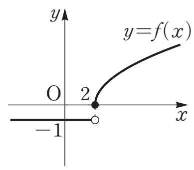
(i), (ii)에서 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(5) $\lim_{x\to2+}f(x)=0$,

$\lim_{x\to2-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)\ne\lim_{x\to2-}f(x)$




따라서 극한값 $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

답 (1) **연속** (2) **불연속** (3) **불연속**
(4) **연속** (5) **불연속**

## 31

$x=1$, $x=2$, $x=3$에서 함수 $f(x)$의 연속성을 조사한다.

(i) $x\to1$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to1+}f(x)=3$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)\ne\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=4$

$x\to 2$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=3$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $x=3$에서의 함숫값은 $f(3)=4$

$x\to 3$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=4$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)=4$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

즉, $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(i)~(iii)에서 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로

$a=1$

또, $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로 $b=2$

$\therefore ab=1\cdot2=2$ **답 2**

## 32

ㄱ. $x=0$에서의 함숫값은

$f(0)+g(0)=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$x\to 0$일 때의 극한값은

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0+}g(x)=1-1=0$$

$$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)=-1+1=0$$

따라서 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$

즉, $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $x=0$에서의 함숫값은

$f(0)g(0)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

$x\to 0$일 때의 극한값은

$$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{x\to0+}g(x)=1\cdot(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{x\to0-}g(x)=(-1)\cdot1=-1$$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

즉, $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $x\to 0+$일 때 $f(x)=1$이고, $x\to 0-$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=g(1)=-1$

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=g(-1)=1$

따라서 $\lim_{x\to0+}g(f(x))\neq\lim_{x\to0-}g(f(x))$이므로

$g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄹ. $x\to 0+$일 때 $g(x)=-1$이고, $x\to 0-$일 때 $g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(g(x))=f(-1)=-1$

$\lim_{x\to0-}f(g(x))=f(1)=1$

따라서 $\lim_{x\to0+}f(g(x))\neq\lim_{x\to0-}f(g(x))$이므로

$f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

그러므로 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ뿐이다.

**답 ㄱ**

## 33

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2ax+3}{x+1}=b$ ······ ㉠

$x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^2+2ax+3)=0$이므로

$1-2a+3=0$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+3)=2$$

$\therefore a+b=2+2=4$ **답 4**

## 34

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-b}{x-1}=\frac{a-1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+8}-b)=0$이므로

$$3a-b=0 \qquad \therefore b=3a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-3a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x^2+8}-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{a}{3}$$

$\frac{a}{3}=\frac{a-1}{2}$이므로 $2a=3a-3 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=9$

$\therefore b-a=9-3=6$

**답 6**

## 35

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x\geq-15$인 모든 실수 $x$에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+15}-4)(\sqrt{x+15}+4)}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+15}+4}=\frac{1}{8}$$

**답 $\frac{1}{8}$**

## 36

$x\neq-1$, $x\neq2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^4+ax+b}{x^2-x-2}=\frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이므로 $x=-1$, $x=2$에서도 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$$

$x\to-1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^4+ax+b)=0$이므로

$$1-a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$$

$x\to2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^4+ax+b)=0$이므로

$$16+2a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=-6$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^4-5x-6}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)(x^2+x+3)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^2+x+3)$$
$$=4+2+3=9$$

**답 9**

## 37

ㄱ. $2f(x)$, $3g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $2f(x)+3g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $f(a)=0$이면 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. $\{f(x)\}^2=f(x)\cdot f(x)$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$도 $x=a$에서 연속이다.

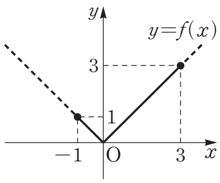
ㄹ. 함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이려면
$\lim_{x \to a} g(f(x))=g(f(a))$이어야 한다.
즉, 함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 연속이어야 한다는 조건이 더 필요하다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

**답 ㄱ, ㄷ**

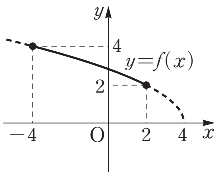
## 38

(1) 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 3, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=\sqrt{8-2x}$는 닫힌구간 $[-4, 2]$에서 연속이고 닫힌구간 $[-4, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

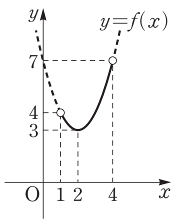



따라서 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 4, $x=2$에서 최솟값 2를 갖는다.

**답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 0**
**(2) 최댓값: 4, 최솟값: 2**

## 39

(1) 함수 $f(x)=x^2-4x+7$은 열린구간 $(1, 4)$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

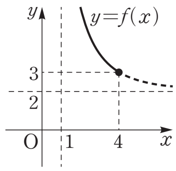



따라서 $f(x)$는 최댓값은 없고, $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다.

(2) 반닫힌 구간 $(1, 4]$에서 함수

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $f(x)$는 최댓값은 없고, $x=4$에서 최솟값 3을 갖는다.

**답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: 3**
**(2) 최댓값: 없다., 최솟값: 3**

## 40

(1) $f(x)=3x^3-2x^2+1$로 놓으면
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고
$f(-3)=-98<0$, $f(3)=64>0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4+x^3-9x+1$로 놓으면
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고
$f(1)=-6<0$, $f(3)=82>0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

**답 풀이 참조**

## 41

함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이다.
$f(-2)f(-1)<0$, $f(-1)f(0)>0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)>0$, $f(2)f(3)>0$
사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 열린구간 $(-2, 3)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

**답 2개**

## Ⅱ. 미분

### 42

$$(\text{평균변화율})=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$
$$=\frac{(3^2+3+1)-(1^2+1+1)}{2}$$
$$=\frac{10}{2}=5$$
$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(a+\Delta x)^2+(a+\Delta x)+1\}-(a^2+a+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2a\Delta x+\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2a+1)=2a+1$$

즉, $2a+1=5$이므로 $a=2$

**답** **2**

### 43

$$(\text{평균변화율})=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$
$$=\frac{(4^2-4\sqrt{a}+4)-(1^2-\sqrt{a}+4)}{4-1}$$
$$=\frac{15-3\sqrt{a}}{3}$$
$$=5-\sqrt{a}$$

즉, $5-\sqrt{a}=1$이므로 $\sqrt{a}=4$

$\therefore a=16$

**답** **16**

### 44

(1) $(\text{주어진 식})=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h\right\}$

$$=f'(a)\cdot\lim_{h\to 0}h=0$$

(2) $(\text{주어진 식})=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\cdot(-3)$

$$=-3f'(a)=-6$$

(3) (주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{f'(a)+f'(a)\}$$
$$=f'(a)=2$$

(4) (주어진 식)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-f(a+h)+f(a)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot\frac{3}{2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}f'(a)-\frac{1}{2}f'(a)$$
$$=f'(a)=2$$

**답** (1) **0** (2) **−6** (3) **2** (4) **2**

### 45

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)+g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)-f(a+h)+f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot(-2)-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=-2f'(a)-f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=-3f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=9+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$

즉, $9+\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=2$에서 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=-7$

**답** **−7**

## 46

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x-2}{f(x)-f(2)}\cdot(x^2+2x+4)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\cdot(x^2+2x+4)\right\}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}\cdot\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$$
$$=\frac{1}{3}(4+4+4)=4$$

**답 4**

## 47

(주어진 식)
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-2f(2)-xf(2)+2f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-(x-2)f(2)}{x-2}$$
$$=2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(2)}{x-2}$$
$$=2f'(2)-f(2)$$
$$=2\cdot 1-3=-1$$

**답 −1**

## 48

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$ $\quad\therefore f(0)=-1$

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(4)+f(h)+1\}-f(4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)$$

이고 $f'(4)=1$이므로 $f'(0)=1$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2)+f(h)+1\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=1$$

$\therefore f(0)+f'(2)=-1+1=0$

**답 0**

## 49

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1)+f(h)+h\}-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+1$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1$$
$$=f'(0)+1$$

이고 $f'(1)=3$이므로 $f'(0)+1=3$

$\therefore f'(0)=2$

$$\therefore f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3)+f(h)+3h\}-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+3$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3$$
$$=f'(0)+3=2+3=5$$

**답 5**

## 50

$f(x)=x^3-x$로 놓으면 점 $(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x)-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+3)=11$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 11이다.

**답 11**

## 51

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 접하므로 $f(a)=g(a)$ (참)

ㄴ. $x=a$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 직선 $y=g(x)$의 기울기가 같으므로
$f'(a)=g'(a)$ (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(a)-g(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=f'(a)-g'(a)=0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

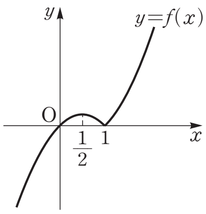
## 52

(1) (i) $f(1)=0$이고

$$\lim_{x\to 1}f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1}x|x-1|=0$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$




따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x|x-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}x=1$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x|x-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{-x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(-x)=-1$$

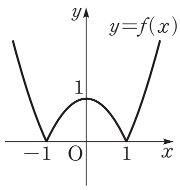
따라서 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) (i) $f(1)=0$이고

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}|x^2-1|$$
$$=0$$

이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$




따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x+1)$$
$$=2$$

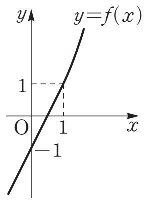
$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\{-(x+1)\}$$
$$=-2$$

따라서 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(3) (i) $f(1)=1$이고

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}x^2$$
$$=1$$
$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x-1)$$
$$=1$$




이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{2x-1-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

따라서 $f'(1)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

답 (1) **연속, 미분가능하지 않다.**
(2) **연속, 미분가능하지 않다.**
(3) **연속, 미분가능하다.**

## 53

① 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로 $f'(3)>0$이다.

② $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재한다.

③ $x=4$, $x=5$에서 불연속이다.

④ 불연속인 점과 뾰족점에서는 미분가능하지 않으므로 $x=2$, $x=4$, $x=5$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 ⑤

## 54

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-4\}-(x-4)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{8(x+h)^2+7(x+h)\}-(8x^2+7x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{8h^2+16xh+7h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(8h+16x+7)$

$=16x+7$

답 (1) $\boldsymbol{f'(x)=0}$ (2) $\boldsymbol{f'(x)=1}$
(3) $\boldsymbol{f'(x)=16x+7}$

## 55

(1) $y'=(10^2)'=0$

(2) $y'=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2+3\right)'=12x^2-x$

(3) $y'=(5x^4+x^3-3x-8)'=20x^3+3x^2-3$

답 (1) $\boldsymbol{y'=0}$ (2) $\boldsymbol{y'=12x^2-x}$
(3) $\boldsymbol{y'=20x^3+3x^2-3}$

## 56

(1) $y'=(x^3+2)'(x^2-1)+(x^3+2)(x^2-1)'$

$=3x^2(x^2-1)+(x^3+2)\cdot 2x$

$=5x^4-3x^2+4x$

(2) $y'=(x^2-1)'(2x+1)(3x-2)$

$+(x^2-1)(2x+1)'(3x-2)$

$+(x^2-1)(2x+1)(3x-2)'$

$=2x(2x+1)(3x-2)$

$+2(x^2-1)(3x-2)+3(x^2-1)(2x+1)$

$=24x^3-3x^2-16x+1$

(3) $y'=12(2x-1)^3(2x-1)'$

$=12(2x-1)^3\cdot 2$

$=24(2x-1)^3$

답 (1) $\boldsymbol{y'=5x^4-3x^2+4x}$
(2) $\boldsymbol{y'=24x^3-3x^2-16x+1}$
(3) $\boldsymbol{y'=24(2x-1)^3}$

## 57

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-7)$에서

$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-7)$

$+(x-1)(x-3)\cdots(x-7)$

$+\cdots+(x-1)(x-2)\cdots(x-6)$

따라서

$f'(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-7)$

$=(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-6)=720$

$f'(5)=(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)(5-7)$

$=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)=48$

이므로 $\frac{f'(1)}{f'(5)}=15$

답 **15**

## 58

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=-4$에서 $2a+b=-4$ …… ㉠

$f'(-1)=8$에서 $-2a+b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$

$f(0)=5$에서 $c=5$

$\therefore a=-3,\ b=2,\ c=5$ **답** $\boldsymbol{a=-3,\ b=2,\ c=5}$

## 59

$f(x)=x^3+ax^2-3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$\therefore f'(1)=3+2a$ …… ㉠

$g(x)=(x^2+1)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

$\therefore g'(1)=2(a-2)+2(3+2a)$

$=6a+2$ …… ㉡

$f'(1)=g'(1)$이므로 ㉠, ㉡에서

$3+2a=6a+2 \quad \therefore a=\dfrac{1}{4}$ **답** $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

## 60

$$(\text{주어진 식})=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

한편, $f(x)=x^4-2x^3+x+4$에서

$f'(x)=4x^3-6x^2+1$이므로 $f'(1)=-1$

$\therefore 2f'(1)=2\cdot(-1)=-2$ **답** $\boldsymbol{-2}$

## 61

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}f'(2)$$

한편, $f(x)=x^3-3x^2+4x+3$에서

$f'(x)=3x^2-6x+4$이므로

$f'(2)=3\cdot2^2-6\cdot2+4=4$

$\therefore \dfrac{1}{12}f'(2)=\dfrac{1}{12}\cdot4=\dfrac{1}{3}$ **답** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

## 62

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$에서 $f'(2)=5$

즉, $f'(2)=12+4a+b=5$에서

$4a+b=-7$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{f(x)-f(1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{3}{f'(1)}$$

$\dfrac{3}{f'(1)}=-\dfrac{3}{2}$이므로 $f'(1)=-2$

즉, $f'(1)=3+2a+b=-2$에서

$2a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-3$

$\therefore a+b=-4$ **답** $\boldsymbol{-4}$

## 63

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=4$에서 $f'(1)=4$

즉, $f'(1)=3+2a+b=4$에서

$2a+b=1$ …… ㉠

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}$$

$$=-f'(-2)=-1$$

에서 $f'(-2)=1$

즉, $f'(-2)=12-4a+b=1$에서

$4a-b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$이므로

$f(1)=1+2-3+1=1$ **답** $\boldsymbol{1}$

## 64

$f(x)=x^{10}+x$로 놓으면 $f(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9+1$이므로

$f'(1)=10+1=11$ **답 11**

## 65

$\lim_{x\to2}\frac{x^n-x^3-x-6}{x-2}=k$에서 $x\to2$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^n-x^3-x-6)=0$이므로

$2^n-8-2-6=0$, $2^n=16=2^4$

$\therefore n=4$

이때 $f(x)=x^4-x^3-x-6$으로 놓으면

$f(2)=0$, $f'(x)=4x^3-3x^2-1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-x^3-x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$
$$=4\cdot2^3-3\cdot2^2-1=19=k$$

$\therefore n+k=4+19=23$ **답 23**

## 66

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서 $4=4a+b$ …… ㉠

또, 미분계수 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{a(x-4)^2+b-(4a+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{a(x-2)(x-6)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}a(x-6)=-4a$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{x^2-(4a+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{x^2-4}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}(x+2)=4$$

즉, $-4a=4$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=8$ **답 $a=-1$, $b=8$**

**다른풀이** $f(x)=\begin{cases}g(x)=a(x-4)^2+b & (x\ge2)\\ h(x)=x^2 & (x<2)\end{cases}$

으로 놓으면 $f'(x)=\begin{cases}g'(x)=2a(x-4) & (x>2)\\ h'(x)=2x & (x<2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 조건은

(i) $g(2)=h(2)$ (ii) $g'(2)=h'(2)$

이므로

$g(2)=h(2)$에서 $a(2-4)^2+b=2^2$

$\therefore 4a+b=4$ …… ㉠

$g'(2)=h'(2)$에서 $2a(2-4)=2\cdot2$

$\therefore a=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=8$

## 67

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서 $2+1=1+a+b$

$\therefore a+b=2$ …… ㉠

또, 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x^3+ax^2+bx)-(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$$
$$=2a+b+3$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(2x^2+1)-(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{2x^2+1-3}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}2(x+1)=4$$

즉, $2a+b+3=4$이므로

$2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore ab=-3$ **답 $-3$**

다른풀이 $f(x)=\begin{cases} g(x)=x^3+ax^2+bx & (x\geq 1) \\ h(x)=2x^2+1 & (x<1) \end{cases}$

로 놓으면

$f'(x)=\begin{cases} g'(x)=3x^2+2ax+b & (x>1) \\ h'(x)=4x & (x<1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건은

(i) $g(1)=h(1)$ (ii) $g'(1)=h'(1)$

이므로

$g(1)=h(1)$에서 $1+a+b=3$

$\therefore a+b=2$ …… ㉠

$g'(1)=h'(1)$에서 $3+2a+b=4$

$\therefore 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore ab=-3$

## 68

다항식 $x^{20}-ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{20}-ax+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+b=0$ $\therefore a-b=1$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$20x^{19}-a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$20-a=0$ $\therefore a=20$, $b=19$

$\therefore a+b=39$ **답 39**

다른풀이 $f(x)=x^{20}-ax+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 조건은

$f(1)=0$, $f'(1)=0$

$f(1)=1-a+b=0$에서 $a-b=1$ …… ㉠

$f'(x)=20x^{19}-a$에서 $f'(1)=20-a=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=20$, $b=19$

$\therefore a+b=20+19=39$

## 69

다항식 $x^{100}-2x^3+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$x^{100}-2x^3+4=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2+4=a+b$ $\therefore a+b=3$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$100x^{99}-6x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$100-6=a$ $\therefore a=94$, $b=-91$

따라서 구하는 나머지는 $94x-91$ **답 $94x-91$**

다른풀이 $f(x)=x^{100}-2x^3+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(x)=100x^{99}-6x^2$에서 $f'(1)=100-6=94$

$f(1)=1-2+4=3$

따라서 구하는 나머지는

$94(x-1)+3=94x-91$

## 70

다항식 $x^4+ax^2+b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4+ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+2x+3$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+a+b=1$ $\therefore a+b=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$4x^3+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4-2a=2$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=-9$ **답 $-9$**

## 71

(1) $f(x)=2x^2+4x-3$으로 놓으면 $f'(x)=4x+4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$f'(1)=4+4=8$

(2) $f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$f'(2)=12-2=10$

**답** (1) **8** (2) **10**

## 72

$f(x)=x^2-4x-1$로 놓으면 $f'(x)=\boxed{2x-4}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\boxed{4})=8-4=\boxed{4}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 $\boxed{4}$이고, 점 $(4,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식이므로

$y-(\boxed{-1})=\boxed{4}(x-\boxed{4})$

$\therefore\ y=\boxed{4x-17}$

**답** 풀이 참조

## 73

$f(x)=3x^2+2x+1$로 놓으면 $f'(x)=\boxed{6x+2}$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2+2a+1)$이라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$f'(a)=\boxed{6a+2}=8,\ 6a=6 \qquad \therefore\ a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ \boxed{6})$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\boxed{6}=\boxed{8}(x-\boxed{1})$

$\therefore\ y=\boxed{8x-2}$

**답** 풀이 참조

## 74

$f(x)=x^3+ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $f(1)=5$

$1+a+b=5 \qquad \therefore\ a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중 $x$좌표가 $-1$인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(-1)=1$

$3-2a+b=1 \qquad \therefore\ -2a+b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=2$

**답** $\boldsymbol{a=2,\ b=2}$

## 75

$f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{2}$로 놓으면 $f'(x)=2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $f(1)=2$

$a+b+\frac{1}{2}=2 \qquad \therefore\ a+b=\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ c)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 $f'(-1)=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ -2a+b=-\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

점 $(-1,\ c)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=c$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=c \qquad \therefore\ c=1$

$\therefore\ abc=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

**답** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

## 76

$f(x)=x^3-2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3+4=7$

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 7이고, 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식이므로

$y-(-2)=7\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=7x+5$

**답** $\boldsymbol{y=7x+5}$

## 77

$f(x)=x^3+ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 $f(2)=4$

$8+4a+2b=4$

$\therefore\ 2a+b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12+4a+b$

그런데 접선의 기울기가 6이므로

$f'(2)=12+4a+b=6$

$\therefore\ 4a+b=-6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=2$

**답** $\boldsymbol{a=-2,\ b=2}$

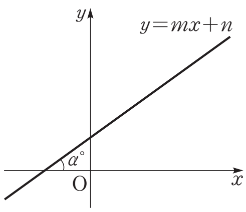
## 78

$f(x)=x^3-x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$
$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 답 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

## 79

$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
곡선 $y=f(x)$의 접선이 $x$축의 양의 방향과 $45^\circ$의 각을 이루므로 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이다.
접점의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로
$f'(a)=2a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$
따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-\frac{1}{4}=1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore\ y=x-\frac{1}{4}$
답 $\boldsymbol{y=x-\frac{1}{4}}$

**참고** 직선 $y=mx+n$ $(m>0)$과 $x$축의 양의 방향이 이루는 각의 크기가 $\alpha^\circ$ $(0^\circ<\alpha^\circ<90^\circ)$일 때, 직선의 기울기 $m=\tan\alpha^\circ$이다.




## 80

$f(x)=-x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=-2x$
구하는 접선이 직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$에 평행하므로 구하는 접선의 기울기는 2이다.
접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+1)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(a)=-2a=2 \qquad \therefore\ a=-1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-0=2\{x-(-1)\}$
$\therefore\ y=2x+2$ 답 $\boldsymbol{y=2x+2}$

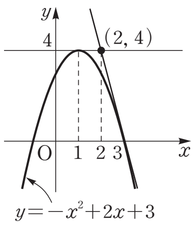
## 81

$f(x)=x^3-11x+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-11$
구하는 접선이 직선 $x-8y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$에 수직이므로 구하는 접선의 기울기는 $-8$이다.
접점의 좌표를 $(a,\ a^3-11a+2)$라 하면 접선의 기울기가 $-8$이므로
$f'(a)=3a^2-11=-8$
$3a^2=3,\ a^2=1$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=1$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 12)$, $(1,\ -8)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-12=-8\{x-(-1)\}$, $y-(-8)=-8(x-1)$
$\therefore\ y=-8x+4$, $y=-8x$
답 $\boldsymbol{y=-8x+4,\ y=-8x}$

## 82

(1) $f(x)=-x^2+2x+3$으로 놓으면
$f'(x)=-2x+2$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=-2t+2$
따라서 기울기가 $-2t+2$이고 점 $(t,\ -t^2+2t+3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-(-t^2+2t+3)=(-2t+2)(x-t)$
$\therefore\ y=(-2t+2)x+t^2+3$ ······ ㉠
이 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로
$4=(-2t+2)\cdot2+t^2+3$
$t^2-4t+3=0$
$(t-1)(t-3)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

이것을 ㉠에 각각 대입하면
구하는 접선의 방정식은
$y=4,\ y=-4x+12$




(2) $f(x)=x^3-2x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2-2$
따라서 기울기가 $3t^2-2$이고 점 $(t,\ t^3-2t)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$
$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$ …… ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=-2t^3,\ t^3=-1$
$\therefore t=-1$
$t=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=x+2$

답 (1) $\boldsymbol{y=4,\ y=-4x+12}$
(2) $\boldsymbol{y=x+2}$

## 83

$f(x)=x^3-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2$
따라서 기울기가 $3t^2$이고 점 $(t,\ t^3-2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-(t^3-2)=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3-2$ …… ㉠
이 직선이 점 $(1,\ -6)$을 지나므로
$-6=3t^2-2t^3-2,\ 2t^3-3t^2-4=0$
$(t-2)(2t^2+t+2)=0$
$\therefore t=2\ \left(\because 2t^2+t+2=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0\right)$
$t=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=12x-18$
이 접선이 점 $(k,\ 30)$을 지나므로
$30=12k-18,\ 12k=48 \quad \therefore k=4$

답 **4**

## 84

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+3$으로 놓으면 $f'(x)=x^3$
접점 P를 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{4}t^4+3\right)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=t^3$
따라서 점 P에서의 접선의 방정식은
$y-\left(\frac{1}{4}t^4+3\right)=t^3(x-t)$
이 직선이 원점을 지나므로
$-\left(\frac{1}{4}t^4+3\right)=t^3\cdot(-t)$
$\frac{3}{4}t^4-3=0,\ t^4-4=0$
$(t^2+2)(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=0$
$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$
따라서 $\mathrm{P}(-\sqrt{2},\ 4)$ 또는 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 4)$이므로 선분 OP의 길이는
$\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

답 $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

## 85

$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
곡선과 직선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면
이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$, 접선의 방정식은
$y-t^3=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3$ …… ㉠
㉠이 $y=ax+2$이므로
$3t^2=a,\ -2t^3=2$
$-2t^3=2$에서 $t^3=-1 \quad \therefore t=-1$
$\therefore a=3\cdot(-1)^2=3$

답 **3**

**다른풀이** $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$
곡선과 직선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=3t^2$

곡선과 직선의 접점은 곡선과 직선의 교점이므로 $y$좌표가 같다. 즉,

$t^3=at+2$ $\cdots\cdots$ ㉠

또한, 접점에서의 접선의 기울기가 $a$이므로

$f'(t)=3t^2=a$ $\quad\therefore a=3t^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $t^3=3t^2\cdot t+2$

$-2t^3=2,\ t^3=-1$ $\quad\therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=3$

## 86

$f(x)=x^3-ax+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-a$

곡선과 직선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-at+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-a$, 접선의 방정식은

$y-(t^3-at+2)=(3t^2-a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-a)x-2t^3+2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 $y=5x$이므로

$3t^2-a=5,\ -2t^3+2=0$

$-2t^3+2=0$에서 $t^3=1$ $\quad\therefore t=1$

$3-a=5$ $\quad\therefore a=-2$ 답 $-2$

**다른풀이** $f(x)=x^3-ax+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-a$

곡선과 직선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-at+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-a$

곡선과 직선의 접점은 곡선과 직선의 교점이므로 $y$좌표가 같다. 즉,

$t^3-at+2=5t$ $\cdots\cdots$ ㉠

또한, 접점에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(t)=3t^2-a=5$ $\quad\therefore a=3t^2-5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3-(3t^2-5)t+2=5t,\ -2t^3+2=0$

$\therefore t=1$

$t=1$을 ㉡에 대입하면 $a=-2$

## 87

(1) $f(x)=x^3+ax,\ g(x)=bx^2+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 모두 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로 $f(-1)=0,\ g(-1)=0$

$-1-a=0$ $\quad\therefore a=-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

두 곡선의 접점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(-1)=g'(-1)$

$3+a=-2b,\ 2=-2b$ ($\because$ ㉠)

$\therefore b=-1$

따라서 ㉡에서 $c=1$

(2) 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고, 접선의 기울기는 $f'(-1)=g'(-1)=2$이므로 두 곡선에 공통으로 접하는 직선의 방정식은

$y-0=2\{x-(-1)\}$

$\therefore y=2x+2$

답 (1) $\boldsymbol{a=-1,\ b=-1,\ c=1}$ (2) $\boldsymbol{y=2x+2}$

## 88

$f(x)=x^2-1,\ g(x)=ax^2\ (a\neq0)$으로 놓으면

$f'(x)=2x,\ g'(x)=2ax$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 교점의 $x$좌표를 $t$라 하면 $f(t)=g(t)$

$t^2-1=at^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 곡선의 교점에서의 각각의 접선이 서로 수직이므로 두 접선의 기울기의 곱이 $-1$이다. 즉,

$f'(t)g'(t)=-1$

$2t\cdot2at=-1,\ 4at^2=-1$

$\therefore at^2=-\frac{1}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^2-1=-\frac{1}{4},\ t^2=\frac{3}{4}$

㉡에서 $\frac{3}{4}a=-\frac{1}{4}$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

## 89

(1) 함수 $f(x)=x^2-6x$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하다. 또한,

$f(1)=f(5)=-5$

이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-6$이므로

$f'(c)=2c-6=0$

$\therefore c=3$

(2) 함수 $f(x)=-x^2+2x+4$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다. 또한,

$f(0)=f(2)=4$

이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+2$이므로

$f'(c)=-2c+2=0$

$\therefore c=1$

(3) 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하다. 또한,

$f(-1)=f(3)=0$

이므로 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2x-5$이므로

$f'(c)=3c^2-2c-5=0$

$(c+1)(3c-5)=0$

$\therefore c=\frac{5}{3}$ ($\because -1<c<3$)

답 (1) **3** (2) **1** (3) $\mathbf{\frac{5}{3}}$

## 90

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$는 닫힌구간 $[-a, a]$에서 롤의 정리의 조건을 만족시키므로 $f(-a)=f(a)$이다. 즉,

$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+2=\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+2$

$\frac{2}{3}a^3-6a=0$, $a^3-9a=0$

$a(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a$는 자연수)

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 롤의 정리의 조건을 만족시킨다.

이때 $f'(x)=x^2+2x-3$이므로

$f'(c)=c^2+2c-3=(c+3)(c-1)=0$

$\therefore c=1$ ($\because -3<c<3$)

답 $\mathbf{c=1, a=3}$

## 91

(1) 함수 $f(x)=x^2-4x+3$은 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{3-(-1)}{2}=2=f'(c)$$

인 $c$가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-4$이므로

$f'(c)=2c-4=2$ $\therefore c=3$

(2) 함수 $f(x)=-x^3+x$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{-6-0}{2}=-3=f'(c)$$

인 $c$가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+1$이므로

$f'(c)=-3c^2+1=-3$, $-3c^2=-4$, $c^2=\frac{4}{3}$

$\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<c<2$)

답 (1) **3** (2) $\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

## 92

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{1-1}{3}=0=f'(c)$$

인 $c$가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2-2x$이므로

$f'(c)=c^2-2c=0$, $c(c-2)=0$

$\therefore c=2$ ($\because 0<c<3$)

따라서 실수 $c$는 2의 1개이다. 답 **1**

## 93

$f(-2)=19,\ f(a)=2a^2-4a+3$

$f'(x)=4x-4$에서

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4=-6$

함수 $f(x)=2x^2-4x+3$에 대하여 닫힌구간 $[-2,\ a]$에서 평균값 정리가 성립하므로

$\frac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}=f'\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{(2a^2-4a+3)-19}{a+2}=-6$

$2a^2-4a-16=-6a-12$

$2a^2+2a-4=0,\ 2(a+2)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>-2)$

**답 1**

## 94

(1) $f(x)=-x^3+3x-4$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-6$ | ↗ | $-2$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 **반닫힌 구간 $(-\infty,\ -1]$과 반닫힌 구간 $[1,\ \infty)$에서 감소**하고, **닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 증가**한다.

(2) $f(x)=x^3-3x^2-45x-6$에서

$f'(x)=3x^2-6x-45=3(x+3)(x-5)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-3$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

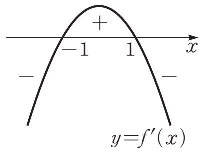
| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $5$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $75$ | ↘ | $-181$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 **반닫힌 구간 $(-\infty,\ -3]$과 반닫힌 구간 $[5,\ \infty)$에서 증가**하고, **닫힌구간 $[-3,\ 5]$에서 감소**한다.

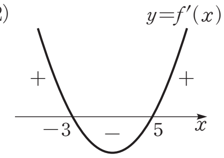
**답 풀이 참조**

**참고** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

(1)




(2)




## 95

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$에서

$f'(x)=x^2+2ax+(5a-4)$

삼차함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(5a-4)=a^2-5a+4\leq 0$

$(a-1)(a-4)\leq 0\qquad \therefore\ 1\leq a\leq 4$

(2) $f(x)=-x^3+ax^2-12x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-12$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-3)\cdot(-12)=a^2-36\leq 0$

$(a+6)(a-6)\leq 0\qquad \therefore\ -6\leq a\leq 6$

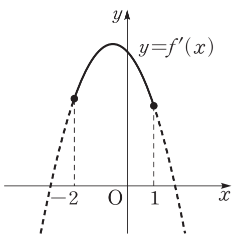
**답** (1) $\mathbf{1\leq a\leq 4}$ (2) $\mathbf{-6\leq a\leq 6}$

## 96

$f(x)=-4x^3+ax^2+36x-1$에서

$f'(x)=-12x^2+2ax+36$

삼차함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 증가하려면 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$f'(-2)=-48-4a+36$

$\geq 0$

$-4a \geq 12 \qquad \therefore a \leq -3$ …… ㉠

$f'(1) = -12 + 2a + 36 \geq 0$

$2a \geq -24 \qquad \therefore a \geq -12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 $a$의 값의 범위는

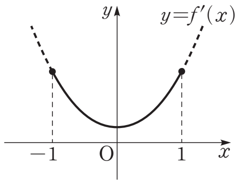
$-12 \leq a \leq -3$ **답 $-12 \leq a \leq -3$**

## 97

$f(x) = x^3 + ax + 1$에서

$f'(x) = 3x^2 + a$

삼차함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$f'(0) = a \geq 0$ ← ($[-1, 1]$에서 $f'(x)$의 최솟값$) \geq 0$

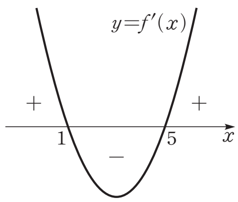
따라서 실수 $a$의 최솟값은 0이다. **답 0**

## 98

$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + (6a-6)x - 1$에서

$f'(x) = 6x^2 - 6ax + (6a-6)$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 닫힌구간 $[1, 5]$이므로 $f'(x) \leq 0$인 $x$의 값의 범위가 $1 \leq x \leq 5$이다. 즉, 이차부등식 $f'(x) \leq 0$의 해가 $1 \leq x \leq 5$이므로




$f'(x) = 6(x-1)(x-5)$

$\quad = 6x^2 - 36x + 30$

따라서 $-6a = -36$, $6a - 6 = 30$이므로

$a = 6$ **답 6**

## 99

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$에서

$f'(x) = \boxed{6}x^2 + (\boxed{-12})x = 6x(x-2)$

$f'(x) = 0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x = 0$ 또는 $x = \boxed{2}$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\boxed{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 3<br>극대 | ↘ | $\boxed{-5}$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3, $x = \boxed{2}$에서 극솟값 $\boxed{-5}$를 갖는다.

**답 6, −12, 2, 2, −5, 2, −5**

## 100

$f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$에서

$f'(x) = \boxed{-4}x^3 + (\boxed{4})x = -4x(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x = -1$ 또는 $x = \boxed{0}$ 또는 $x = 1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | −1 | $\cdots$ | $\boxed{0}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | $\boxed{-}$ | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | −2<br>극대 | ↘ | $\boxed{-3}$<br>극소 | ↗ | −2<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x = -1$과 $x = 1$에서 극댓값 $-2$, $x = \boxed{0}$에서 극솟값 $\boxed{-3}$을(를) 갖는다.

**답 −4, 4, 0, 0, −, −3, 0, −3**

## 101

(1) $f(x) = x^2(3-x) = -x^3 + 3x^2$에서

$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$f'(x) = 0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | 0<br>극소 | ↗ | 4<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극솟값 0, $x = 2$에서 극댓값 4를 갖는다.

(2) $f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 16<br>극대 | ↘ | $-11$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 16, $x=1$에서 극솟값 $-11$을 갖는다.

답 (1) **극댓값: 4, 극솟값: 0**

(2) **극댓값: 16, 극솟값: $-11$**

## 102

$f(x)=-2x^3+15x^2-24x-2$에서

$f'(x)=-6x^2+30x-24$

$=-6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-13$<br>극소 | ↗ | 14<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-13$, $x=4$에서 극댓값 14를 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$14-(-13)=27$ 답 **27**

## 103

(1) $f(x)=3x^4+16x^3+18x^2+5$에서

$f'(x)=12x^3+48x^2+36x=12x(x^2+4x+3)$

$=12x(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-22$<br>극소 | ↗ | 10<br>극대 | ↘ | 5<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $-22$, $x=-1$에서 극댓값 10, $x=0$에서 극솟값 5를 갖는다.

(2) $f(x)=-x^4+4x^3-13$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=0$(중근) 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-13$ | ↗ | 14<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 14를 갖고, 극솟값은 없다.

답 (1) **극댓값: 10, 극솟값: $-22$, 5**

(2) **극댓값: 14, 극솟값: 없다.**

## 104

$f(x)=-3x^4+8x^3+6x^2-24x$에서

$f'(x)=-12x^3+24x^2+12x-24$

$=-12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 19<br>극대 | ↘ | $-13$<br>극소 | ↗ | $-8$<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 19, $x=1$에서 극솟값 $-13$, $x=2$에서 극댓값 $-8$을 가지므로
극댓값의 합은 $19+(-8)=11$, 극솟값의 합은 $-13$

$\therefore M=11,\ m=-13$

$\therefore M-m=11-(-13)=24$ **답 24**

## 105

$f(x)=ax^3+bx^2+3bx+2$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+3b$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-1)=0,\ f'(3)=0$

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $x=-1,\ x=3$이므로

$f'(x)=3a(x+1)(x-3)=3ax^2-6ax-9a$

따라서 $2b=-6a,\ 3b=-9a$이므로

$b=-3a$ …… ㉠

또한, 극댓값과 극솟값의 차가 32이므로

$|f(-1)-f(3)|=32$

$|(-a+b-3b+2)-(27a+9b+9b+2)|=32$

$|-28a-20b|=32$

$\therefore |28a+20b|=32$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$|28a-60a|=32,\ |-32a|=32,\ |32a|=32$

$32a=32$ 또는 $32a=-32$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

㉠에서 $b=-3$

$\therefore ab=1\cdot(-3)=-3$ **답 $-3$**

## 106

$f(x)=x^3+ax^2-24x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-24$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-4$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-4)=0$, 즉

$48-8a-24=0 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-24x+b$

$\quad f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 $x=-4$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $80+b$<br>극대 | ↘ | $-28+b$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 $80+b$,
$x=2$에서 극솟값 $-28+b$를 갖는다.

그런데 $f(x)$가 $x=c$에서 극솟값 2를 가지므로

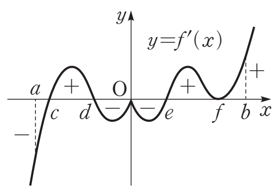
$c=2,\ -28+b=2 \qquad \therefore b=30$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $80+b=80+30=110$

$\therefore d=110$

$\therefore a+b+c+d=3+30+2+110=145$ **답 145**

## 107




닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 위의 그림과 같이 $c,\ d,\ 0,\ e,\ f$라 할 때, $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $a$ | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ | $d$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $f$ | $\cdots$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | | ↘ | 극소 | ↗ | | ↗ | |

따라서 $f(x)$가 극댓값을 갖는 $x$의 값은 $d$의 1개, 극솟값을 갖는 $x$의 값은 $c,\ e$의 2개이다.

$\therefore m=1,\ n=2$

$\therefore m-n=1-2=-1$ **답 $-1$**

**참고** $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 음$(-)$ 그대로이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

마찬가지로 $f'(f)=0$이지만 $x=f$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 양$(+)$ 그대로이므로 $f(x)$는 $x=f$에서 극값을 갖지 않는다.

## 108

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $x=-2$, $x=1$이다. 즉,

$$\begin{aligned} f'(x)&=6(x+2)(x-1)\\ &=6x^2+6x-12 \end{aligned}$$

따라서 $2a=6$, $b=-12$이므로 $a=3$

$\therefore\ f(x)=2x^3+3x^2-12x+c$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $20+c$<br>극대 | $\searrow$ | $-7+c$<br>극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-7+c$를 갖는다. 그런데 극솟값이 $-12$이므로

$-7+c=-12 \qquad \therefore\ c=-5$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-5$이므로

$f(-1)=-2+3+12-5=8$ **답** 8

## 109

(1) $f(x)=-x^3+6x^2-12x+4$에서

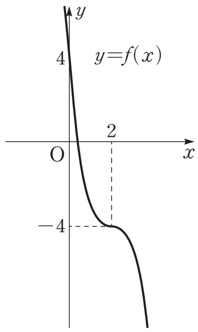
$f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-4$ | $\searrow$ |

$f'(2)=0$이지만 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 기울기가 $0$이다. 또한 $f(0)=4$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(2) $f(x)=-2x^3+3x^2-2$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

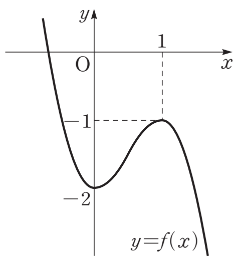
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-2$<br>극소 | $\nearrow$ | $-1$<br>극대 | $\searrow$ |

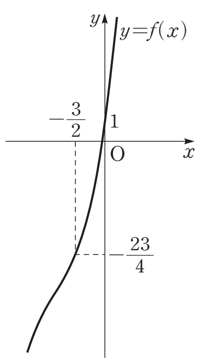
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $-2$, $x=1$에서 극댓값 $-1$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(3) $f(x)=x^3+\dfrac{9}{2}x^2+9x+1$에서

$$f'(x)=3x^2+9x+9=3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $f(x)=3x^4+8x^3+6x^2-2$에서

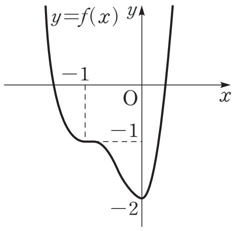
$f'(x)=12x^3+24x^2+12x=12x(x+1)^2$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↘ | $-2$ 극소 | ↗ |




$f'(-1)=0$이지만 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 0이다.

또한 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $-2$를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

**답 풀이 참조**

## 110

$f(x)=x^3+kx^2+3x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 필요충분조건은 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 것이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3\cdot3=k^2-9>0$

$(k+3)(k-3)>0 \qquad \therefore k<-3$ 또는 $k>3$

**답 $k<-3$ 또는 $k>3$**

## 111

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a-1)x^2-3ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-3(a-1)x-3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않을 필요충분조건은 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 갖는 것이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=\{-3(a-1)\}^2-4\cdot3\cdot(-3a)\le0$

$9a^2+18a+9\le0,\ 9(a+1)^2\le0$

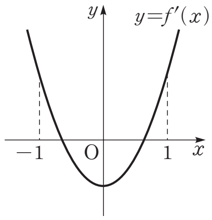
$\therefore a=-1$

**답 $-1$**

## 112

$f(x)=x^3+3kx^2-(3k+1)x-2$에서

$f'(x)=3x^2+6kx-(3k+1)$




삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지면 이차방정식 $f'(x)=0$은 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가지므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$

$\frac{D}{4}=(3k)^2-3\{-(3k+1)\}>0$

$9k^2+9k+3=9\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\therefore k$는 모든 실수 $\cdots\cdots$ ㉠

$y=f'(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=-k$이므로

$-1<-k<1 \qquad \therefore -1<k<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f'(-1)=3-6k-(3k+1)>0$

$\therefore k<\frac{2}{9}$ $\cdots\cdots$ ㉢

$f'(1)=3+6k-(3k+1)>0$

$\therefore k>-\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠~㉣의 공통 범위를 구하면

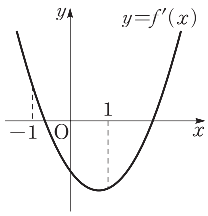
$-\frac{2}{3}<k<\frac{2}{9}$

**답 $-\frac{2}{3}<k<\frac{2}{9}$**

## 113

$f(x)=x^3+2ax^2-4a^2x$에서

$f'(x)=3x^2+4ax-4a^2$




삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값, $x>1$에서 극솟값을 가지면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 실근 한 개, $x>1$에서 실근 한 개를 가지므로

$f'(-1)=3-4a-4a^2>0$

$4a^2+4a-3<0$, $(2a+3)(2a-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$f'(1)=3+4a-4a^2<0$

$4a^2-4a-3>0$, $(2a+1)(2a-3)>0$

$\therefore a<-\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

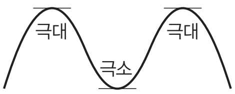
$-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$ **답** $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$

## 114

$f(x)=-x^4+8x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+24x^2+4ax=-4x(x^2-6x-a)$

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-6x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



극댓값 2개, 극솟값 1개

$x=0$이 $x^2-6x-a=0$의 근이 될 수 없으므로

$-a\neq 0$ $\therefore a\neq 0$ ...... ㉠

$x^2-6x-a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(-a)>0$ $\therefore a>-9$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-9<a<0$ 또는 $a>0$ **답** $-9<a<0$ 또는 $a>0$

## 115

먼저 $f(x)$가 극댓값을 가질 조건을 구한 후 그 조건을 부정하면 된다.

$f(x)=x^4+2(a-1)x^2+4ax$에서

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x+4a$

$=4(x+1)(x^2-x+a)$

$f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 $-1$이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=-1$이 $x^2-x+a=0$의 근이 될 수 없으므로

$1+1+a\neq 0$ $\therefore a\neq -2$ ...... ㉠

$x^2-x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-1)^2-4a=1-4a>0$

$4a<1$ $\therefore a<\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\neq -2$이고 $a<\frac{1}{4}$ ...... ㉢

$\left(\text{즉, } a<-2 \text{ 또는 } -2<a<\frac{1}{4}\right)$

㉢은 $f(x)$가 극댓값을 갖기 위한 실수 $a$의 값의 범위이다.

따라서 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않기 위한 실수 $a$의 값의 범위는

$a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$ **답** $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

**다른풀이** 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 (i) 한 실근과 두 허근 또는 (ii) 한 실근과 다른 중근 또는 (iii) 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=4(x+1)(x^2-x+a)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 $x^2-x+a=0$이 두 허근을 가져야 한다. 즉,

$D=1-4a<0$ $\therefore a>\frac{1}{4}$

(ii) ㈀ $x^2-x+a=0$이 $x\neq -1$인 다른 중근을 가지는 경우

$D=1-4a=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

㈁ $x^2-x+a=0$이 $x=-1$을 한 근으로 가지는 경우

$1+1+a=0$ $\therefore a=-2$

(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우는 없다.

(i)~(iii)에서 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않기 위한 실수 $a$의 값의 범위는 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

## 116

(1) $f(x)=-x^3+3x^2+9x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $-6$ 극소 | ↗ | $21$ |

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 21, $x=-1$에서 최솟값 $-6$을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4+4x^3-16x$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $21$ | ↘ | $16$ | ↘ | $-11$ 극소 | ↗ | $16$ |

따라서 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 21, $x=1$에서 최솟값 $-11$을 갖는다.

**답** (1) **최댓값: 21, 최솟값: $-6$**

(2) **최댓값: 21, 최솟값: $-11$**

## 117

(1) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+18$에서

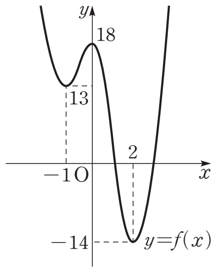
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $13$ 극소 | ↗ | $18$ 극대 | ↘ | $-14$ 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-14$를 갖고, 최댓값은 갖지 않는다.




(2) $f(x)=-x^4+2x^2$에서

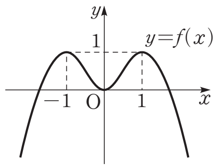
$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $1$ 극대 | ↘ | $0$ 극소 | ↗ | $1$ 극대 | ↘ |

따라서 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 최댓값 1을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.




**답** (1) **최댓값: 없다., 최솟값: $-14$**

(2) **최댓값: 1, 최솟값: 없다.**

## 118

$f(x)=-2x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $a$ | ↗ | $1+a$ 극대 | ↘ | $-4+a$ |

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $1+a$, $x=2$에서 최솟값 $-4+a$를 갖는다.

그런데 $f(x)$의 최솟값이 $-5$이므로

$-4+a=-5 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)$의 최댓값은

$1+a=1+(-1)=0$ **답 0**

## 119

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

$a<0$이므로 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-3a+b$ | $\nearrow$ | $-27a+b$ 극대 | $\searrow$ | $b$ |

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $-27a+b$, $x=4$에서 최솟값 $b$를 갖는다.

그런데 $f(x)$의 최댓값이 3, 최솟값이 $-6$이므로

$-27a+b=3,\ b=-6 \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=-\frac{1}{3}\cdot(-6)=2$ **답 2**

## 120

$f(t)=-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+2t^2+4t$에서

$f'(t)=-t^3-t^2+4t+4=-(t+1)(t-2)(t+2)$

$f'(t)=0$을 만족시키는 $t$의 값은 $t=2$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | $f(2)$ 극대 | $\searrow$ | |

따라서 $f(t)$는 $t=2$에서 최대가 되므로 순이익이 최대가 되려면 A회사의 주식을 구입하여 2년 후에 팔아야 한다. **답 2년 후**

## 121

점 A의 $x$좌표를 $t$라 하면 두 점 $A(t, t^2)$, $B(3, 0)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(t-3)^2+(t^2-0)^2}$

$=\sqrt{(t-3)^2+t^4}$

$f(t)=\overline{AB}^2=(t-3)^2+t^4=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6$

$=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$을 만족시키는 $t$의 값은 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | 5 극소 | $\nearrow$ |

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 5를 가지므로 $\overline{AB}$의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다. $\qquad \therefore m=\sqrt{5}$

$\therefore m^2=5$ **답 5**

## 122

$C(t, 9-t^2)$ $(0<t<3)$이라 하면

$\overline{CD}=2t$, $\overline{AB}=6$, 사다리꼴의 높이가 $9-t^2$이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2)$

$=(t+3)(9-t^2)$

$f'(t)=(9-t^2)+(t+3)\cdot(-2t)$

$=-3(t+3)(t-1)$

$f'(t)=0$을 만족시키는 $t$의 값은 $t=1$ ($\because 0<t<3$)

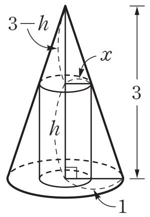
$0<t<3$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | 32 극대 | $\searrow$ | |

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최댓값 32를 가지므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 32이다. **답 32**

## 123

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $x\ (0<x<1)$, 높이를 $h$라 하면




$(3-h) : x=3 : 1$

$3x=3-h$

$\therefore\ h=3-3x$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2 h$

$\quad =\pi x^2(3-3x)$

$\quad =3\pi(-x^3+x^2)$

$V'(x)=3\pi(-3x^2+2x)=-3\pi x(3x-2)$

$V'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=\dfrac{2}{3}$

$(\because\ 0<x<1)$

$0<x<1$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $V(x)$ | | ↗ | $V\left(\frac{2}{3}\right)$ 극대 | ↘ | |

따라서 $V(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}$에서 최대가 되므로 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\dfrac{2}{3}$이다.

**답** $\dfrac{2}{3}$

## 124

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-5$로 놓으면

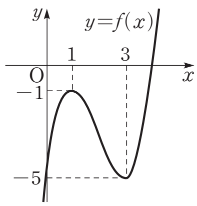
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | −1 극대 | ↘ | −5 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.




(2) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+15$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

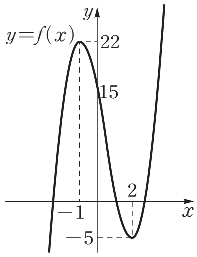
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | −1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 22 극대 | ↘ | −5 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 3이다.




(3) $f(x)=2x^4-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

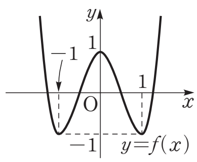
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | −1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | −1 극소 | ↗ | 1 극대 | ↘ | −1 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 4이다.



(4) $f(x)=x^4+4x^3+5$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

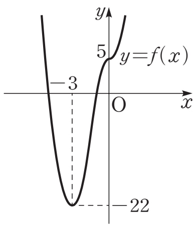
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-3$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-22$ 극소 | $\nearrow$ | $5$ | $\nearrow$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.




답 (1) **1** (2) **3** (3) **4** (4) **2**

참고 (4)에서 $f'(0)=0$이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. 이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 5)$에서의 접선은 $x$축에 평행하다.

## 125

$x^3-3x-k=0$에서 $x^3-3x=k$ ...... ㉠

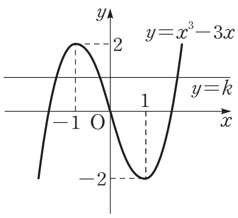
$f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $2$ 극대 | $\searrow$ | $-2$ 극소 | $\nearrow$ |




방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프가

(1) 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위를 구하면 $-2<k<2$

(2) 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값을 구하면 $k=-2$ 또는 $k=2$

(3) 한 점에서만 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위를 구하면 $k<-2$ 또는 $k>2$

답 (1) $\boldsymbol{-2<k<2}$

(2) $\boldsymbol{k=-2}$ **또는** $\boldsymbol{k=2}$

(3) $\boldsymbol{k<-2}$ **또는** $\boldsymbol{k>2}$

참고 (2)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 접한다.

## 126

$3x^4-4x^3-12x^2+15-k=0$에서

$3x^4-4x^3-12x^2+15=k$ ...... ㉠

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+15$로 놓으면

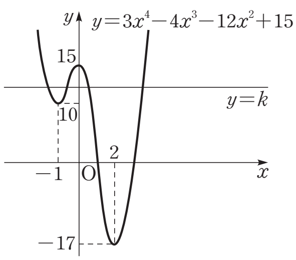
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $10$ 극소 | $\nearrow$ | $15$ 극대 | $\searrow$ | $-17$ 극소 | $\nearrow$ |




방정식 ㉠의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 실근의 개수와 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$

의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위를 구하면

$10<k<15$ **답** $\mathbf{10<k<15}$

## 127

곡선 $y=x^3-10x-4$와 직선 $y=2x+a$의 교점의 개수는 방정식 $x^3-10x-4=2x+a$, 즉

$x^3-12x-4=a$ ...... ㉠

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

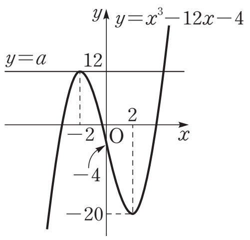
$f(x)=x^3-12x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $12$ 극대 | $\searrow$ | $-20$ 극소 | $\nearrow$ |




방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프가

(1) 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하면 $-20<a<12$

(2) 접하도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하면 $a=-20$ 또는 $a=12$

**답** (1) $\mathbf{-20<a<12}$ (2) $\mathbf{a=-20}$ **또는** $\mathbf{a=12}$

**참고** 곡선 $y=x^3-10x-4$와 직선 $y=2x+a$가 접한다.

$\Longleftrightarrow$ 곡선 $y=x^3-12x-4$와 직선 $y=a$가 접한다.

$\Longleftrightarrow$ 방정식 $x^3-12x-4=a$가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

## 128

$x^3-3x^2-9x+k=0$에서

$-x^3+3x^2+9x=k$ ...... ㉠

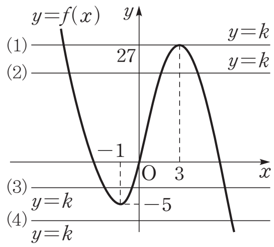
$f(x)=-x^3+3x^2+9x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-5$ 극소 | $\nearrow$ | $27$ 극대 | $\searrow$ |




방정식 ㉠의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같다. 따라서

(1) $y=f(x)$, $y=k$의 그래프가 접하고, 접점이 아닌 다른 교점의 $x$좌표가 음수인 경우이므로 $k=27$

(2) $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 두 개는 서로 다른 양수, 한 개는 음수인 경우이므로 $0<k<27$

(3) $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 두 개는 서로 다른 음수, 한 개는 양수인 경우이므로 $-5<k<0$

(4) $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 한 개뿐이고, 그것이 양수인 경우이므로 $k<-5$

**답** (1) $\mathbf{k=27}$ (2) $\mathbf{0<k<27}$ (3) $\mathbf{-5<k<0}$ (4) $\mathbf{k<-5}$

## 129

$f(x)=2x^3-3x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $a$ 극대 | ↘ | $-1+a$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $a$, $x=1$에서 극솟값 $-1+a$를 갖는다.

$f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$이

(1) 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은

(극댓값)$\times$(극솟값)$<0$이므로

$a(-1+a)<0 \qquad \therefore 0<a<1$

(2) 한 실근과 두 허근을 가질 필요충분조건은

(극댓값)$\times$(극솟값)$>0$이므로

$a(-1+a)>0 \qquad \therefore a<0$ 또는 $a>1$

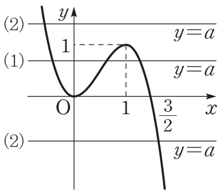
**답** (1) $\boldsymbol{0<a<1}$ (2) $\boldsymbol{a<0}$ **또는** $\boldsymbol{a>1}$

**다른풀이** $2x^3-3x^2+a=0$에서

$-2x^3+3x^2=a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=-2x^3+3x^2$으로 놓으면 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프가




(1) 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $a$의 값의 범위는

$0<a<1$

(2) 한 점에서만 만나도록 하는 실수 $a$의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $a>1$

## 130

$f(x)=16x^3-12x^2-24x-k$로 놓으면

$f'(x)=48x^2-24x-24=24(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $7-k$ 극대 | ↘ | $-20-k$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값 $7-k$, $x=1$에서 극솟값 $-20-k$를 갖는다.

$f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가질 필요충분조건은

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이므로

$(7-k)(-20-k)=0$

$\therefore k=7$ 또는 $k=-20$

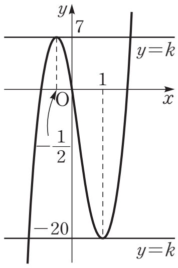
따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$7+(-20)=-13$ **답** $\boldsymbol{-13}$

**다른풀이** $16x^3-12x^2-24x-k=0$에서

$16x^3-12x^2-24x=k$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=16x^3-12x^2-24x$로 놓으면 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 개수와 같다.




두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값은

$k=7$ 또는 $k=-20$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$7+(-20)=-13$

## 131

$f(x)=x^4-2x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1+a$ 극소 | ↗ | $a$ 극대 | ↘ | $-1+a$ 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 최솟값 $-1+a$를 가지므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$f(-1)=-1+a\ge 0$ $\therefore a\ge 1$ **답 $a\ge 1$**

## 132

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다. 즉, $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고,

$h(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2+k>0$임을 보이면 된다.

$h'(x)=4x^3-16x^2+12x=4x(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | ↘ | $k$ 극소 | ↗ | $\frac{5}{3}+k$ 극대 | ↘ | $-9+k$ 극소 | ↗ |

따라서 $h(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $-9+k$를 가지므로 모든 실수 $x$에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면

$h(3)=-9+k>0$ $\therefore k>9$ **답 $k>9$**

## 133

$x^3+9x+a>6x^2+6$에서

$x^3-6x^2+9x+a-6>0$

즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x+a-6$으로 놓고, $x>1$일 때 $f(x)>0$임을 보이면 된다.

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

$x>1$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $a-6$ 극소 | ↗ |

따라서 $x>1$일 때, $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $a-6$을 가지므로 $x>1$일 때 $f(x)>0$이 항상 성립하려면

$f(3)=a-6>0$ $\therefore a>6$ **답 $a>6$**

## 134

$0<x<3$일 때 부등식 $f(x)\ge g(x)$, 즉

$f(x)-g(x)\ge 0$이 항상 성립해야 하므로

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $0<x<3$일 때

$h(x)=(5x^3-10x^2+k)-(5x^2+2)$

$=5x^3-15x^2+k-2\ge 0$

임을 보이면 된다.

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$0<x<3$일 때 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | ↘ | $k-22$ 극소 | ↗ | |

따라서 $0<x<3$일 때, $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $k-22$를 가지므로 $0<x<3$일 때 $h(x)\ge 0$이 항상 성립하려면

$h(2)=k-22\ge 0$ $\therefore k\ge 22$

따라서 실수 $k$의 최솟값은 22이다. **답 22**

## 135

(1) $f(x)=x^3-12x+a$로 놓고, $-2<x<2$일 때 $f(x)>0$임을 보이면 된다.

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-2$ 또는 $x=2$

$-2\le x\le 2$일 때 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $16+a$ | ↘ | $-16+a$ |

$-2<x<2$일 때 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 감소한다.
따라서 $-2\le x\le 2$일 때, $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-16+a$를 가지므로 $-2<x<2$일 때 $f(x)>0$이 항상 성립하려면
$f(2)=-16+a\ge 0 \qquad \therefore a\ge 16$
따라서 실수 $a$의 최솟값은 16이다.

(2) $x\ge 2$일 때 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)\ge 0$이 항상 성립해야 하므로 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $x\ge 2$일 때
$h(x)=(x^3+a)-(x^2+x)=x^3-x^2-x+a\ge 0$
임을 보이면 된다.
$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$
$h'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은
$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
$x\ge 2$일 때 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ |
| $h(x)$ | $a+2$ | $\nearrow$ |

$x>2$일 때 $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 반닫힌 구간 $[2, \infty)$에서 증가한다.
따라서 $x\ge 2$일 때, $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a+2$를 가지므로 $x\ge 2$일 때 $h(x)\ge 0$이 항상 성립하려면
$h(2)=a+2\ge 0 \qquad \therefore a\ge -2$
따라서 실수 $a$의 최솟값은 $-2$이다.

답 (1) **16** (2) **−2**

## 136

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-18t+12,\ a=\frac{dv}{dt}=12t-18$
점 P의 속도가 72이므로 $v=72$에서
$6t^2-18t+12=72,\ 6t^2-18t-60=0$
$6(t+2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=5\ (\because t\ge 0)$
따라서 $t=5$에서의 점 P의 가속도는
$12\cdot 5-18=42$

답 **42**

## 137

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=t^2-7t+6,\ a=\frac{dv}{dt}=2t-7$
점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로
$v=0$에서
$t^2-7t+6=0,\ (t-1)(t-6)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=6$
$0<t<1$일 때 $v>0$, $1<t<6$일 때 $v<0$, $t>6$일 때 $v>0$이므로 점 P는 $t=1$에서 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=6$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.
따라서 $t=6$에서의 점 P의 위치는
$\frac{1}{3}\cdot 6^3-\frac{7}{2}\cdot 6^2+6\cdot 6=-18$
가속도는
$2\cdot 6-7=5$

답 **위치: −18, 가속도: 5**

## 138

로켓이 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로 $x=0$에서
$20t-5t^2=0,\ 5t(4-t)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=4$
따라서 로켓이 다시 지면에 떨어지는 것은 4초 후이다.
$t$초 후의 로켓의 속도를 $v$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=20-10t$
이므로 4초 후의 로켓의 속도는
$20-10\cdot 4=-20(\mathrm{m/s})$

답 **−20 m/s**

## 139

$t$초 후의 공의 속도를 $v$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=50-2at$
최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이고, 걸린 시간은 5초이므로 $v=0$, $t=5$에서
$50-2a\cdot 5=0 \qquad \therefore a=5$
$\therefore x=40+50t-5t^2$
따라서 공이 도달하는 최고 높이는 ← $t=5$에서의 높이
$40+50\cdot 5-5\cdot 5^2=165(\mathrm{m})$

답 **165 m**

## 140

ㄱ. $t=3$에서 점 P의 속도 $v(3)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다. 즉, 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄴ. $t=2$에서 점 P의 속도가 0이고, 속도가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 바꾼다. (거짓)

ㄷ. 시각 $t$에서의 점 P의 가속도 $a$는 시각 $t$에서의 속도 $v$의 순간변화율(미분계수), 즉

$a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$이다. 속도 $v(t)$의 그래프 위의 점 $(4,\ v(4))$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $t=4$에서의 점 P의 가속도는 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. **답** ㄷ

## 141

ㄱ. $t=0$일 때 점 P의 위치가 3이므로 점 P는 수직선 위의 점 3에서 출발한다. (참)

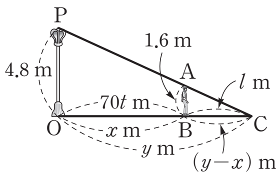
ㄴ. 시각 $t$에서의 점 P의 속도 $v$는 시각 $t$에서의 위치 $x$의 순간변화율(미분계수), 즉 $v=\dfrac{dx}{dt}=x'(t)$이다. 위치 $x(t)$의 그래프 위의 점 $(5,\ x(5))$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $t=5$에서의 점 P의 속도는 양수이다. (거짓)

ㄷ. $0<t<1$에서 위치 $x(t)$의 그래프의 접선의 기울기가 음수이므로 $0<t<1$에서 점 P의 속도는 음수이다. 즉, 점 P는 음의 방향으로 움직인다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. **답** ㄱ

## 142

오른쪽 그림에서 가로등이 지면과 닿는 지점을 원점 O, 사람이 움직이는 방향을 수직선의 양의 방향이라 할 때, $t$분 후의 사람의 위치를 $x$ m, $\overline{OC}=y$ m라 하면




(1) $x=70t$ …… ㉠

이고, △POC∽△ABC이므로

$4.8:1.6=y:(y-x)$, $1.6y=4.8y-4.8x$

$-3.2y=-4.8x$ $\quad\therefore y=\dfrac{3}{2}x$

$\therefore y=\dfrac{3}{2}\cdot 70t=105t$ ($\because$ ㉠)

따라서 그림자의 머리끝이 움직이는 속도는

$\dfrac{dy}{dt}=105(\text{m/min})$

(2) $t$분 후의 그림자의 길이를 $l$ m라 하면

$l=y-x=105t-70t=35t$

$\therefore \dfrac{dl}{dt}=35(\text{m/min})$

**답** (1) **105 m/min** (2) **35 m/min**

## 143

$t$초 후의 직사각형의 가로의 길이, 세로의 길이는 각각

$(9+0.2t)$ cm, $(4+0.3t)$ cm

이므로 직사각형의 넓이를 $S$ $\text{cm}^2$라 하면

$S=(9+0.2t)(4+0.3t)=0.06t^2+3.5t+36$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=0.12t+3.5$

직사각형이 정사각형이 되는 것은

(가로의 길이)=(세로의 길이)일 때이므로

$9+0.2t=4+0.3t$ $\quad\therefore t=50$

따라서 $t=50$일 때, 직사각형의 넓이의 변화율은

$0.12\cdot 50+3.5=9.5(\text{cm}^2/\text{s})$ **답** **9.5 $\text{cm}^2$/s**

## 144

$t$초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$ cm, 높이를 $h$ cm라 하면 $r=20-0.2t$, $h=5+0.5t$

원기둥의 부피를 $V$ $\text{cm}^3$라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(20-0.2t)^2(5+0.5t)$

$=\dfrac{\pi}{50}(100-t)^2(10+t)$

$=\dfrac{\pi}{50}(t^3-190t^2+8000t+100000)$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{50}(3t^2-380t+8000)$

따라서 $t=10$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

$\dfrac{\pi}{50}\cdot(300-3800+8000)=90\pi(\text{cm}^3/\text{s})$

**답** **$90\pi$ $\text{cm}^3$/s**

## Ⅲ. 적분

### 145

ㄱ. $(x^5)'=5x^4$

ㄴ. $(-x^5)'=-5x^4$

ㄷ. $(x^5+100)'=5x^4$

ㄹ. $(x^5+x)'=5x^4+1$

따라서 함수 $5x^4$의 부정적분인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**답 ㄱ, ㄷ**

### 146

(1) $(7x)'=7$이므로 $\int 7\,dx=7x+C$

(2) $(-2x)'=-2$이므로 $\int (-2)dx=-2x+C$

(3) $(3x^2)'=6x$이므로 $\int 6x\,dx=3x^2+C$

(4) $(-x^4)'=-4x^3$이므로 $\int (-4x^3)dx=-x^4+C$

(5) $(-x^3+x)'=-3x^2+1$이므로

$\int (-3x^2+1)dx=-x^3+x+C$

(6) $(x^7+x^2)'=7x^6+2x$이므로

$\int (7x^6+2x)dx=x^7+x^2+C$

**답** (1) $7x+C$ (2) $-2x+C$
(3) $3x^2+C$ (4) $-x^4+C$
(5) $-x^3+x+C$ (6) $x^7+x^2+C$

### 147

(1) $f(x)=(2x+C)'=2$

(2) $f(x)=(3x^2+x+C)'=6x+1$

(3) $f(x)=\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}x+C\right)'$

$=-\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}$

(4) $f(x)=(4x^3-5x^2+11x+C)'$

$=12x^2-10x+11$

**답** (1) $f(x)=2$ (2) $f(x)=6x+1$
(3) $f(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}$
(4) $f(x)=12x^2-10x+11$

### 148

$8x^3+ax^2-2x+1=(bx^4+2x^3+cx^2+x+C)'$

$=4bx^3+6x^2+2cx+1$

즉, $8=4b$, $a=6$, $-2=2c$이므로

$a=6$, $b=2$, $c=-1$

$\therefore abc=-12$

**답 $-12$**

### 149

$\left(\frac{1}{2}x-1\right)f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-3x+C\right)'$

$=x^2-\frac{1}{2}x-3$

$=\frac{1}{2}(2x^2-x-6)$

$=\frac{1}{2}(x-2)(2x+3)$

$=\left(\frac{1}{2}x-1\right)(2x+3)$

따라서 $f(x)=2x+3$이므로

$f(1)=2\cdot1+3=5$

**답 5**

### 150

$F(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)$

$=x(2x^3+2x)$

$=2x^4+2x^2$

따라서 $F(x)$의 모든 항의 계수의 합은

$2+2=4$

**답 4**

### 151

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$

$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}+C$

이때 $f(1)=-1$이므로

$\frac{2}{3}-2+\frac{1}{2}+C=-1 \qquad \therefore C=-\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$이므로

$f(-1)=-\frac{2}{3}-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=-\frac{7}{3}$ **답 $-\frac{7}{3}$**

## 152

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+6x)\right\}dx$

$=x^2+6x+C$

$=(x+3)^2+C-9$

이때 $f(x)$의 최솟값이 $-4$이므로

$C-9=-4 \qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=x^2+6x+5$이므로

$f(-2)=(-2)^2+6\cdot(-2)+5=-3$ **답 $-3$**

## 153

$f(x)+g(x)=x^2-x-1$ …… ㉠

$f(1)=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+g(1)=1-1-1=-1$

$\therefore g(1)=-1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=6x-5$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(6x-5)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=3x^2-5x+C$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-g(1)=-2+C$이고

$f(1)=0,\ g(1)=-1$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)-g(x)=3x^2-5x+3$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2f(x)=4x^2-6x+2$

$\therefore f(x)=2x^2-3x+1$

㉠−㉡을 하면 $2g(x)=-2x^2+4x-4$

$\therefore g(x)=-x^2+2x-2$

$\therefore f(3)+g(-1)$

$=(2\cdot3^2-3\cdot3+1)+\{-(-1)^2+2\cdot(-1)-2\}$

$=10+(-5)=5$ **답 5**

## 154

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=2x+C_1$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$이고

$f(0)=1,\ g(0)=-5$이므로 $C_1=-4$

$\therefore f(x)+g(x)=2x-4$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x-4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(2x-4)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-4x+C_2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$이고

$f(0)=1,\ g(0)=-5$이므로 $C_2=-5$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-4x-5$

$=(x+1)(x-5)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$, $g(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=x+1,\ g(x)=x-5$ 또는

$f(x)=x-5,\ g(x)=x+1$

이때 $f(0)=1,\ g(0)=-5$가 성립해야 하므로

$f(x)=x+1,\ g(x)=x-5$

$\therefore f(4)-g(3)=(4+1)-(3-5)$

$=5-(-2)=7$ **답 7**

## 155

(1) $\int(3x^2+7)dx$

$=\int 3x^2\,dx+\int 7\,dx$

$=3\int x^2\,dx+7\int dx$

$=3\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+7(x+C_2)$

$=x^3+7x+3C_1+7C_2$

여기서 $3C_1+7C_2=C$라 하면

$\int(3x^2+7)dx=x^3+7x+C$

(2) $\int(-4x^3+x+2)dx$

$=\int(-4x^3)dx+\int x\,dx+\int 2\,dx$

$=-4\int x^3\,dx+\int x\,dx+2\int dx$

$=-4\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)+\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+2(x+C_3)$

$=-x^4+\frac{1}{2}x^2+2x-4C_1+C_2+2C_3$

여기서 $-4C_1+C_2+2C_3=C$라 하면

$\int(-4x^3+x+2)dx=-x^4+\frac{1}{2}x^2+2x+C$

(3) $\int(2x^5-5x^4)dx$

$=\int 2x^5\,dx-\int 5x^4\,dx$

$=2\int x^5\,dx-5\int x^4\,dx$

$=2\left(\frac{1}{6}x^6+C_1\right)-5\left(\frac{1}{5}x^5+C_2\right)$

$=\frac{1}{3}x^6-x^5+2C_1-5C_2$

여기서 $2C_1-5C_2=C$라 하면

$\int(2x^5-5x^4)dx=\frac{1}{3}x^6-x^5+C$

(4) $\int(-8x^7+4x^2-1)dx$

$=\int(-8x^7)dx+\int 4x^2\,dx-\int 1\,dx$

$=-8\int x^7\,dx+4\int x^2\,dx-\int dx$

$=-8\left(\frac{1}{8}x^8+C_1\right)+4\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right)-(x+C_3)$

$=-x^8+\frac{4}{3}x^3-x-8C_1+4C_2-C_3$

여기서 $-8C_1+4C_2-C_3=C$라 하면

$\int(-8x^7+4x^2-1)dx$

$=-x^8+\frac{4}{3}x^3-x+C$

답 (1) $\boldsymbol{x^3+7x+C}$

(2) $\boldsymbol{-x^4+\frac{1}{2}x^2+2x+C}$

(3) $\boldsymbol{\frac{1}{3}x^6-x^5+C}$

(4) $\boldsymbol{-x^8+\frac{4}{3}x^3-x+C}$

## 156

(1) $\int(x+2)(2-x)dx=\int(-x^2+4)dx$

$=\int(-x^2)dx+\int 4\,dx$

$=-\int x^2\,dx+4\int dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+4x+C$

(2) $\int(2x-1)(x-4)dx$

$=\int(2x^2-9x+4)dx$

$=\int 2x^2\,dx-\int 9x\,dx+\int 4\,dx$

$=2\int x^2\,dx-9\int x\,dx+4\int dx$

$=2\cdot\frac{1}{3}x^3-9\cdot\frac{1}{2}x^2+4x+C$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+4x+C$

(3) $\int(3t-1)(2t+3)dt$

$=\int(6t^2+7t-3)dt$

$=\int 6t^2\,dt+\int 7t\,dt-\int 3\,dt$

$=6\int t^2\,dt+7\int t\,dt-3\int dt$

$=6\cdot\frac{1}{3}t^3+7\cdot\frac{1}{2}t^2-3t+C$

$=2t^3+\frac{7}{2}t^2-3t+C$

(4) $\int(y+1)(y^2-y+1)dy=\int(y^3+1)dy$

$=\int y^3\,dy+\int dy$

$=\frac{1}{4}y^4+y+C$

답 (1) $\boldsymbol{-\frac{1}{3}x^3+4x+C}$

(2) $\boldsymbol{\frac{2}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+4x+C}$

(3) $\boldsymbol{2t^3+\frac{7}{2}t^2-3t+C}$

(4) $\boldsymbol{\frac{1}{4}y^4+y+C}$

## 157

(1) $\int (x+1)^2\,dx$

$=\int (x^2+2x+1)dx$

$=\int x^2\,dx+2\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

(2) $\int (-3x+2)^2\,dx$

$=\int (9x^2-12x+4)dx$

$=9\int x^2\,dx-12\int x\,dx+4\int dx$

$=3x^3-6x^2+4x+C$

(3) $\int (3-2x)^3\,dx$

$=\int (-8x^3+36x^2-54x+27)dx$

$=-8\int x^3\,dx+36\int x^2\,dx-54\int x\,dx+27\int dx$

$=-2x^4+12x^3-27x^2+27x+C$

(4) $\int (3y-1)^3\,dy$

$=\int (27y^3-27y^2+9y-1)dy$

$=27\int y^3\,dy-27\int y^2\,dy+9\int y\,dy-\int dy$

$=\frac{27}{4}y^4-9y^3+\frac{9}{2}y^2-y+C$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C}$
(2) $\boldsymbol{3x^3-6x^2+4x+C}$
(3) $\boldsymbol{-2x^4+12x^3-27x^2+27x+C}$
(4) $\boldsymbol{\frac{27}{4}y^4-9y^3+\frac{9}{2}y^2-y+C}$

**다른풀이** $\int (ax+b)^n\,dx$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$이므로

(1) $\int (x+1)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+1)^3+C$

(2) $\int (-3x+2)^2\,dx=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{3}(-3x+2)^3+C$

$=-\frac{1}{9}(-3x+2)^3+C$

(3) $\int (3-2x)^3\,dx=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{4}(3-2x)^4+C$

$=-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$

(4) $\int (3y-1)^3\,dy=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(3y-1)^4+C$

$=\frac{1}{12}(3y-1)^4+C$

**참고** $n$이 0 또는 양의 정수이고 $a$ $(a\neq 0)$, $b$는 상수, $C$는 적분상수일 때

$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$

## 158

(1) $\int (x-y)^2\,dx=\int (x^2-2xy+y^2)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2+C$

(2) $\int (x+5)^2\,dx-\int (x-5)^2\,dx$

$=\int \{(x+5)^2-(x-5)^2\}dx$

$=\int 20x\,dx=10x^2+C$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2+C}$ (2) $\boldsymbol{10x^2+C}$

## 159

(1) (주어진 식)$=\int \frac{(y^2+y+1)(y^2-y+1)}{y^2+y+1}\,dy$

$=\int (y^2-y+1)dy$

$=\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+C$

(2) (주어진 식)$=\int \left(\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{1-x}\right)dx$

$=\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

$=\int \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx$

$=\int (x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$

(3) (주어진 식) $=\int\left\{\left(\frac{x}{2}+2\right)^2-\left(\frac{x}{2}-2\right)^2\right\}dx$

$=\int 4x\,dx=2x^2+C$

(4) (주어진 식) $=\int\left(\frac{x^3+2x}{x-1}-\frac{2x+1}{x-1}\right)dx$

$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$

$=\int(x^2+x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+C}$ (2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2+x+C}$

(3) $\boldsymbol{2x^2+C}$ (4) $\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C}$

## 160

$f(x)=\int(10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1)dx$

$=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x$이므로

$f(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{10\text{개}}=10$ 답 **10**

## 161

$f(x)=\int\frac{x^3}{x+2}dx+\int\frac{8}{x+2}dx$

$=\int\frac{x^3+8}{x+2}dx$

$=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$=\int(x^2-2x+4)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

이때 $f(1)=2$이므로

$\frac{1}{3}-1+4+C=2$ $\therefore C=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-\frac{4}{3}$이므로

$f(k)=\frac{16}{3}$에서 $\frac{1}{3}k^3-k^2+4k-\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

$k^3-3k^2+12k-20=0$, $(k-2)(k^2-k+10)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k$는 실수) 답 **2**

## 162

$f'(x)=4x^3+6x^2-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3+6x^2-2)dx$

$=x^4+2x^3-2x+C$

이때 $f(-1)=1$이므로

$1-2+2+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3-2x$이므로

$f(2)=2^4+2\cdot2^3-2\cdot2=28$ 답 **28**

## 163

$f'(x)=9x^2-2x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(9x^2-2x+1)dx$

$=3x^3-x^2+x+C$

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore \int f(x)dx=\int(3x^3-x^2+x+2)dx$

$=\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+C$

답 $\boldsymbol{\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+C}$

## 164

$F(x)=f(x)+xf(x)-2x^4+4x^2$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$F'(x)=f'(x)+f(x)+xf'(x)-8x^3+8x$

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$f(x)=f'(x)+f(x)+xf'(x)-8x^3+8x$

$(x+1)f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$\therefore f'(x)=8x^2-8x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(8x^2-8x)dx$

$=\frac{8}{3}x^3-4x^2+C$

이때 $f(1)=-\frac{1}{3}$이므로

$\frac{8}{3}-4+C=-\frac{1}{3}\qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+1$

**답** $\boldsymbol{f(x)=\frac{8}{3}x^3-4x^2+1}$

## 165

$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & (x>-1)\\ 2x+1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^3-x+C_1 & (x\geq-1)\\ x^2+x+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

이때 $f(0)=2$이므로 $C_1=2$

한편, 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이므로

$x=-1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$에서

$C_1=C_2=2$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^3-x+2 & (x\geq-1)\\ x^2+x+2 & (x<-1)\end{cases}$

$\therefore\ f(-2)+f(1)=(4-2+2)+(1-1+2)$

$=4+2=6$

**답** 6

## 166

점 $(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-6x+4$이므로

$f'(x)=3x^2-6x+4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x+4)dx$

$=x^3-3x^2+4x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$C=-2$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+4x-2$

$\therefore f(-1)=-1-3-4-2=-10$

**답** $-10$

## 167

$f(x)=\int(5x^2+2x-1)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=5x^2+2x-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}f'(1)$

$=\frac{1}{2}(5+2-1)=3$

**답** 3

## 168

$f(x)=\int(6x^2-4x+k)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2-4x+k$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$이므로

$f'(1)=6-4+k=4$

$\therefore k=2,\ f'(x)=6x^2-4x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x^2-4x+2)dx$

$=2x^3-2x^2+2x+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+2x+1$이므로

$f(1)=2-2+2+1=3$

**답** 3

## 169

$f(x)=\int(3x^2+ax-24)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax-24$

$f(x)$가 $x=4$에서 극솟값 $-72$를 가지므로

$f'(4)=0,\ f(4)=-72$

$f'(4)=48+4a-24=0\qquad \therefore a=-6$

$\therefore\ f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고, $x=4$에서 극솟값을 갖는다.
한편,

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2-6x-24)dx$$
$$=x^3-3x^2-24x+C$$

에서 $f(4)=-72$이므로
$f(4)=64-48-96+C=-72 \qquad \therefore C=8$
즉, $f(x)=x^3-3x^2-24x+8$이므로 $f(x)$의 극댓값은
$f(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)^2-24\cdot(-2)+8=36$

**답 $a=-6$, 극댓값: 36**

## 170

$f'(x)=k(x+2)(x-2)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=2$
이때 $k<0$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
$\therefore f(-2)=-12,\ f(2)=20$
한편,

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int k(x^2-4)dx$$
$$=k\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)+C$$

이므로
$f(-2)=-12$에서 $\frac{16}{3}k+C=-12$ …… ㉠
$f(2)=20$에서 $-\frac{16}{3}k+C=20$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $C=4,\ k=-3$
$\therefore f(x)=-x^3+12x+4$

**답 $f(x)=-x^3+12x+4$**

## 171

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0)+0$에서 $f(0)=0$
$f'(0)=6$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=6$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{x(x+h)+\frac{f(h)}{h}\right\}=x^2+6$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+6)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+6x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+6x$

**답 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+6x$**

## 172

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0)+0$에서 $f(0)=0$
$f'(1)=3$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+2h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2=3$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2x+1$$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx$

$=x^2+x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로

$f(-2)=(-2)^2+(-2)=2$ 답 **2**

## 173

(1) $\int_0^1 4x\,dx=\left[2x^2\right]_0^1=2\cdot1^2-2\cdot0^2=2$

(2) $\int_2^4 3x^2\,dx=\left[x^3\right]_2^4=4^3-2^3=56$

(3) $\int_{-1}^2(2x+3)dx$

$=\left[x^2+3x\right]_{-1}^2$

$=(2^2+3\cdot2)-\{(-1)^2+3\cdot(-1)\}$

$=12$

(4) $\int_{-2}^0(-t^2+2t-1)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2-t\right]_{-2}^0$

$=0-\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+(-2)^2-(-2)\right\}$

$=-\frac{26}{3}$

답 (1) **2** (2) **56** (3) **12** (4) $\mathbf{-\frac{26}{3}}$

## 174

(1) $\int_2^2(x^3-6x+1)dx=0$

(2) $\int_{-1}^{-1}(5t^2+3t-2)dt=0$

(3) $\int_0^{-1}(-2x^2+4x)dx$

$=-\int_{-1}^0(-2x^2+4x)dx$

$=-\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{-1}^0$

$=-\left[0-\left\{-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2\right\}\right]$

$=\frac{8}{3}$

(4) $\int_3^1(3y^2-y+1)dy$

$=-\int_1^3(3y^2-y+1)dy=-\left[y^3-\frac{1}{2}y^2+y\right]_1^3$

$=-\left\{\left(3^3-\frac{1}{2}\cdot3^2+3\right)-\left(1^3-\frac{1}{2}\cdot1^2+1\right)\right\}$

$=-24$

답 (1) **0** (2) **0** (3) $\mathbf{\frac{8}{3}}$ (4) $\mathbf{-24}$

## 175

(1) $\int_1^2 6(x-1)^2dx=6\int_1^2(x-1)^2dx$

$=6\int_1^2(x^2-2x+1)dx$

$=6\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2$

$=6\left\{\left(\frac{8}{3}-4+2\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)\right\}$

$=2$

(2) $\int_0^1(x^2+2)dx+\int_0^1(-x^2+2)dx$

$=\int_0^1\{(x^2+2)+(-x^2+2)\}dx$

$=\int_0^1 4\,dx=\left[4x\right]_0^1=4$

(3) $\int_1^2(2x-1)dx+\int_2^3(2x-1)dx$

$=\int_1^3(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_1^3$

$=(9-3)-(1-1)=6$

(4) $\int_0^1(3x^2-2x+1)dx-\int_2^1(3x^2-2x+1)dx$

$=\int_0^1(3x^2-2x+1)dx+\int_1^2(3x^2-2x+1)dx$

$=\int_0^2(3x^2-2x+1)dx$

$=\left[x^3-x^2+x\right]_0^2=(8-4+2)-0=6$

답 (1) **2** (2) **4** (3) **6** (4) **6**

## 176

(1) $\int_{-1}^1(4x^3-3x^2+2x)dx$

$=\left[x^4-x^3+x^2\right]_{-1}^1$

$=(1-1+1)-\{1-(-1)+1\}=-2$

(2) $\int_{-1}^{-3}(3y+1)(3y-1)dy$

$=\int_{-1}^{-3}(9y^2-1)dy$

$=-\int_{-3}^{-1}(9y^2-1)dy$

$=-\Big[3y^3-y\Big]_{-3}^{-1}$

$=-[\{-3-(-1)\}-\{-81-(-3)\}]$

$=-76$

(3) $\int_{1}^{0}\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{0}(x^2-x+1)dx$

$=-\int_{0}^{1}(x^2-x+1)dx$

$=-\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{0}^{1}$

$=-\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-0\right\}$

$=-\frac{5}{6}$

답 (1) $\mathbf{-2}$ (2) $\mathbf{-76}$ (3) $\mathbf{-\frac{5}{6}}$

## 177

$\int_{0}^{1}x^2f(x)dx=\int_{0}^{1}x^2(x^2+4x)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^4+4x^3)dx$

$=\Big[\frac{1}{5}x^5+x^4\Big]_{0}^{1}$

$=\left(\frac{1}{5}+1\right)-0=\frac{6}{5}$

답 $\mathbf{\frac{6}{5}}$

## 178

$\int_{-1}^{k}(2x+k)dx=\Big[x^2+kx\Big]_{-1}^{k}$

$=(k^2+k^2)-(1-k)$

$=2k^2+k-1$

이므로

$2k^2+k-1=9$, $2k^2+k-10=0$

$(2k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

답 **2**

## 179

$\int_{1}^{k}(-4x+2)dx=\Big[-2x^2+2x\Big]_{1}^{k}$

$=(-2k^2+2k)-(-2+2)$

$=-2k^2+2k$

$=-2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

이므로 주어진 정적분은 $k=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

## 180

(1) (주어진 식)

$=\int_{-2}^{1}(2x^2+3x-1)dx-\int_{-2}^{1}(2x^2-x+3)dx$

$=\int_{-2}^{1}\{(2x^2+3x-1)-(2x^2-x+3)\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(4x-4)dx=\Big[2x^2-4x\Big]_{-2}^{1}$

$=(2-4)-(8+8)=-18$

(2) (주어진 식) $=\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx$

$=\Big[x^3+x\Big]_{0}^{2}=(8+2)-0=10$

(3) (주어진 식) $=\int_{0}^{1}\frac{8}{t-2}dt-\int_{0}^{1}\frac{y^3}{y-2}dy$

$=\int_{0}^{1}\frac{8}{t-2}dt-\int_{0}^{1}\frac{t^3}{t-2}dt$

$=\int_{0}^{1}\left(\frac{8}{t-2}-\frac{t^3}{t-2}\right)dt$

$=-\int_{0}^{1}\frac{t^3-8}{t-2}dt$

$=-\int_{0}^{1}(t^2+2t+4)dt$

$=-\Big[\frac{1}{3}t^3+t^2+4t\Big]_{0}^{1}$

$=-\left\{\left(\frac{1}{3}+1+4\right)-0\right\}=-\frac{16}{3}$

(4) (주어진 식)

$$=\int_2^4 (x^2-4x)dx+\int_4^3 (x^2-4x)dx+\int_1^2 (x^2-4x)dx$$

$$=\int_1^2 (x^2-4x)dx+\int_2^4 (x^2-4x)dx+\int_4^3 (x^2-4x)dx$$

$$=\int_1^3 (x^2-4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_1^3=(9-18)-\left(\frac{1}{3}-2\right)$$

$$=-\frac{22}{3}$$

답 (1) $\mathbf{-18}$ (2) $\mathbf{10}$ (3) $\mathbf{-\frac{16}{3}}$ (4) $\mathbf{-\frac{22}{3}}$

## 181

$0\le x\le 1$일 때, $f(x)=x^2$

$1\le x\le 2$일 때, $f(x)=-2x+3$

이므로

$$\int_0^2 xf(x)dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot x^2\,dx+\int_1^2 x(-2x+3)dx$$

$$=\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^2 (-2x^2+3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{12}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{12}}$

## 182

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 0) \\ x^2-2x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+1 & (x-1\le 0) \\ (x-1)^2-2(x-1)+1 & (x-1\ge 0) \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x-1)=\begin{cases} x & (x\le 1) \\ x^2-4x+4 & (x\ge 1) \end{cases}$$

$$\therefore\ \int_{-1}^2 f(x-1)dx$$

$$=\int_{-1}^1 x\,dx+\int_1^2 (x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

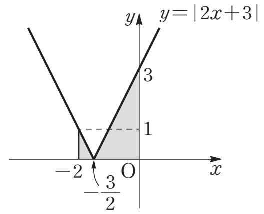
$$=\frac{1}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

## 183

(1) $f(x)=|2x+3|$이라 하면 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & \left(-2\le x\le -\frac{3}{2}\right) \\ 2x+3 & \left(-\frac{3}{2}\le x\le 0\right) \end{cases}$$




따라서 구하는 정적분의 값은

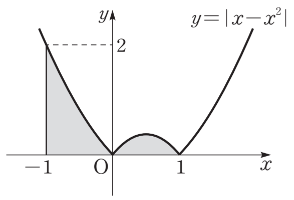
$$\int_{-2}^0 |2x+3|dx$$

$$=\int_{-2}^{-\frac{3}{2}} (-2x-3)dx+\int_{-\frac{3}{2}}^0 (2x+3)dx$$

$$=\left[-x^2-3x\right]_{-2}^{-\frac{3}{2}}+\left[x^2+3x\right]_{-\frac{3}{2}}^0=\frac{5}{2}$$

(2) $f(x)=|x-x^2|$이라 하면 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} -x+x^2 & (-1\le x\le 0) \\ x-x^2 & (0\le x\le 1) \end{cases}$$




따라서 구하는 정적분의 값은

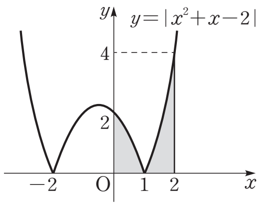
$$\int_{-1}^1 |x-x^2|dx$$

$$=\int_{-1}^0 (-x+x^2)dx+\int_0^1 (x-x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=1$$

(3) $f(x)=|x^2+x-2|$라 하면 닫힌구간 $[0, 2]$에서

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-x+2 & (0\le x\le 1)\\ x^2+x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$



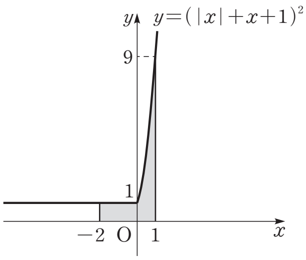

따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2-x+2)dx+\int_1^2 (x^2+x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=3$$

(4) $f(x)=(|x|+x+1)^2$이라 하면 닫힌구간 $[-2, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases}(-x+x+1)^2 & (-2\le x\le 0)\\ (x+x+1)^2 & (0\le x\le 1)\end{cases},$$

즉 $f(x)=\begin{cases}1 & (-2\le x\le 0)\\ (2x+1)^2 & (0\le x\le 1)\end{cases}$




따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_{-2}^1 (|x|+x+1)^2dx$$
$$=\int_{-2}^0 1\,dx+\int_0^1 (2x+1)^2dx$$
$$=\int_{-2}^0 dx+\int_0^1(4x^2+4x+1)dx$$
$$=\Big[x\Big]_{-2}^0+\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^1=\frac{19}{3}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{5}{2}}$ (2) **1** (3) **3** (4) $\mathbf{\frac{19}{3}}$

## 184

$|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|$

(i) $(x+1)(x-1)\ge 0$, 즉 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$

(ii) $(x+1)(x-1)\le 0$, 즉 $-1\le x\le 1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$

적분 구간이 $[0, a]$이고 $a>1$이므로

$$\int_0^a |x^2-1|\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2+1)dx+\int_1^a (x^2-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^a$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}a^3-a+\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3-a+\frac{4}{3}=\frac{56}{3}$이므로

$a^3-3a-52=0$

$(a-4)(a^2+4a+13)=0$ $\therefore a=4$

답 **4**

## 185

(1) (주어진 식)

$$=\int_{-2}^2 (x^5-2x^3-3x)dx+\int_{-2}^2 (6x^2-1)dx$$
$$=2\int_0^2 (6x^2-1)dx$$
$$=2\Big[2x^3-x\Big]_0^2=28$$

(2) (주어진 식)

$$=\int_{-1}^0 (4x^3+3x^2+2x+1)dx+\int_0^1 (4x^3+3x^2+2x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^1 (4x^3+3x^2+2x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^1 (4x^3+2x)dx+\int_{-1}^1 (3x^2+1)dx$$
$$=2\int_0^1 (3x^2+1)dx$$
$$=2\Big[x^3+x\Big]_0^1=4$$

답 (1) **28** (2) **4**

## 186

모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$y=f(x)$는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3} f(x)dx=0$$

모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)=g(-x)$이므로

$y=g(x)$는 그래프가 $y$축에 대하여 대칭인 우함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3} g(x)dx=2\int_{0}^{3} g(x)dx=2\cdot 2=4$$

$$\therefore \int_{-3}^{3} \{f(x)+g(x)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{3} f(x)dx+\int_{-3}^{3} g(x)dx=0+4=4$$

답 **4**

## 187

$f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{1}^{4} f(x)dx=\int_{4}^{7} f(x)dx=\int_{7}^{10} f(x)dx=5$$

$$\therefore \int_{1}^{10} f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{7} f(x)dx+\int_{7}^{10} f(x)dx$$

$$=5+5+5=15$$

답 **15**

## 188

$f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{4} f(x)dx=\int_{4}^{8} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{0}^{10} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{8} f(x)dx+\int_{8}^{10} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{4} f(x)dx+\int_{0}^{4} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{4} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+4x)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{4}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{80}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{80}{3}}$

## 189

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x}(t^2+2)dt=x^2+2$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^{x}(3t^2-2t+3)dt=3x^2-2x+3$

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2}^{x}(5t^3-3t^2)dt=5x^3-3x^2$

(4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-2}^{x}(3t^2+t)(t-1)dt=(3x^2+x)(x-1)$

$=3x^3-2x^2-x$

(5) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{x+2}(t^2-2t+1)dt$

$=\{(x+2)^2-2(x+2)+1\}-(x^2-2x+1)$

$=4x$

(6) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{x+1}(2t+1)(t-2)dt$

$=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{x+1}(2t^2-3t-2)dt$

$=\{2(x+1)^2-3(x+1)-2\}-(2x^2-3x-2)$

$=4x-1$

답 (1) $\boldsymbol{x^2+2}$ (2) $\boldsymbol{3x^2-2x+3}$ (3) $\boldsymbol{5x^3-3x^2}$ (4) $\boldsymbol{3x^3-2x^2-x}$ (5) $\boldsymbol{4x}$ (6) $\boldsymbol{4x-1}$

## 190

(1) 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-5$

(2) 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=-2x+3$

(3) 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2-6$

(4) 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+6x+2$

(5) 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=1\cdot(x-3)+(x+1)\cdot 1=2x-2$

(6) 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=4x(x+2)+(2x^2+3)\cdot 1=6x^2+8x+3$

답 (1) $\boldsymbol{f(x)=4x-5}$ (2) $\boldsymbol{f(x)=-2x+3}$ (3) $\boldsymbol{f(x)=9x^2-6}$ (4) $\boldsymbol{f(x)=12x^2+6x+2}$ (5) $\boldsymbol{f(x)=2x-2}$ (6) $\boldsymbol{f(x)=6x^2+8x+3}$

## 191

(1) $f(x)=x^2+\int_0^1 xf(t)dt$에서

$f(x)=x^2+x\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ ($k$는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2+kx$

이것을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^1 (t^2+kt)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}k$

즉, $k=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}k$이므로 $k=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{2}{3}x$이므로

$f(1)=1^2+\frac{2}{3}\cdot1=\frac{5}{3}$

(2) $\int_0^1 tf(t)dt=k$ ($k$는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=-2x^2+3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^1 t(-2t^2+3t+k)dt$

$=\int_0^1 (-2t^3+3t^2+kt)dt$

$=\left[-\frac{1}{2}t^4+t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}$

즉, $k=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}$이므로 $k=1$

따라서 $f(x)=-2x^2+3x+1$이므로

$f(1)=-2+3+1=2$

(3) $f(x)=x^2+\int_0^2 (3x+1)f(t)dt$

$=x^2+3x\int_0^2 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$

이때 $\int_0^2 f(t)dt=k$ ($k$는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2+3kx+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^2 (t^2+3kt+k)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3k}{2}t^2+kt\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}+6k+2k=\frac{8}{3}+8k$

즉, $k=\frac{8}{3}+8k$이므로 $k=-\frac{8}{21}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{8}{7}x-\frac{8}{21}$이므로

$f(1)=1-\frac{8}{7}-\frac{8}{21}=-\frac{11}{21}$

(4) $f(x)=3x^2+\int_0^1 (2x-t)f(t)dt$

$=3x^2+2x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 tf(t)dt=b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2+2ax-b$

$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (3t^2+2at-b)dt$

$=\left[t^3+at^2-bt\right]_0^1$

$=1+a-b$

즉, $a=1+a-b$이므로 $b=1$

$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(3t^2+2at-1)dt$

$=\int_0^1 (3t^3+2at^2-t)dt$

$=\left[\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}at^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}$

즉, $b=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{9}{8}$

따라서 $f(x)=3x^2+\frac{9}{4}x-1$이므로

$f(1)=3+\frac{9}{4}-1=\frac{17}{4}$

**답** (1) $\frac{5}{3}$ (2) **2** (3) $-\frac{11}{21}$ (4) $\frac{17}{4}$

## 192

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-3$

주어진 식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-3a-10$, $(a+2)(a-5)=0$

그런데 $a<0$이므로 $a=-2$

$\therefore f(a)=f(-2)=-4-3=-7$

**답** $-7$

## 193

(1) $\int_x^2 f(t)dt=-\int_2^x f(t)dt$이므로

$xf(x)=x^3-3x^2+\int_2^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+f(x)$

$xf'(x)=3x^2-6x$

$\therefore f'(x)=3x-6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ ($C$는 적분상수) …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=8-12$  $\therefore f(2)=-2$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=6-12+C=-2$  $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+4$이므로

$f(-1)=\frac{3}{2}+6+4=\frac{23}{2}$

(2) $x^2f(x)=\frac{2}{3}x^6-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}+2\int_1^x tf(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=4x^5-2x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=x^2(4x^3-2x)$

$\therefore f'(x)=4x^3-2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(4x^3-2x)dx$

$=x^4-x^2+C$ ($C$는 적분상수) …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$  $\therefore f(1)=0$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1-1+C=0$  $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^4-x^2$이므로

$f(-1)=1-1=0$

답 (1) $\frac{23}{2}$ (2) **0**

## 194

주어진 등식을 정리하면

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4-3x^2+2x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-6x+2$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=4x^3-6x+2$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-6$

$\therefore f(-1)=12-6=6$

답 **6**

## 195

(1) 주어진 등식을 정리하면

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4+ax^2+1$ …… ㉠

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+2ax$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=4x^3+2ax$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+2a$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+1$  $\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=12x^2-4$

(2) 주어진 등식을 정리하면

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+ax^2+bx$ …… ㉠

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+2ax+b$ …… ㉡

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2a$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b$  $\therefore a+b=-1$ …… ㉣

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3+2a+b \quad \therefore 2a+b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$

$a=-2$를 ㉢에 대입하면 $f(x)=6x-4$

답 (1) $\boldsymbol{f(x)=12x^2-4}$ (2) $\boldsymbol{f(x)=6x-4}$

## 196

$$f(x)=\int_{-3}^{x}(t^2+t+k)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x+k$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-3)=0$, 즉 $9-3+k=0 \quad \therefore k=-6$

$\therefore f'(x)=x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(2)=\int_{-3}^{2}(t^2+t-6)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-6t\right]_{-3}^{2}$$

$$=-\frac{125}{6}$$

답 $\boldsymbol{-\frac{125}{6}}$

## 197

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$y=ax(x-2)\ (a<0)$

또한, 주어진 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=a\cdot(-1) \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x(x-2)=-x^2+2x$

$F(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$$F(2)=\int_{1}^{2}(-t^2+2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{2}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

## 198

$$f(x)=\int_{0}^{x}(t-1)(t-5)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1\ (\because 0\le x\le 3)$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 $0\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1)=\int_{0}^{1}(t-1)(t-5)dt$$

$$=\int_{0}^{1}(t^2-6t+5)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-3+5=\frac{7}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{7}{3}}$

## 199

$$f(x)=\int_{x}^{x+1}(2t^2+2t)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{2(x+1)^2+2(x+1)\}-(2x^2+2x)$

$=4x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

이때

$$f(-2)=\int_{-2}^{-1}(2t^2+2t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+t^2\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}+1\right)-\left(-\frac{16}{3}+4\right)=\frac{5}{3}$$
$$f(-1)=\int_{-1}^{0}(2t^2+2t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+t^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=0-\left(-\frac{2}{3}+1\right)=-\frac{1}{3}$$
$$f(1)=\int_{1}^{2}(2t^2+2t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+t^2\right]_{1}^{2}$$
$$=\left(\frac{16}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{23}{3}$$

이므로 $-2\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{23}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

$\therefore M=\frac{23}{3}$, $m=-\frac{1}{3}$

$\therefore M-m=8$ **답** 8

## 200

(1) $f(t)=(t-2)^3$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t-2)^3dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x(t-2)^3\,dt}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\Big[F(t)\Big]_1^x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)$$

이때 $F'(t)=f(t)$이므로

$F'(1)=f(1)=(1-2)^3=-1$

(2) $f(t)=2t^2+3t-1$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(2t^2+3t-1)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^{x^2}(2t^2+3t-1)dt}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$$
$$=2F'(1)$$

이때 $F'(t)=f(t)$이므로

$2F'(1)=2f(1)$

$=2(2+3-1)=8$

(3) $f(t)=|t-4|$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x|t-4|dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x|t-4|dt}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\Big[F(t)\Big]_1^x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)$$

이때 $F'(t)=f(t)$이므로

$\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$

$=\frac{1}{2}|1-4|=\frac{3}{2}$

(4) $f(x)=3x^2-x+1$로 놓고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}(3x^2-x+1)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\int_{2-h}^{2+h}(3x^2-x+1)dx}{h}$$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\Big[F(x)\Big]_{2-h}^{2+h}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{F(2+h)-F(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{F(2+h)-F(2)+F(2)-F(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{F(2+h)-F(2)}{h}$

$+\lim_{h\to0}\dfrac{F(2-h)-F(2)}{-h}$

$=F'(2)+F'(2)=2F'(2)$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$2F'(2)=2f(2)$

$=2(12-2+1)=22$

**답** (1) $\mathbf{-1}$ (2) **8** (3) $\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ (4) **22**

## 201

$f(x)=ax-x^2$으로 놓고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}\int_{-1}^{-1+h}(ax-x^2)dx$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{-1}^{-1+h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{F(-1+h)-F(-1)}{h}$

$=F'(-1)=-3$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$F'(-1)=f(-1)=-a-1$

따라서 $-a-1=-3$이므로 $a=2$

**답 2**

## 202

곡선 $x=y(y-k)^2$과 $y$축과의 교점의 $y$좌표는

$y(y-k)^2=0$에서 $y=0$ 또는 $y=k$

$0\le y\le k$일 때, $x\ge0$이므로 곡선 $x=y(y-k)^2$과 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^k y(y-k)^2\,dy=\int_0^k(y^3-2ky^2+k^2y)dy$

$=\Big[\dfrac{1}{4}y^4-\dfrac{2}{3}ky^3+\dfrac{1}{2}k^2y^2\Big]_0^k=\dfrac{1}{12}k^4$

즉, $\dfrac{1}{12}k^4=12$이므로 $k^4=144$

$(k^2+12)(k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})=0$

$\therefore k=2\sqrt{3}\ (\because k>0)$

**답** $\mathbf{2\sqrt{3}}$

## 203

곡선 $y=-x^2+2x$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{2}$이므로 구하는 넓이는

$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{2}}(-x^2+2x)dx$

$=\Big[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^2=\boxed{\dfrac{4}{3}}$

**답 풀이 참조**

## 204

곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=-x$의 교점의 $x$좌표는

$x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{3}$이므로 구하는 넓이는

$\int_0^{\boxed{3}}\{-x-(\boxed{x^2-4x})\}dx$

$=\int_0^{\boxed{3}}(\boxed{-x^2+3x})dx$

$=\Big[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2\Big]_0^3$

$=\boxed{\dfrac{9}{2}}$

**답 풀이 참조**

## 205

두 곡선 $y=x^2+x$, $y=-2x^2+x+3$의 교점의 $x$좌표는 $x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\boxed{1}$이므로 구하는 넓이는

$\int_{\boxed{-1}}^{1}\{(\boxed{-2x^2+x+3})-(x^2+x)\}dx$

$=\int_{\boxed{-1}}^{1}(\boxed{-3x^2+3})dx$

$=\Big[-x^3+3x\Big]_{-1}^{1}$

$=\boxed{4}$

**답 풀이 참조**

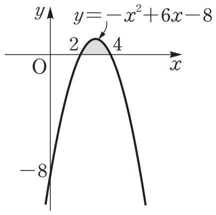
## 206

(1) 곡선 $y=-x^2+6x-8$과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+6x-8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=-x^2+6x-8$과 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$2\le x\le 4$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

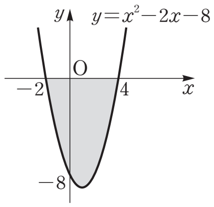
$$S=\int_{2}^{4}(-x^2+6x-8)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_2^4=\frac{4}{3}$$

(2) 곡선 $y=x^2-2x-8$과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=x^2-2x-8$과 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$-2\le x\le 4$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

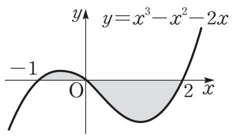
$$S=-\int_{-2}^{4}(x^2-2x-8)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_{-2}^{4}$$
$$=36$$

(3) 곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^3-x^2-2x=0$에서 $x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$-1\le x\le 0$에서 $y\ge 0$, $0\le x\le 2$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{37}{12}$$

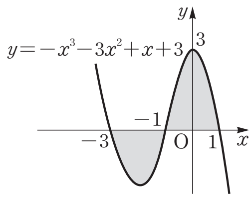
(4) 곡선 $y=-x^3-3x^2+x+3$과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$-x^3-3x^2+x+3=0$에서

$x^3+3x^2-x-3=0$, $(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=-x^3-3x^2+x+3$과 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$-3\le x\le -1$에서 $y\le 0$, $-1\le x\le 1$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=-\int_{-3}^{-1}(-x^3-3x^2+x+3)dx+\int_{-1}^{1}(-x^3-3x^2+x+3)dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}$$
$$=8$$

**답** (1) $\mathbf{\frac{4}{3}}$ (2) **36** (3) $\mathbf{\frac{37}{12}}$ (4) **8**

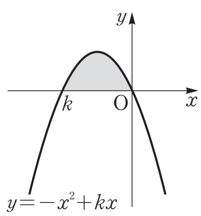
## 207

곡선 $y=-x^2+kx$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+kx=0$에서 $x(x-k)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=k$

이때 $k<0$이므로 곡선 $y=-x^2+kx$와 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$k\le x\le 0$에서 $y\ge 0$이므로 넓이는

$$\int_{k}^{0}(-x^2+kx)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}kx^2\right]_k^0$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^3\right)$$
$$=-\frac{1}{6}k^3$$

즉, $-\frac{1}{6}k^3=36$이므로

$k^3=-216 \qquad \therefore k=-6$ **답** $-6$

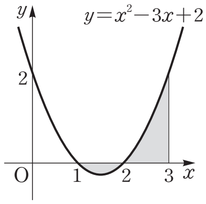
## 208

곡선 $y=x^2-3x+2$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^2-3x+2$와 $x$축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$1\le x\le 2$에서 $y\le 0$,

$2\le x\le 3$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=-\int_1^2 (x^2-3x+2)dx+\int_2^3 (x^2-3x+2)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^3$$

$$=1$$

**답** 1

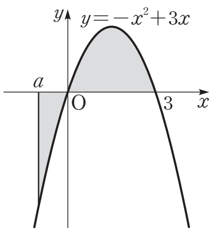
## 209

곡선 $y=-x^2+3x$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+3x=0$에서 $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$a$가 0보다 작은 정수이므로 곡선 $y=-x^2+3x$와 $x$축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$a\le x\le 0$에서 $y\le 0$,

$0\le x\le 3$에서 $y\ge 0$이므로 넓이는

$$-\int_a^0 (-x^2+3x)dx+\int_0^3 (-x^2+3x)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_a^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}$$

즉, $-\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}=\frac{19}{3}$이므로

$2a^3-9a^2+11=0$에서

$(a+1)(2a^2-11a+11)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a$는 0보다 작은 정수) **답** $-1$

## 210

(1) 곡선 $y=-2x^2+x+4$와 직선 $y=x+2$의 교점의 $x$좌표는

$-2x^2+x+4=x+2$에서 $x^2=1$

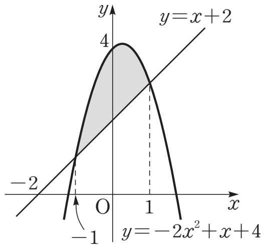
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

오른쪽 그래프에서

$-1\le x\le 1$일 때,

$-2x^2+x+4\ge x+2$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{-1}^1 \{(-2x^2+x+4)-(x+2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1 (-2x^2+2)dx$$

$$=2\int_0^1 (-2x^2+2)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$

$$=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

(2) 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$x^3-6x^2+9x=x$에서

$x^3-6x^2+8x=0$

$x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

오른쪽 그래프에서

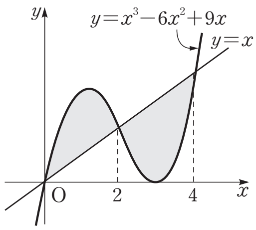
$0\le x\le 2$일 때,

$x^3-6x^2+9x\ge x$

$2\le x\le 4$일 때,

$x^3-6x^2+9x\le x$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_0^2 \{(x^3-6x^2+9x)-x\}dx$$

$$+\int_2^4 \{x-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

$$=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx$$

$$+\int_2^4 (-x^3+6x^2-8x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$$

$$=8$$

**답** (1) $\mathbf{\frac{8}{3}}$ (2) **8**

## 211

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 $x$좌표는

$x^2-2x=ax$에서 $x^2-(a+2)x=0$

$x\{x-(a+2)\}=0$

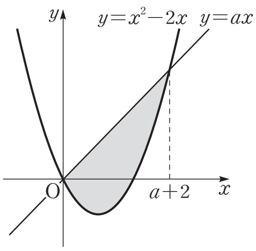
$\therefore x=0$ 또는 $x=a+2$

오른쪽 그래프에서

$0\le x\le a+2$일 때,

$x^2-2x\le ax$

따라서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는




$$\int_0^{a+2}\{ax-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_0^{a+2}\{-x^2+(a+2)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a+2)x^2\right]_0^{a+2}$$

$$=\frac{1}{6}(a+2)^3$$

즉, $\frac{1}{6}(a+2)^3=\frac{9}{2}$이므로

$(a+2)^3=27$, $a+2=3$

$\therefore a=1$

**답 1**

## 212

(1) 두 곡선 $y=x^3$, $y=3x^2-4$의 교점의 $x$좌표는

$x^3=3x^2-4$에서 $x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

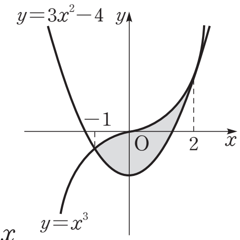
오른쪽 그래프에서

$-1\le x\le 2$일 때,

$x^3\ge 3x^2-4$

따라서 구하는 넓이를

$S$라 하면




$$S=\int_{-1}^2\{x^3-(3x^2-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^2=\frac{27}{4}$$

(2) 두 곡선 $y=x^3-3x^2-x+3$, $y=x^2-2x-3$의 교점의 $x$좌표는

$x^3-3x^2-x+3=x^2-2x-3$에서

$x^3-4x^2+x+6=0$

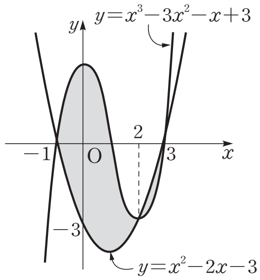
$(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

다음 그래프에서

$-1\le x\le 2$일 때, $x^3-3x^2-x+3\ge x^2-2x-3$

$2\le x\le 3$일 때, $x^3-3x^2-x+3\le x^2-2x-3$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^2\{(x^3-3x^2-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$+\int_2^3\{(x^2-2x-3)-(x^3-3x^2-x+3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(x^3-4x^2+x+6)dx$$

$$+\int_2^3(-x^3+4x^2-x-6)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-1}^2$$

$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\right]_2^3$$

$$=\frac{71}{6}$$

**답** (1) $\mathbf{\frac{27}{4}}$ (2) $\mathbf{\frac{71}{6}}$

## 213

두 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2+x$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x^2+x$에서 $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

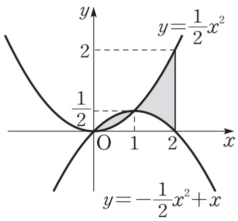
오른쪽 그래프에서

$0\le x\le 1$일 때,

$\frac{1}{2}x^2\le -\frac{1}{2}x^2+x$

$1\le x\le 2$일 때,

$\frac{1}{2}x^2\ge -\frac{1}{2}x^2+x$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx+\int_1^2\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=1$$

답 **1**

## 214

$f(x)=x^2-1$이라 하면

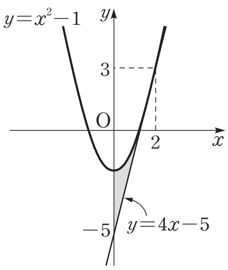
$f'(x)=2x$

$\therefore\ f'(2)=4$

따라서 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=4(x-2)$

$\therefore\ y=4x-5$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^2\{(x^2-1)-(4x-5)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{8}{3}}$

## 215

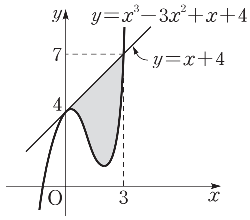
$f(x)=x^3-3x^2+x+4$

라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

$\therefore\ f'(0)=1$

따라서 점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 방정식은




$y-4=1(x-0)\qquad \therefore\ y=x+4$

곡선 $y=x^3-3x^2+x+4$와 직선 $y=x+4$의 교점의 $x$좌표는

$x^3-3x^2+x+4=x+4$에서 $x^3-3x^2=0$

$x^2(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^3\{(x+4)-(x^3-3x^2+x+4)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

답 $\mathbf{\frac{27}{4}}$

**다른풀이** 공식을 이용하면

$$S=\frac{|1|(3-0)^4}{12}=\frac{27}{4}$$

## 216

$$y=|2x^2+2x|=\begin{cases}2x^2+2x & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 0)\\ -2x^2-2x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$$

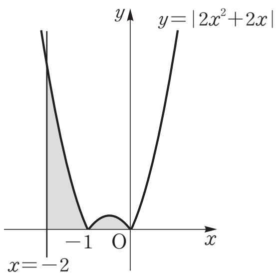
곡선 $y=|2x^2+2x|$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$2x^2+2x=0$에서

$2x(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{-2}^{-1}(2x^2+2x)dx+\int_{-1}^0(-2x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0$$

$$=2$$

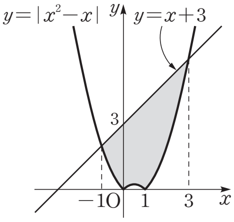
답 **2**

## 217

$$y=|x(x-1)|=\begin{cases} x(x-1) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x(x-1) & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

(i) $x\le 0$ 또는 $x\ge 1$일 때

곡선 $y=x(x-1)$과 직선 $y=x+3$의 교점의 $x$좌표는




$x(x-1)=x+3$에서

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $0\le x\le 1$일 때

곡선 $y=-x(x-1)$과 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$-x(x-1)=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

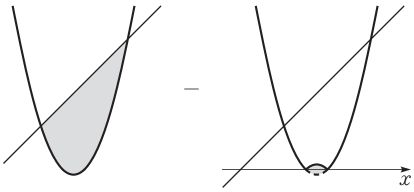
$$S=\int_{-1}^{3}\{x+3-(x^2-x)\}dx-2\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}-2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{31}{3}$$

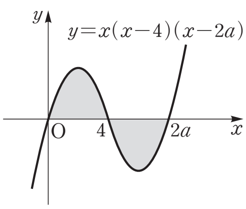
**답** $\frac{31}{3}$

**참고** 구하는 넓이는 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=x+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이에서 곡선 $y=-x^2+x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배를 뺀 것과 같다.




## 218

곡선 $y=x(x-4)(x-2a)$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는




$x(x-4)(x-2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=2a$

곡선과 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{2a}x(x-4)(x-2a)dx=0$$

$$\int_{0}^{2a}\{x^3-(2a+4)x^2+8ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(2a+4)x^3+4ax^2\right]_{0}^{2a}=0$$

$$4a^4-\frac{8}{3}a^3(2a+4)+16a^3=0$$

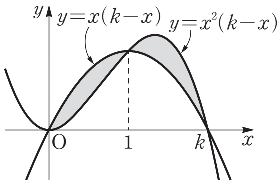
$4a^4-16a^3=0$, $4a^3(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>2$)

**답 4**

## 219

두 곡선의 교점의 $x$좌표는




$x(k-x)=x^2(k-x)$에서

$x(x-1)(k-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=k$

두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같아야 하므로

$$\int_{0}^{k}\{x(k-x)-x^2(k-x)\}dx=0$$

$$\int_{0}^{k}\{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{1}{2}kx^2\right]_{0}^{k}=0$$

$$\frac{1}{4}k^4-\frac{(k+1)k^3}{3}+\frac{1}{2}k^3=0$$

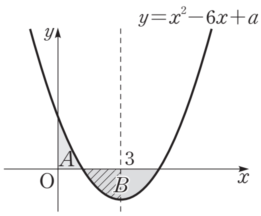
$k^3(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>1$)

**답 2**

## 220

$y=x^2-6x+a$의 그래프의 대칭축은 $x=3$이므로 넓이 $B$는 직선 $x=3$에 의하여 이등분된다.




즉, 오른쪽 그림에서 빗금 친 도형의 넓이는 $A$와 같으므로

$$\int_{0}^{3}(x^2-6x+a)dx=0$$

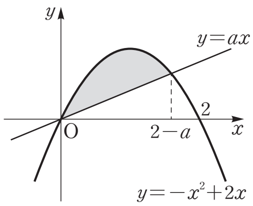
$\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+ax\right]_0^3=0$

$9-27+3a=0$

$\therefore a=6$ **답 6**

## 221

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 $x$좌표는 $-x^2+2x=ax$에서




$x(x+a-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2-a$

곡선 $y=-x^2+2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

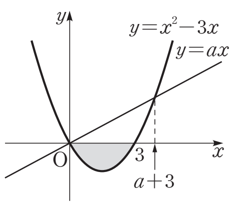
$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{2-a}(-x^2+2x-ax)dx\\&=\int_0^{2-a}\{-x^2+(2-a)x\}dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right]_0^{2-a}\\&=\frac{1}{6}(2-a)^3\end{aligned}$$

$S=2S_1$이므로 $\frac{4}{3}=2\cdot\frac{1}{6}(2-a)^3$

$\therefore (2-a)^3=4$ **답 4**

## 222

직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2-3x$의 교점의 $x$좌표는 $ax=x^2-3x$에서




$x^2-(a+3)x=0$

$x(x-a-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+3$

곡선 $y=x^2-3x$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^2-3x=0$에서 $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 색칠한 부분의 넓이의 2배이므로

$$\int_0^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}dx=-2\int_0^3(x^2-3x)dx$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a+3)x^2\right]_0^{a+3}=-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$\frac{1}{6}(a+3)^3=9$, $(a+3)^3=54$

$\therefore a=3(\sqrt[3]{2}-1)$ **답 $3(\sqrt[3]{2}-1)$**

## 223

기울기가 $m$이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$ $\therefore y=m(x-1)+2$

곡선과 직선의 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 방정식

$x^2=m(x-1)+2$, 즉 $x^2-mx+m-2=0$

의 두 근이다.

$\therefore \alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-2$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=m^2-4m+8$에서

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4m+8}=\sqrt{(m-2)^2+4}$ ($\because \alpha<\beta$)

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta(mx-m+2-x^2)dx\\&=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m-2)^2+4}\}^3\\&=\frac{1}{6}\{(m-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

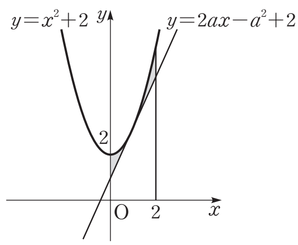
따라서 도형의 넓이는 $m=2$일 때, 즉 직선의 기울기가 2일 때, 최소가 된다. **답 2**

## 224

$f(x)=x^2+2$라 하면 $f'(x)=2x$ $\therefore f'(a)=2a$

따라서 점 $(a, a^2+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^2+2)=2a(x-a)$ $\therefore y=2ax-a^2+2$



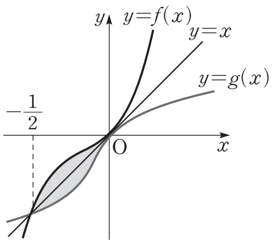
위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^2\{(x^2+2)-(2ax-a^2+2)\}dx$$
$$=\int_0^2 (x^2-2ax+a^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}-4a+2a^2$$
$$=2(a-1)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 도형의 넓이는 $a=1$일 때 최소가 된다. **답 1**

## 225

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.




곡선 $y=2x^3+x^2+x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$2x^3+x^2+x=x$에서 $x^2(2x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_{-\frac{1}{2}}^0 \{(2x^3+x^2+x)-x\}dx$$
$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3+x^2)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^0=\frac{1}{48}$$

**답 $\frac{1}{48}$**

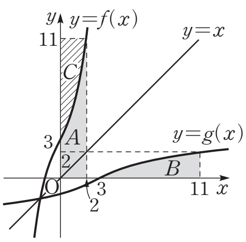
## 226

$f(x)=x^3+3$에서

$f'(x)=3x^2\geq0$,

$f(0)=3,\ f(2)=11$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 3)$, $(2,\ 11)$을 지나는 증가하는 곡선이다.




위의 그림에서 $\int_0^2 f(x)dx=A,\ \int_3^{11} g(x)dx=B$,

빗금 친 부분의 넓이를 $C$라 하면 $B=C$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_{f(0)}^{f(2)} g(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_3^{11} g(x)dx$$
$$=A+B=A+C=2\cdot11=22$$

**답 22**

## 227

(1) 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 $v(t)=0$이므로

$v(t)=-t^2-t+6=0$에서 $t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

$$\therefore (\text{점 P의 위치})=\int_0^2(-t^2-t+6)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+6t\right]_0^2$$
$$=\frac{22}{3}$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3(-t^2-t+6)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+6t\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

(3) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|-t^2-t+6|dt$$
$$=\int_0^2(-t^2-t+6)dt+\int_2^3(t^2+t-6)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+6t\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-6t\right]_2^3$$
$$=\frac{61}{6}$$

**답 (1) $\frac{22}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{61}{6}$**

## 228

정지할 때의 속도는 $v(t)=0$이므로

$v(t)=24-2t=0 \qquad \therefore t=12(\text{초})$

따라서 열차는 제동을 건 뒤 12초 후에 정지한다.

그러므로 열차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{12}|24-2t|dt=\int_0^{12}(24-2t)dt$$
$$=\left[24t-t^2\right]_0^{12}=144(\text{m})$$

**답 144 m**

## 229

(1) 이 물체가 최고 높이에 도달했을 때는 $v(t)=0$이므로

$-10t+60=0$에서 $t=6$(초)

따라서 $t=6$일 때 최고 높이에 도달하게 되며, 그때의 최고 높이 $x$ m는

$$x=\int_0^6(-10t+60)dt$$
$$=\Big[-5t^2+60t\Big]_0^6=180(\text{m})$$

(2) 발사 후 8초 동안 물체가 움직인 거리 $s$ m는

$$s=\int_0^8|-10t+60|dt$$
$$=\int_0^6(-10t+60)dt+\int_6^8(10t-60)dt$$
$$=\Big[-5t^2+60t\Big]_0^6+\Big[5t^2-60t\Big]_6^8=200(\text{m})$$

(3) $t$초 후의 물체의 높이는

$$\int_0^t(-10t+60)dt=\Big[-5t^2+60t\Big]_0^t$$
$$=-5t^2+60t(\text{m})$$

땅에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로

$-5t^2+60t=0$, $t(t-12)=0$

$\therefore t=12$(초)

따라서 $t=12$일 때 속도는

$v(12)=-10\cdot12+60=-60(\text{m/s})$

답 (1) **180 m** (2) **200 m** (3) **−60 m/s**

## 230

점 P의 속도 $v(t)$를 구하면

$$v(t)=\begin{cases}2t & (0\le t\le 1)\\ 2 & (1\le t\le 2)\\ -t+4 & (2\le t\le 5)\end{cases}$$

(1) 시각 $t=5$에서 점 P의 위치를 $x$라 하면

$$x=\int_0^5 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^2 2dt+\int_2^5(-t+4)dt$$
$$=\Big[t^2\Big]_0^1+\Big[2t\Big]_1^2+\Big[-\frac{1}{2}t^2+4t\Big]_2^5$$
$$=\frac{9}{2}$$

(2) $t=4$일 때, 운동 방향이 바뀌므로 움직인 거리는

$$\int_0^4|v(t)|dt$$
$$=\int_0^1|2t|dt+\int_1^2|2|dt+\int_2^4|-t+4|dt$$
$$=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^2 2\,dt+\int_2^4(-t+4)dt$$
$$=\Big[t^2\Big]_0^1+\Big[2t\Big]_1^2+\Big[-\frac{1}{2}t^2+4t\Big]_2^4$$
$$=5$$

(3) $$\int_0^5|v(t)|dt=\int_0^4|v(t)|dt-\int_4^5(-t+4)dt$$
$$=5-\Big[-\frac{1}{2}t^2+4t\Big]_4^5\ (\because (2))$$
$$=5+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{11}{2}$$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ (2) **5** (3) $\boldsymbol{\frac{11}{2}}$

**다른풀이** 넓이를 이용하여 구할 수도 있다.

(1) $$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^5 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$
$$=\frac{9}{2}$$

(2) $(\text{움직인 거리})=\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot2$
$$=5$$

(3) $(\text{움직인 거리})=5+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$
$$=\frac{11}{2}$$

# 연습문제 · 실력 UP

## Ⅰ. 함수의 극한과 연속

### 1

$x \to 2+$일 때, $x>2$이므로

$|x-2|=x-2$

$\therefore \lim_{x \to 2+} \frac{x^2-5x+6}{|x-2|} = \lim_{x \to 2+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2+} (x-3) = -1$

$x \to 2-$일 때, $x<2$이므로

$|x-2|=-(x-2)$

$\therefore \lim_{x \to 2-} \frac{x^2-5x+6}{|x-2|} = \lim_{x \to 2-} \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)}$

$= \lim_{x \to 2-} (-x+3) = 1$

따라서 $\lim_{x \to 2+} \frac{x^2-5x+6}{|x-2|} \neq \lim_{x \to 2-} \frac{x^2-5x+6}{|x-2|}$이므로

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{|x-2|}$은 존재하지 않는다.

**답 존재하지 않는다.**

### 2

$\lim_{x \to 1+} (x+1)=2,\ \lim_{x \to 1-} x^2=1$

따라서 $\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

**답 존재하지 않는다.**

### 3

$\lim_{x \to 0} \frac{10x^2-9x+f(x)}{2x^2+3x-f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{10x-9+\frac{f(x)}{x}}{2x+3-\frac{f(x)}{x}}$

$= \frac{-9+a}{3-a}$

즉, $\frac{-9+a}{3-a}=5$에서 $-9+a=15-5a$

$6a=24 \qquad \therefore a=4$

**답 4**

### 4

$x^3-2x-4$를 인수정리에 의한 조립제법으로 인수분해하면

$x^3-2x-4=(x-2)(x^2+2x+2)$

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} (x^2+2x+2)$

$= 2^2+2\cdot 2+2=10$

**답 10**

### 5

$x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{t \to \infty} \frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$

$= \lim_{t \to \infty} \frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}$

$= \lim_{t \to \infty} \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}} = 2$

**답 ②**

### 6

① $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{x-5} = \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}} = 3$

② $x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{t \to \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$

$= \lim_{t \to \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1} = -\frac{1}{2}$

③ $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=0$

⑤ $x\to-\infty$일 때, $x<0$이므로 $|x|=-x$

$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3|x|+1}{2x-4|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3x+1}{2x+4x+1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{6x+1}$

이때 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{6x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t+1}{-6t+1}=-\frac{1}{3}$ 답 ⑤

## 7

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\to-1-$일 때 $f(x)\to-2$이므로

$a=\lim_{x\to-1-}f(x)=-2$

$x+3=t$로 놓으면 $x\to-2+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to-2+}f(x+3)=\lim_{t\to1+}f(t)=1$ 답 ④

## 8

$-1<x<0$일 때, $[x]=-1$

$0<x<1$일 때, $[x]=0$

$\therefore \lim_{x\to0+}[x]=0,\ \lim_{x\to0-}[x]=-1,$

$\lim_{x\to0+}[x+1]=1,\ \lim_{x\to0-}[x-1]=-2,$

$\lim_{x\to3+}[x-3]=0$

① $\lim_{x\to0-}\frac{x}{[x]}=0$

② $\lim_{x\to0+}\frac{[x]}{x}=0$

③ $\lim_{x\to0-}\frac{[x-1]}{x-1}=2$

④ $\lim_{x\to0+}\frac{x+1}{[x+1]}=1$

⑤ $\lim_{x\to3+}\frac{[x-3]}{x-3}=0$ 답 ③

## 9

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\{-(x-2)^2+k\}=-1+k$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x+5)=8$

이때 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$

$-1+k=8$

$\therefore k=9$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-(x-2)^2+9 & (x>1)\\ 3x+5 & (x\le1)\end{cases}$이므로

$f(4)=-(4-2)^2+9=5$ 답 5

## 10

$\lim_{x\to2+}f(x)=3,\ \lim_{x\to2+}g(x)=-3$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\cdot\lim_{x\to2+}g(x)$

$=3\cdot(-3)=-9$

$\lim_{x\to2-}f(x)=-3,\ \lim_{x\to2-}g(x)=3$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\cdot\lim_{x\to2-}g(x)$

$=(-3)\cdot3=-9$

따라서 $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=-9$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=-9$ 답 $-9$

## 11

$x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-4}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{(t+2)^2-4}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+4)}$

$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+4}\right\}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{1}{t+4}$

$=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

## 12

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}=\frac{3a^2}{2a}$$

즉, $\frac{3a^2}{2a}=6$에서 $a=4$ ($\because a\neq 0$)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}$$
$$=\frac{a-b}{2}$$

즉, $\frac{a-b}{2}=3$에서 $\frac{4-b}{2}=3$

$\therefore b=-2$

$\therefore a+b=4+(-2)=2$

**답** 2

## 13

$\lim_{x\to 0+}f(x-1)$에서 $x-1=t$로 놓으면

$x\to 0+$일 때 $t\to -1+$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x-1)=\lim_{t\to -1+}f(t)=-1$

$\lim_{x\to -1-}f(-x)$에서 $-x=s$로 놓으면

$x\to -1-$일 때 $s\to 1+$이므로

$\lim_{x\to -1-}f(-x)=\lim_{s\to 1+}f(s)=-3$

$\therefore \lim_{x\to 0+}f(x-1)+\lim_{x\to -1-}f(-x)=-1+(-3)$

$=-4$

**답** ②

## 14

$3f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면

$2g(x)=3f(x)-h(x)$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2\{3f(x)-h(x)\}}{-2f(x)+3\{3f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7f(x)-2h(x)}{7f(x)-3h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}{7-3\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}\quad\leftarrow \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty}h(x)}{\lim_{x\to\infty}f(x)}=0$$
$$=\frac{7-2\cdot 0}{7-3\cdot 0}=1$$

**답** 1

## 15

$0<a<2$이므로 $x\to 2$일 때, $x^2-a>0$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{|x^2-a|+a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-a)+a-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

**답** 4

## 16

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(2x-1)^2$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2x^2-1$이므로

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)^2-(2x^2-1)}{(x^2-1)(x^3-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}$$

**답** $\frac{1}{3}$

## 17

$d(x)=\overline{\mathrm{OP}}$
$$=\sqrt{(3x-1)^2+(4x+1)^2}$$
$$=\sqrt{25x^2+2x+2}$$

이므로

$\lim_{x\to\infty}\{d(x)-5x\}$

$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+2x+2}-5x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{25x^2+2x+2}-5x)(\sqrt{25x^2+2x+2}+5x)}{\sqrt{25x^2+2x+2}+5x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{25x^2+2x+2}+5x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{25+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+5}=\frac{2}{5+5}=\frac{1}{5}$ **답 $\frac{1}{5}$**

## 18

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+2}{x-2}=k$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2-ax+2)=0$이므로

$4-2a+2=0$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore k=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

$\therefore ak=3\cdot 1=3$ **답 3**

## 19

$x\to -2$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $b=\sqrt{a-2}$

$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})$

$=2\sqrt{a-2}=6$

따라서 $a=11$, $b=3$이므로

$a+b=14$ **답 14**

## 20

$x\to -3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)=0$이므로

$\sqrt{9+3-3}-3a=0$

$3-3a=0$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore b=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x^2-x-3}+x)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=-\frac{1}{6}$

$\therefore a+b=\frac{5}{6}$ **답 $\frac{5}{6}$**

## 21

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=9$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+1\}=f(1)+1=0$이므로

$f(1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2+f(x)}{x^3-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\{f(x)+1\}}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x+1}$

$=9\cdot\frac{-1}{3}=-3$ **답 $-3$**

## 22

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3, 일차항의 계수가 $a$인 이차함수임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.
즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$
$f(x)=3x^2+ax$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(3x+a)=2$$

$\therefore a=2$

**답 2**

## 23

$\lim_{x\to\infty}\frac{1+5x-3x^2}{3x^2}=-1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}=-1$이므로
함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$

**답 $-1$**

## 24

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{x}=4$에서
$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.
즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(x+a)=a=4$$

따라서 $f(x)=x^2+4x=(x+2)^2-4$이므로
함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=-2$일 때 $-4$이다.

**답 $-4$**

## 25

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2}{x+1}+a\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+a}{(x-1)(x+1)}=b$
$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+a)=0$에서
$2a+1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore b&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+a}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{2(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2(x+1)}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\therefore b-a=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

**답 $\frac{5}{4}$**

## 26

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2-x+3}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수임을 알 수 있다.
또, $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=-1$에서 $x\to -2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.
즉, $\lim_{x\to -2} f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$
$f(x)=2(x+2)(x+a)$ ($a$는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}&=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x+a)}{(x+1)(x+2)}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+a)}{x+1}\\&=\frac{2(-2+a)}{-2+1}=-1\end{aligned}$$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=2(x+2)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(x+2)(2x+5)$이므로
$f(1)=3\cdot 7=21$

**답 21**

## 27

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-6$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

$f(x)=(x-1)(x+1)g(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)g(x)=2g(1)$$

$2g(1)=-6$에서 $g(1)=-3$ …… ㉠

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)g(x)=-2g(-1)$$

$-2g(-1)=2$에서 $g(-1)=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 차수가 가장 낮은 다항함수는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$g(1)=a+b=-3$ …… ㉢

$g(-1)=-a+b=-1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore g(x)=-x-2$

$\therefore f(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$

답 $\boldsymbol{f(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)}$

## 28

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x-\sqrt{x^2+3}}=2$에서 $f(x)$는 일차함수임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=p$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=a(x-2)$ ($a$는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{x+3}$$
$$=\frac{a}{5}=p$$

$\therefore a=5p$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5p(x-2)}{2x-\sqrt{x^2+3}}$$
$$=5p\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x-\sqrt{x^2+3}}$$
$$=5p\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{2-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$
$$=5p=2$$

따라서 $p=\frac{2}{5}$, $a=2$이므로

$f(x)=2(x-2)=2x-4$

답 $\boldsymbol{f(x)=2x-4,\ p=\frac{2}{5}}$

## 29

주어진 부등식의 각 변에 $\frac{1}{x-1}$을 곱하면

(i) $x>1$일 때

$$\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}$$

(ii) $x<1$일 때

$$\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}$$

그런데

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}2x(x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^3-x^2-x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^3-x^2-x-1)=-2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

답 $\boldsymbol{-2}$

## 30

$x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3ax+2}-\sqrt{ax^2+ax+1})$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3at+2}-\sqrt{at^2-at+1})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-3at+2-at^2+at-1}{\sqrt{t^2-3at+2}+\sqrt{at^2-at+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-a)t^2-2at+1}{\sqrt{t^2-3at+2}+\sqrt{at^2-at+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-a)t-2a+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{3a}{t}+\frac{2}{t^2}}+\sqrt{a-\frac{a}{t}+\frac{1}{t^2}}}=b$$

$1-a=0$일 때, 극한값을 가질 수 있으므로 $a=1$

$\therefore b=\frac{-2}{1+1}=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$ **답 0**

## 31

㈎에서 $f(x)$는 이차 이하의 함수임을 알 수 있다.

㈏에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(ax+b)(x-1)$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(ax+b)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(ax+b)$$
$$=a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㈐에서 $f(2)=4$이므로 $2a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 $f(x)=(3x-2)(x-1)$이므로

$f(3)=7\cdot2=14$ **답 14**

## 32

$2x^2+1>0$, $x^4+2>0$이므로 ㈎에서

$$\frac{(2x^2+1)(ax^2-2)}{x^4+2}\le\frac{(2x^2+1)f(x)}{x^4+2}\le\frac{(2x^2+1)(ax^2+2)}{x^4+2}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+1)(ax^2-2)}{x^4+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)\left(a-\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x^4}}=2a$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+1)(ax^2+2)}{x^4+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)\left(a+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x^4}}=2a$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+1)f(x)}{x^4+2}=2a=4$$

$\therefore a=2$

즉, $2x^2-2\le f(x)\le 2x^2+2$에서 $x\ne0$일 때

$$2-\frac{2}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le2+\frac{2}{x^2}$$

그런데 $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x^2}\right)=2$, $\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x^2}\right)=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$ **답 2**

## 33

점 P의 좌표는 $\left(t,\ \frac{2}{t}+1\right)$이므로

$Q(t,\ 0)$, $R\left(0,\ \frac{2}{t}+1\right)$

따라서 두 점 Q, R를 지나는 직선의 기울기 $m(t)$는

$$m(t)=\frac{\frac{2}{t}+1-0}{0-t}=-\frac{t+2}{t^2}$$

$$\therefore \lim_{t\to-2}\frac{t+2}{m(t)}=\lim_{t\to-2}\frac{t+2}{-\frac{t+2}{t^2}}$$
$$=\lim_{t\to-2}(-t^2)$$
$$=-(-2)^2=-4$$

**답 −4**

## 34

원의 반지름의 길이를 $r$라 하면 $x^2+y^2=r^2$

점 $P(x,\ y)$는 원과 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 있으므로

$x^2+y^2=r^2$, $y=\sqrt{x}$를 연립하여 $r$를 구하면

$x^2+x=r^2$ $\quad\therefore r=\sqrt{x^2+x}$ ($\because r>0$)

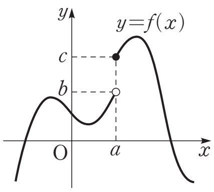
$\therefore \overline{\mathrm{QH}}=r-x=\sqrt{x^2+x}-x$

또한, $\overline{\mathrm{PH}}^2=y^2=(\sqrt{x})^2=x$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}&=\lim_{x\to0+}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{x(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}\\&=\lim_{x\to0+}(\sqrt{x^2+x}+x)=0\end{aligned}$$

답 **0**

## 35




오른쪽 그림에서

$f(a)=c$, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=c$,

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=b$

이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다. 답 ④

## 36

$x=0$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

① $f(0)=0$이고 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x|x|=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속이다.

② $f(0)=0$이고

$\lim\limits_{x\to0+}[x]=0$, $\lim\limits_{x\to0-}[x]=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}x[x]=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}x[x]=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속이다.

③ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(0)=1$이고 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x^2+1)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $f(0)=3$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x}{x^2+x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)}{x(x+1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-3}{x+1}=-3\end{aligned}$$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$이므로 $x=0$에서 불연속이다. 답 ③, ⑤

## 37

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이려면

$x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

이때 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(x^3+bx+2)=1-b$,

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-x^2+x+a)=a-2$이므로

$1-b=a-2=2$

$\therefore a=4$, $b=-1$

$\therefore ab=-4$ 답 **$-4$**

## 38

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1\end{aligned}$$

$\therefore a=1$ 답 **1**

## 39

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)\cdot\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=3f(1)=12$$

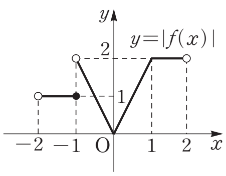
$\therefore f(1)=4$ **답 4**

## 40

ㄱ. $\lim_{x\to-1-}f(x)=1>0$ (참)

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로
$\lim_{x\to1-}f(-x)=\lim_{t\to-1+}f(t)=-2<0$ (참)

ㄷ. 열린구간 $(-2, 2)$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x=-1$에서 그래프가 끊어져 있으므로 불연속인 $x$의 값의 개수는 1이다. (참)




따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

## 41

ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to1-$이므로
$\lim_{x\to1-}f(g(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\cdot\lim_{x\to1+}g(x)$
$=(-1)\cdot0=0$
$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\cdot\lim_{x\to1-}g(x)$
$=1\cdot1=1$
따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$이므로
함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로
$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=0$
$x\to0-$일 때 $f(x)=1$이므로
$\lim_{x\to0-}g(f(x))=g(1)=1$
따라서 $\lim_{x\to0+}g(f(x))\neq\lim_{x\to0-}g(f(x))$이므로
함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ㄱ, ㄴ**

## 42

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-a-1}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+a)}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1+a}{x-1}=c$$

여기서 다시 $x\to1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+x+1+a)=0$이므로

$1+1+1+a=0$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)$$
$$=3=c$$

$\therefore a+b+c=-3+2+3=2$ **답 2**

## 43

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}\frac{|x|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{|x|-1}{(|x|-1)(|x|+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ **답 $\frac{1}{2}$**

## 44

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)$$

$$\lim_{x\to -1+} (x^2-2x+b)=\lim_{x\to -1-} (ax+1)$$

$$1+2+b=-a+1$$

$$\therefore\ a+b=-2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(ii) $x=2$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2+} (ax+1)=\lim_{x\to 2-} (x^2-2x+b)$$

$$2a+1=4-4+b$$

$$\therefore\ 2a-b=-1 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

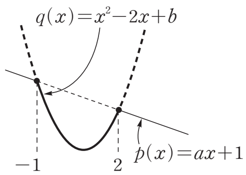
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore\ 2a+b=2\cdot(-1)-1=-3$ **답 $-3$**

**다른풀이** 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이기 위해서는 그래프가 끊어져 있지 않고 연결되어 있어야 한다.

$p(x)=ax+1$, $q(x)=x^2-2x+b$라 하면 $x=-1$, $x=2$일 때, $p(x)$와 $q(x)$의 함숫값이 각각 같아야 그래프는 연결된다.




$p(-1)=q(-1)$에서

$-a+1=1+2+b$

$\therefore\ a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$p(2)=q(2)$에서 $2a+1=4-4+b$

$\therefore\ 2a-b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore\ 2a+b=-3$

## 45

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax}-b}{x-1}=2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(\sqrt{ax}-b)=0$이므로

$\sqrt{a}-b=0$

$\therefore\ b=\sqrt{a} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a}(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}$$

$\dfrac{\sqrt{a}}{2}=2$에서 $\sqrt{a}=4$ $\quad\therefore\ a=16$

$a=16$을 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore\ a+b=16+4=20$ **답 20**

## 46

$x\neq -2$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^2-bx}{x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이므로 $x=-2$에서도 연속이다.

$$\therefore\ f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{ax^2-bx}{x+2}$$

$x\to -2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -2}(ax^2-bx)=0$이므로

$4a+2b=0$ $\quad\therefore\ b=-2a$

$$\therefore\ f(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{ax^2+2ax}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{ax(x+2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2} ax$$

$$=-2a=2$$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a+b=1$ **답 1**

실력 UP 연습문제

## 47

$0<x<2$에서 $0<x^2<4$

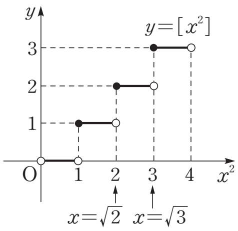
(i) $0<x^2<1$일 때, $[x^2]=0$

(ii) $1\le x^2<2$일 때, $[x^2]=1$

(iii) $2\le x^2<3$일 때, $[x^2]=2$

(iv) $3\le x^2<4$일 때, $[x^2]=3$

따라서 함수 $f(x)=[x^2]$이 불연속인 $x$의 값은 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$의 3개이다.




답 3

## 48

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to2+}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to2-}(2x-4)$

$\therefore\ 4+2a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$

$\therefore\ -4=16+4a+b$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=12$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x-4 & (0\le x<2)\\ x^2-8x+12 & (2\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$f(11)=f(7)=f(3)$

$=3^2-8\cdot3+12=-3$

답 $-3$

## 49

$h(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}=\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$

따라서 $(x+1)(x-3)\ne0$, 즉 $x\ne-1$, $x\ne3$인 모든 실수에서 연속이므로 열린구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$에서 연속이다.

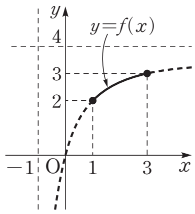
답 $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$

## 50

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수

$f(x)=\dfrac{4x}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+4$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $M=3$, $x=1$에서 최솟값 $m=2$를 가지므로

$M+m=5$

답 5

## 51

$f(x)=x^3+x-9$로 놓으면

① $f(0)f(1)=(-9)\cdot(-7)>0$

② $f(1)f(2)=(-7)\cdot1<0$

③ $f(2)f(3)=1\cdot21>0$

④ $f(3)f(4)=21\cdot59>0$

⑤ $f(4)f(5)=59\cdot121>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 실근 $\alpha$를 갖는다.

답 ②

## 52

$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이다.

$g(-2)=-1-(-2)=1$

$g(-1)=-2-(-1)=-1$

$g(0)=1-0=1$

$g(1)=-2-1=-3$

$g(2)=-\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{5}{2}$

이므로 $g(-2)g(-1)<0$, $g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$, $g(1)g(2)>0$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=x$는 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 3개

## 53

함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=3\cdot(1+k)=3+3k$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=1\cdot(1+k)=1+k$

$f(1)g(1)=3\cdot(1+k)=3+3k$

즉, $3+3k=1+k$이므로

$k=-1$ **답 $-1$**

## 54

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉠

또, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)(x-2)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x-2)g(x)\\&=-g(1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore g(1)=-\frac{1}{2}$ …… ㉢

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x-1)g(x)\\&=g(2)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $g(1)g(2)=-\frac{1}{4}<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉, 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[1, 2]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. **답 3개**

실력 UP 연습문제

## Ⅱ. 미분

### 55

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3-2a+5)-(1-2+5)}{a-1}=\frac{a^3-2a+1}{a-1}=\frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1}=a^2+a-1$$

즉, $a^2+a-1=3$에서 $a^2+a-4=0$

이것은 $a$에 대한 이차방정식이므로 모든 $a$의 값의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $-4$이다.

**답 $-4$**

### 56

① $(\text{주어진 식})=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(1)$

② $(\text{주어진 식})=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot 5-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot 3=5f'(1)-3f'(1)=2f'(1)$

③ $(\text{주어진 식})=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\cdot 2=2f'(1)$

④ $(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right\}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot(\sqrt{x}+1)\right\}=2f'(1)$

⑤ $(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}=2f'(1)$

**답 ①**

### 57

$$(\text{주어진 식})=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-2h)-f(0)\}}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot\frac{1}{2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\cdot(-1)=\frac{1}{2}f'(0)+f'(0)=\frac{3}{2}f'(0)$$

즉, $\frac{3}{2}f'(0)=3$에서 $f'(0)=2$

**답 2**

### 58

$$\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{f(x)+1}{x+1}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x+1}=f'(1)\cdot\frac{f(1)+1}{2}=2\cdot\frac{1+1}{2}=2$$

**답 2**

### 59

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}=f'(1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

**답 $\frac{1}{4}$**

### 60

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(0)+f(h)\}-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=-2$$

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1)+f(h)+2h\}-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2$$
$$=f'(0)+2$$
$$=-2+2=0$$

**답 0**

## 61

① (i) $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}|x|^2=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $f(x)=|x|^2=x^2$이므로

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}x=0$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

② $f(x)=x^2-1$은 모든 점에서 연속이고 미분가능하다.

③ (i) $f(0)=0$이고

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(|x|-x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

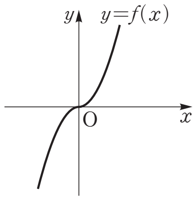
(ii) $$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x-x}{x}=0$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{-x-x}{x}=-2$$

따라서 $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ $f(x)=x|x|$

$$=\begin{cases}x^2 & (x\ge0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$$




따라서 모든 점에서 연속이고 미분가능하다.

⑤ $x=0$에서 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}[x+1]=1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}[x+1]=0$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(x)\ne\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

**답** ③

## 62

① 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로 $f'(2)>0$이다.

② $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

③ $x=3$, $x=5$에서 불연속이다.

④ 불연속인 점과 뾰족점에서는 미분가능하지 않으므로 $x=1$, $x=3$, $x=5$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $f'(x)=0$인 $x$의 값은 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 1개 존재한다.

**답** ⑤

## 63

$f'(a)=2$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2-\frac{g(h)}{h}\right\}$$
$$=2f'(a)-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=2\cdot2-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=4-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=0$$
$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=4$$

**답 4**

## 64

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+(-h))-f(1)}{-h}$

$=0$ (참)

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{|1+h-1|-|1-h-1|}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

## 65

$f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$이므로

$f'(2)=\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+14x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+14)=14$ **답 14**

## 66

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=a$에서 $x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$

따라서 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=a$이므로

$f'(3)=a$ **답** $\boldsymbol{a}$

## 67

(1) (주어진 식)

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-f(x)+f(x)-1}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{(x^2-1)f(x)}{x^2-1}+\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$

$=f(1)+\frac{1}{2}f'(1)$

$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

(2) (주어진 식)

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{(x^3-1)f(1)}{x-1}-\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{(x^2+x+1)f(1)\right.$

$\left.-\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$

$=3f(1)-2f'(1)$

$=3\cdot1-2\cdot3=-3$

**답** (1) $\frac{5}{2}$ (2) $-3$

## 68

$f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\{2-f(x)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\{2-f(x)\}$

$=f'(1)\cdot\{2-f(1)\}=2f'(1)$

즉, $2f'(1)=10$이므로 $f'(1)=5$ **답 5**

## 69

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x+1)-8\}=0$이므로 $f(3)=8$

$x+1=t$라 하면 $x\to 2$일 때 $t\to 3$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3} \quad \leftarrow f(3)=8$$

$$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\cdot\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}$$

$$=\frac{1}{4}f'(3)=5$$

$\therefore f'(3)=20$

$\therefore f(3)+f'(3)=8+20=28$ 답 28

## 70

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh-1\}-f(x)}{h}$$

$$=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2x+f'(0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서 $x\to1$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-f'(x)\}=0$이므로 $f(1)-f'(1)=0$

$\therefore f(1)=f'(1)$

㉠에서 $f'(1)=2+f'(0)$이므로

$f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)-1=14$$

따라서 $f'(1)=30$이므로

$f'(0)=f'(1)-2=28$ 답 28

## 71

ㄱ. $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x+1)^2-1}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{x^2+2x}{x}$

$=\lim_{x\to0+}(x+2)=2$

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(2x+1)-1}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{2x}{x}=2$

즉, $g'(0)$의 값이 존재하므로 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+x+1)=1$

$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2+x-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to0}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄴ이다. 답 ㄴ

## 72

$f(x)=x^3-3x+1$에서 $f'(x)=3x^2-3$

이때 $f'(x)=9$이므로 $3x^2-3=9$

$x^2=4 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=-2$

따라서 두 점은 $(2, 3)$, $(-2, -1)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$ 답 ④

## 73

$f'(x)=(x^2+1)'g(x)+(x^2+1)g'(x)$

$=2xg(x)+(x^2+1)g'(x)$

$\therefore f'(1)=2g(1)+2g'(1)$

$=2\cdot(-1)+2\cdot2=2$ 답 ④

## 74

점 $(1, -1)$이 곡선 $y=x^3+ax^2+bx$ 위의 점이므로

$-1=1+a+b$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉠

곡선 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 2이므로

$y'=3x^2+2ax+b$에서 $3+2a+b=2$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

답 $\boldsymbol{a=1, b=-3}$

## 75

$f(1)=g(1)=5$

$f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$,

$g'(x)=4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7$이므로

$f'(1)=1+2+3+4+5=15$

$g'(1)=4+5+6+7+8=30$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-\{g(1-h)-f(1)\}}{3h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-\{g(1-h)-g(1)\}}{3h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot\frac{2}{3}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot15+\frac{1}{3}\cdot30=20$$ 답 **20**

## 76

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

한편, $f(x)=x^3+ax^2+bx-b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(1)=1+a+b-b=0$ $\therefore a=-1$

$f'(1)=3+2a+b=1$ $\therefore b=0$

$\therefore ab=0$ 답 **0**

## 77

$f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$으로 놓으면

$f(-1)=1-1+1-1+1=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+7x^6+6x^5$이므로

$f'(-1)=-10+9-8+7-6=-8$ 답 **−8**

## 78

$p'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

주어진 그래프에서 $f(2)=-2$이고 $f'(2)=0$이므로

$p'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=-2g'(2)=6$

$\therefore g'(2)=-3$ 답 **−3**

## 79

$f'(x)=g(x)$이므로

$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)=g(x)+g'(x)$

$\therefore g(x)+g'(x)=x^3+3x^2+4x+5$ …… ㉠

$g(x)$는 삼차함수이고 삼차항의 계수는 1이므로

$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax+b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^3+ax^2+bx+c+3x^2+2ax+b=x^3+3x^2+4x+5$

$\therefore x^3+(a+3)x^2+(2a+b)x+b+c$

$=x^3+3x^2+4x+5$

등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$a+3=3$, $2a+b=4$, $b+c=5$

$\therefore a=0$, $b=4$, $c=1$

따라서 $g(x)=x^3+4x+1$이므로

$g'(x)=3x^2+4$

$\therefore g'(-1)=3+4=7$ **답 7**

## 80

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(3)-2=0$

$\therefore f(3)=2$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=1$$

또, $\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}\{g(x)-1\}=0$이므로 $g(3)-1=0$

$\therefore g(3)=1$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=2$$

$y=f(x)g(x)$에서

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=1\cdot1+2\cdot2=5$ **답 5**

## 81

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로 $f(1)-5=0$

$\therefore f(1)=5$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$$

한편, $g(x)=xf(x)$에서

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)$

$=5+9=14$ **답 14**

## 82

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$b+a+b=a+b^2$

$b^2-2b=0$, $b(b-2)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $b=2$ …… ㉠

또, 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^3+b^2)-(a+b^2)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}a(x^2+x+1)=3a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(bx^2+ax+b)-(a+b^2)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(bx+a+b)}{x-1}\ (\because a+b^2=2b+a)=\lim_{x\to1-}(bx+a+b)=2b+a$$

즉, $3a=2b+a$에서 $a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\neq0$이므로 $a=2$, $b=2$

$\therefore f'(1)=6$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)=18$$

**답 18**

## 83

다항식 $x^{10}-ax+3b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}-ax+3b=(x+1)^2Q(x)+3x-2$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+a+3b=-3-2$

$\therefore a+3b=-6$ ...... ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$10x^9-a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+3$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10-a=3 \qquad \therefore a=-13$

$a=-13$을 ㉡에 대입하면 $b=\dfrac{7}{3}$

$\therefore 3b-a=3\cdot\dfrac{7}{3}-(-13)=20$

답 **20**

## 84

주어진 식을 변형하면

$f'(x)\{f'(x)+2\}-8f(x)=12x^2-5$

$f(x)$가 $n$차식일 때, $f'(x)$는 $(n-1)$차식이므로 좌변은 $(n-1)+(n-1)$, 즉 $(2n-2)$차식이다.

또, 우변은 2차식이므로

$2n-2=2 \qquad \therefore n=2$

따라서 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이것을 주어진 식에 대입하면

$(2ax+b)(2ax+b+2)$

$=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5$

$\therefore 4a^2x^2+4a(b+1)x+b(b+2)$

$\quad =(8a+12)x^2+8bx+8c-5$

등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$4a^2=8a+12$ ...... ㉠

$4a(b+1)=8b$ ...... ㉡

$b(b+2)=8c-5$ ...... ㉢

㉠에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

㉡, ㉢에 대입하면

$a=-1$일 때, $b=-\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{5}{9}$

$a=3$일 때, $b=-3$, $c=1$

$\therefore f(x)=-x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{9}$

또는 $f(x)=3x^2-3x+1$

답 $\boldsymbol{f(x)=-x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{9}}$

**또는** $\boldsymbol{f(x)=3x^2-3x+1}$

## 85

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+2}=2$에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차함수임을 알 수 있다.

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

(다) $f(0)=0$이므로 $b=0$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2+ax$ ...... ㉠

(나) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$

$=f'(1)\cdot\dfrac{1}{2}=4$

이므로 $f'(1)=8$ ...... ㉡

㉠에서 $f'(x)=3x^2+4x+a$,

㉡에서 $f'(1)=8$이므로

$3+4+a=8 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+x$이므로

$f(1)=1+2+1=4$

답 **4**

## 86

$\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{4}{n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-4h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{f(1-4h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot 3 -\lim_{h\to 0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\cdot(-4)$$

$=3f'(1)+4f'(1)=7f'(1)$

$f'(x)=5x^4-4x^3+3x^2$이므로 $f'(1)=4$

$\therefore$ (주어진 식)$=7f'(1)=7\cdot 4=28$ **답** ③

## 87

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $g(x)$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+g(x)$

이때 $g(x)$의 차수는 2 이하이므로

$g(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $(x-1)^2(x-2)Q(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $ax^2+bx+c$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

즉, $ax^2+bx+c$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$ax^2+bx+c=a(x-1)^2$

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2$ …… ㉠

한편, $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 2이므로

㉠에서 $f(2)=a(2-1)^2=2$

$\therefore a=2$

따라서 $g(x)=2(x-1)^2=2x^2-4x+2$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+2h)-g(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+2h)-g(2)+g(2)-g(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+2h)-g(2)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to 0}\frac{g(2-h)-g(2)}{-h}$$

$=2g'(2)+g'(2)=3g'(2)$

이때 $g'(x)=4x-4$이므로

$g'(2)=4\cdot 2-4=4$

$\therefore 3g'(2)=12$ **답** 12

## 88

$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ …… ㉠

(i) $n=1$일 때, $y'=f'(x)$

따라서 $n=1$일 때, ㉠은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$y'=k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)$이므로

$y=\{f(x)\}^{k+1}=\{f(x)\}^k f(x)$에서

$y'=[\{f(x)\}^k]'f(x)+\{f(x)\}^k f'(x)$

$=k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)f(x)+\{f(x)\}^k f'(x)$

$=k\{f(x)\}^k f'(x)+\{f(x)\}^k f'(x)$

$=(k+1)\{f(x)\}^k f'(x)$

따라서 ㉠은 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다. **답** 풀이 참조

## 89

$f(x)=x^3+ax$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1+a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3+a$

그런데 접선의 기울기가 6이므로

$f'(1)=3+a=6$

$\therefore a=3$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=6(x-1)$

$\therefore y=6x-2$

따라서 $b=-2$이므로

$a+b=3+(-2)=1$ **답** 1

## 90

$f(x)=x^3-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

실력 UP 연습문제

따라서 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(-1, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{3}\{x-(-1)\}$

$\therefore x+3y+7=0$ 답 ⑤

## 91

$f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$

접점의 좌표를 $(\alpha, \alpha^2-3\alpha+4)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$f'(\alpha)=2\alpha-3=5 \qquad \therefore \alpha=4$

따라서 접점의 좌표는 $(4, 8)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-8=5(x-4)$

$\therefore y=5x-12$ 답 ⑤

## 92

$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, b)$에서의 접선이 $x$축과 평행하므로 접선의 기울기는 0이다. 즉,

$f'(a)=3a^2-6a=0, \ 3a(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a\neq0$) ← $a=0$이면 $b=0$ (점 $(a, b)$가 원점)

점 $(2, b)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=b \qquad \therefore b=8-12=-4$

$\therefore a+b=2+(-4)=-2$ 답 $-2$

## 93

$f(x)=x^3-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t, t^3-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2$

따라서 기울기가 $3t^2$이고 점 $(t, t^3-2)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-(t^3-2)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-2$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=-2t^3-2, \ t^3=1 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x-4$

이고, 이 직선은 $x$축과 점 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$에서 만난다.

$\therefore a=\frac{4}{3}$ 답 ②

## 94

$f(x)=x^3+ax+3$, $g(x)=x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점에서 접하므로 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면 $f(t)=g(t)$

$t^3+at+3=t^2+2$ ...... ㉠

두 곡선의 접점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$

$3t^2+a=2t \qquad \therefore a=-3t^2+2t$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+(-3t^2+2t)t+3=t^2+2$

$2t^3-t^2-1=0, \ (t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because 2t^2+t+1>0$)

따라서 ㉡에서 $a=-3+2=-1$ 답 $-1$

## 95

$f(x)=x^3+ax^2$, $g(x)=-x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax$, $g'(x)=-2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 점 $(t, -t^2+4)$를 지나므로 $f(t)=g(t)=-t^2+4$

$t^3+at^2=-t^2+4$ ...... ㉠

두 곡선의 접점 $(t, -t^2+4)$에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(t)=g'(t)$

$3t^2+2at=-2t$

$3t+2a=-2$ ($\because$ ㉠에서 $t\neq0$)

$2a=-3t-2 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}t-1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+\left(-\frac{3}{2}t-1\right)t^2=-t^2+4$

$-\frac{1}{2}t^3=4, \ t^3=-8, \ t^3+8=0$

$(t+2)(t^2-2t+4)=0 \qquad \therefore t=-2$

㉡에서 $a=-\frac{3}{2}\cdot(-2)-1=2$

$\therefore a+t=2+(-2)=0$ **답** ②

## 96

함수 $f(x)=x^4-4x^2+1$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다. 또한,

$f(0)=f(2)=1$

이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-8x$이므로

$f'(c)=4c^3-8c=0,\ 4c(c^2-2)=0$

$\therefore c=\sqrt{2}\ (\because 0<c<2)$ **답** $\sqrt{2}$

## 97

함수 $f(x)=-x^2+kx$에 대하여 닫힌구간 $[1, 3]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수가 2이므로

$f'(x)=-2x+k$에서

$f'(2)=-4+k=0 \qquad \therefore k=4$

$f(x)=-x^2+4x$에 대하여 닫힌구간 $[1, 5]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 $c$이므로

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{-5-3}{4}=-2=f'(c)$$

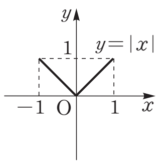
$f'(c)=-2c+4=-2,\ -2c=-6$

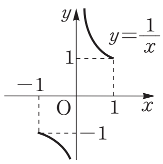
$\therefore c=3$

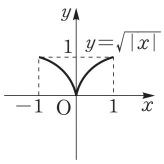
$\therefore k+c=4+3=7$ **답** 7

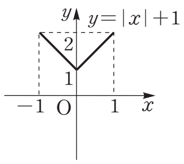
## 98

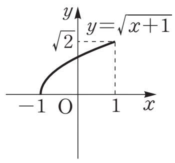
닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하면 평균값 정리가 성립한다.

①



②



③


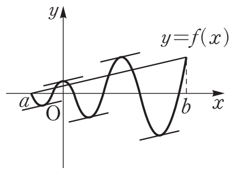

④



⑤



①, ③, ④는 $x=0$에서 미분가능하지 않고, ②는 $x=0$에서 연속이 아니므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 평균값 정리가 성립하는 것은 ⑤이다. **답** ⑤

**참고** ④ $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\geq 0) \\ -x+1 & (x<0) \end{cases}$

## 99




함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 $c\ (a<c<b)$의 개수는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 기울기가 같은 접선의 접점의 개수와 같으므로 위의 그림에서와 같이 5이다.

**답** 5

## 100

$y=x^3+kx^2-(2k-1)x+k+3$을 $k$에 대한 내림차순으로 정리하면

$(x-1)^2k+x^3+x+3-y=0$

이것이 $k$에 대한 항등식이므로

$(x-1)^2=0,\ x^3+x+3-y=0$

$\therefore x=1,\ y=5$

즉, 주어진 곡선은 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 5)$를 지난다.

$f(x)=x^3+kx^2-(2k-1)x+k+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2kx-(2k-1)$

점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3+2k-2k+1=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 4이고 점 $(1, 5)$를 지나는 직선의 방정식이므로

$y-5=4(x-1)$

$\therefore y=4x+1$ 답 $\boldsymbol{y=4x+1}$

## 101

$\lim_{x\to2}\frac{f(x^3)}{x-2}=24$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\lim_{x\to2}f(x^3)=0$

그런데 함수 $f(x^3)$은 연속함수이므로

$f(2^3)=0 \quad \therefore f(8)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x^3)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{f(x^3)-f(8)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x^3)-f(8)\}(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\&=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8}\cdot(x^2+2x+4)\right\}\\&=f'(8)\cdot12\\&=24\end{aligned}$$

$12f'(8)=24$이므로 $f'(8)=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(8,\ f(8))$, 즉 $(8,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=2(x-8) \quad \therefore y=2x-16$

답 $\boldsymbol{y=2x-16}$

## 102

$f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ a^4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3$

따라서 접선의 방정식은

$y-a^4=4a^3(x-a)$

$\therefore y=4a^3x-3a^4$

이 직선과 $y$축의 교점의 좌표는 $(0,\ -3a^4)$이므로

$h(a)=-3a^4$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{h(\sqrt{a^2+a})-h(a)}{a^3}&=\lim_{a\to\infty}\frac{-3(\sqrt{a^2+a})^4-(-3a^4)}{a^3}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{-3(a^2+a)^2+3a^4}{a^3}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{-6a^3-3a^2}{a^3}\\&=-6\end{aligned}$$

답 ①

## 103

$f(x)=x^3+ax^2-a-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3+2a$

따라서 접선의 방정식은

$y=(3+2a)(x-1)$

이 직선이 곡선 $y=f(x)$와 점 $(2,\ k)$에서 다시 만나므로

$k=3+2a,\ f(2)=k$

$\therefore f(2)=3+2a$

그런데 $f(2)=8+4a-a-1=3a+7$이므로

$3a+7=3+2a \quad \therefore a=-4$

$\therefore k=3+2\cdot(-4)=-5$ 답 ①

## 104

$f(x)=x^3+3x^2+ax-1$로 놓으면

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

$f'(x)=3x^2+6x+a=3(x+1)^2-3+a$

$f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-3+a$를 갖는다.

그런데 $f'(x)$의 최솟값이 5이므로

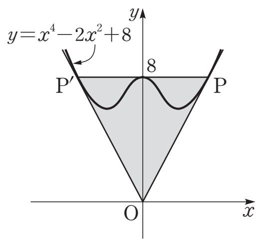
$-3+a=5 \quad \therefore a=8$ 답 8

## 105

$f(x)=x^4-2x^2+8$로 놓으면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4-2t^2+8)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=4t^3-4t$




따라서 접선의 방정식은

$y-(t^4-2t^2+8)=(4t^3-4t)(x-t)$

$\therefore y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+8$

이 직선이 원점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-3t^4+2t^2+8$, $3t^4-2t^2-8=0$

$(t^2-2)(3t^2+4)=0$, $t^2=2$

$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$

따라서 두 접점은 $\mathrm{P}'(-\sqrt{2}, 8)$, $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 8)$이므로 삼각형 $\mathrm{OPP}'$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 8=8\sqrt{2}$ 답 $8\sqrt{2}$

## 106

$f(x)=x^3-3x^2-8x-4$, $g(x)=3x^2+7x+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-8$, $g'(x)=6x+7$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면 $f(t)=g(t)$이므로 …… ㉠

$t^3-3t^2-8t-4=3t^2+7t+4$

$t^3-6t^2-15t-8=0$, $(t+1)^2(t-8)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=8$

또한, $f'(t)=g'(t)$이므로 …… ㉡

$3t^2-6t-8=6t+7$, $3t^2-12t-15=0$

$3(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 $t$의 값은

$t=-1$

또는 $(-1, f(-1))$

따라서 점 $\mathrm{P}(-1, g(-1))$, 즉 $\mathrm{P}(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=g'(-1)=1$

이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-1$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 기울기가 $-1$이고 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선의 방정식이므로

$y-0=-\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-x-1$ 답 $\boldsymbol{y=-x-1}$

## 107

$f(x)=x^3-5x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-5$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-5=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x-2$

이 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 $x$좌표를 구하면

$x^3-5x=-2x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 점 B의 $x$좌표는 $-2$이므로 $\mathrm{B}(-2, 2)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+\{2-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{9+36}$

$=3\sqrt{5}$ 답 ④

## 108

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1, -1-a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1-a)=(3+a)\{x-(-1)\}$

$\therefore y=(3+a)x+2$ …… ㉠

직선 ㉠이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 $x$좌표를 구하면

$x^3+ax=(3+a)x+2$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 B의 $x$좌표는 2이다. $\therefore b=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(2, 8+2a)$에서의 접선의

기울기는 $f'(2)=12+a$이므로 접선의 방정식은
$y-(8+2a)=(12+a)(x-2)$
$\therefore y=(12+a)x-16$ …… ㉡
직선 ㉡이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 $x$좌표를 구하면
$x^3+ax=(12+a)x-16$
$x^3-12x+16=0$, $(x-2)^2(x+4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-4$
따라서 점 C의 $x$좌표는 $-4$이다. $\therefore c=-4$
$f(2)+f(-4)=-80$이므로
$8+2a+(-64-4a)=-80$, $-2a=-24$
$\therefore a=12$ 답 ③

## 109

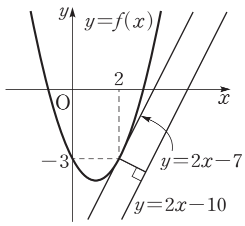
$f(x)=x^3-3x^2+2x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x+2$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=-x+2$에 평행한 접선은 기울기가 $-1$인 직선이므로 이 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+2t)$라 하면
$f'(t)=-1$
$3t^2-6t+2=-1$
$3(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선의 방정식은
$y-0=-(x-1)$ $\therefore y=-x+1$ …… ㉠
직선 ㉠을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=-(x-a)+1$
$\therefore y=-x+a+1+b$
이고, 이것이 직선 $y=-x+2$와 일치하므로
$a+1+b=2$
$\therefore a+b=1$ 답 **1**

## 110

$f(x)=-x^3+3x^2-x+1$로 놓으면
$f'(x)=-3x^2+6x-1$
접점의 좌표를
$(t,\ -t^3+3t^2-t+1)$
이라 하면 접선의 기울기가 $-1$이므로
$f'(t)=-3t^2+6t-1=-1$
$-3t^2+6t=0$, $-3t(t-2)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=2$
따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-1=-(x-0)$, $y-3=-(x-2)$
$\therefore y=-x+1$, $y=-x+5$
위의 두 직선 사이의 거리는 점 $(0,\ 1)$과 직선 $y=-x+5$, 즉 $x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|0+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $\mathbf{2\sqrt{2}}$

## 111

$f(x)=x^2-2x-3$으로 놓으면 $f'(x)=2x-2$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-10$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=2t-2=2$ $\therefore t=2$
따라서 접점의 좌표는 $(2,\ -3)$이다.




곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 $y=2x-10$, 즉 $2x-y-10=0$ 사이의 거리의 최솟값은 점 $(2,\ -3)$과 직선 $2x-y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|2\cdot2-(-3)-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 $\mathbf{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$

## 112

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1,\ x+3]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1,\ x+3)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+3)-f(x-1)}{(x+3)-(x-1)}=f'(c)$$

를 만족시키는 실수 $c$가 열린구간 $(x-1, x+3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \longrightarrow \infty$이면 $c \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+3)-f(x-1)\}$$

$$=4\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+3)-f(x-1)}{(x+3)-(x-1)}=4\lim_{x\to\infty}f'(c)$$

$$=4\lim_{c\to\infty}f'(c)=4\cdot 2=8$$

답 8

## 113

$f(x)=x^3+ax^2+2ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

삼차함수 $f(x)$가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot 2a=a^2-6a\le 0$$

$a(a-6)\le 0$ $\quad\therefore 0\le a\le 6$

따라서 실수 $a$의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로

$M=6,\ m=0$

$\therefore M-m=6-0=6$

답 ④

## 114

$f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 닫힌구간 $[1, 3]$이므로 이차부등식 $f'(x)\ge 0$의 해가 $1\le x\le 3$이다. 즉,

$$f'(x)=-3(x-1)(x-3)$$
$$=-3x^2+12x-9$$

따라서 $2a=12$, $b=-9$이므로 $a=6$

$\therefore a+b=6+(-9)=-3$

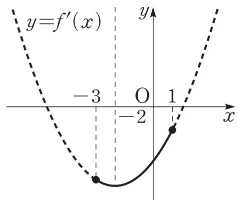
답 $-3$

## 115

$f(x)=x^3+6x^2+ax-2$에서

$f'(x)=3x^2+12x+a$

삼차함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 감소하려면 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$f'(1)=3+12+a\le 0$

$\therefore a\le -15$ …… ㉠

$f'(-3)=27-36+a\le 0$

$\therefore a\le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le -15$

답 $a\le -15$

## 116

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$f(x)=x^3+kx^2+3kx-2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+3k$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3\cdot 3k=k^2-9k\le 0$$

$k(k-9)\le 0$ $\quad\therefore 0\le k\le 9$

따라서 정수 $k$는 0, 1, 2, …, 9의 10개이다.

답 10

## 117

임의의 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

$\therefore k<0$

$f(x)=kx^3-x^2+3kx+k$에서

$f'(x)=3kx^2-2x+3k$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차

실력 UP 연습문제

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3k\cdot3k=1-9k^2\le0$

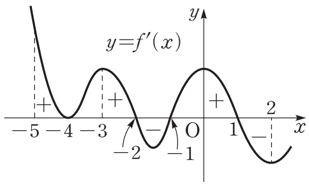
$9k^2-1\ge0$, $(3k+1)(3k-1)\ge0$

$k\le-\frac{1}{3}$ 또는 $k\ge\frac{1}{3}$

$\therefore k\le-\frac{1}{3}$ ($\because k<0$)

따라서 실수 $k$의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$이다. **답** $-\frac{1}{3}$

## 118




$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로

닫힌구간 $[-5, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-5$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

ㄱ. $f(x)$는 닫힌구간 $[-5, -4]$에서 증가한다. (거짓)

ㄴ. $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 감소한다. (참)

ㄷ. $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 증가하므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

## 119

$f(x)=x^3+9x^2+15x+6$에서

$f'(x)=3x^2+18x+15$

$=3(x+5)(x+1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-5$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-5$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 31<br>극대 | ↘ | $-1$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 극댓값 31,

$x=-1$에서 극솟값 $-1$을 갖는다.

$\therefore M=31$, $m=-1$

$\therefore M-m=31-(-1)=32$ **답** ③

## 120

$f(x)=-2x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-8+a$<br>극소 | ↗ | $a$<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $-8+a$를 갖는다. 그런데 $f(x)$가 $x=b$에서 극솟값 1을 가지므로

$b=-2$, $-8+a=1$ $\therefore a=9$

$\therefore a+b=9+(-2)=7$ **답** ②

## 121

$f(x)=x^3+ax^2+bx-9$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $x=-1$, $x=3$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-3)$

$=3x^2-6x-9$

따라서 $2a=-6$, $b=-9$이므로 $a=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x-9$

$f(-1)=-1-3+9-9=-4$,

$f(3)=27-27-27-9=-36$

이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$|f(-1)-f(3)|=|-4-(-36)|$

$=32$ 답 32

## 122

$f(x)=x^3+3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $27+a$ 극대 | ↘ | $-5+a$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $27+a$, $x=1$에서 극솟값 $-5+a$를 갖는다.

극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로

$(27+a)+(-5+a)=0$

$22+2a=0$ $\therefore a=-11$ 답 $-11$

## 123

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x$에서

$f'(x)=3x^2-3ax-6a^2=3(x^2-ax-2a^2)$

$=3(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-a$ 또는 $x=2a$이고, $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 각각 1개씩 가지므로 $f(x)$는 $x=-a$와 $x=2a$에서 극값을 갖는다.

$f(-a)=-a^3-\frac{3}{2}a^3+6a^3=\frac{7}{2}a^3$,

$f(2a)=8a^3-6a^3-12a^3=-10a^3$

이고, 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$이므로

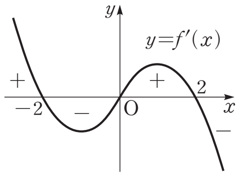
$|f(-a)-f(2a)|=\frac{1}{2}$

$\left|\frac{7}{2}a^3-(-10a^3)\right|=\frac{1}{2}$, $\left|\frac{27}{2}a^3\right|=\frac{1}{2}$, $|a^3|=\frac{1}{27}$

$a^3=\frac{1}{27}$ ($\because a>0$) $\therefore a=\frac{1}{3}$ 답 ②

## 124

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $-2$, $0$, $2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



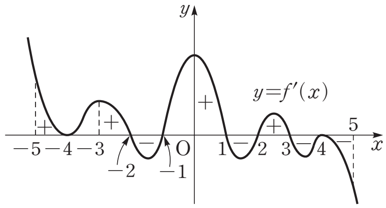

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 $f(x)$가 극댓값을 갖는 $x$는 $-2$, $2$의 2개, 극솟값을 갖는 $x$는 0의 1개이다.

$\therefore m=2$, $n=1$

$\therefore m-n=2-1=1$ 답 1

## 125




닫힌구간 $[-5, 5]$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값 $-4$, $-2$, $-1$, $1$, $2$, $3$, $4$ 중에서

(i) $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌는 $x$의 값은 $-2$, $1$, $3$

즉, $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$, $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$M=-2+1+3=2$

(ii) $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌는 $x$의 값은 $-1$, $2$

즉, $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$m=-1+2=1$

$\therefore M-m=2-1=1$ 답 1

## 126

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $x=0$, $x=2$이다. 즉,
$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$
따라서 $2a=-6$, $b=0$이므로 $a=-3$
$\therefore f(x)=x^3-3x^2+c$
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $c$ 극대 | $\searrow$ | $-4+c$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $c$를 갖는다. 그런데 극댓값이 5이므로 $c=5$
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은
$-4+c=-4+5=1$ **답 1**

## 127

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$에서
$f'(x)=x^2-2x-3$
$=(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{3}$ 극대 | $\searrow$ | $-9$ 극소 | $\nearrow$ |

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $-9$를 갖는다.
$\therefore a=3, b=-9$
$f'(2)=-3$, $f(2)=-\frac{22}{3}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 방정식은
$y-\left(-\frac{22}{3}\right)=-3(x-2)$
$\therefore y=-3x-\frac{4}{3}$

점 $(3, -9)$와 직선 $y=-3x-\frac{4}{3}$, 즉
$9x+3y+4=0$ 사이의 거리는
$\frac{|9\cdot3+3\cdot(-9)+4|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{90}}$ $\therefore d=\frac{4}{\sqrt{90}}$
$\therefore 90d^2=90\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{90}}\right)^2=16$ **답 16**

## 128

$g(x)=(x^3+2)f(x)$ $\cdots\cdots$ ㉠
에서
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$ $\cdots\cdots$ ㉡
미분가능한 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로 $g'(1)=0$, $g(1)=24$
$x=1$을 ㉠에 대입하면
$g(1)=3f(1)$, $24=3f(1)$ $\therefore f(1)=8$
$x=1$을 ㉡에 대입하면
$g'(1)=3f(1)+3f'(1)$
$0=3\cdot8+3f'(1)$ $\therefore f'(1)=-8$
$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$ **답 16**

## 129

$f(x)=x^3+ax^2+bx+100$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-6$에서 극값을 가지므로 $f'(-6)=0$
$108-12a+b=0$ $\therefore 12a-b=108$ $\cdots\cdots$ ㉠
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-3, f(-3))$에서의 접선의 기울기가 9이므로 $f'(-3)=9$
$27-6a+b=9$ $\therefore 6a-b=18$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=15$, $b=72$
$\therefore a+b=15+72=87$ **답 87**

## 130

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(1)=6$
$3+2a+b=6$ $\therefore 2a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-1)=0$

$3-2a+b=0 \qquad \therefore -2a+b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=0$

$\therefore f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2+c$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$\therefore y=f'(1)x-f'(1)+f(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢이 $y=6x-1$이므로

$f'(1)=6,\ -f'(1)+f(1)=-1$

$\therefore f(1)=5$

$f(1)=1+\dfrac{3}{2}+c=5 \qquad \therefore c=\dfrac{5}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}$이므로

$f(3)=27+\dfrac{27}{2}+\dfrac{5}{2}=43$ **답 43**

## 131

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서 극한값이 존재하고, $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$

그런데 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$f(0)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq 0$)

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

또한, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-2$

에서 $f'(0)=-2$이므로 $c=-2$

$\therefore f(x)=ax^3+bx^2-2x,\ f'(x)=3ax^2+2bx-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 $-3$을 가지므로

$f'(1)=0,\ f(1)=-3$

$3a+2b-2=0,\ a+b-2=-3$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-5$

따라서 $f(x)=4x^3-5x^2-2x$이므로

$f(-1)=-4-5+2=-7$ **답 −7**

## 132

$g(x)=f(x)-kx$에서

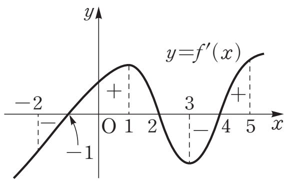
$g'(x)=f'(x)-k=x^2-1-k$

미분가능한 함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로 $g'(-3)=0$

$9-1-k=0 \qquad \therefore k=8$ **답 ⑤**

## 133

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $-1$, $2$, $4$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.




| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

① $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 증가한다. (거짓)

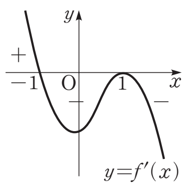
② $f(x)$는 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 감소한다. (거짓)

③ $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다. (거짓)

④ $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이다. (참)

⑤ $f(x)$는 3개의 극값을 갖는다. (거짓) **답 ④**

## 134




함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | | ↘ |

함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 증가, 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소, 반닫힌 구간 $[1,\ \infty)$에서 감소한다.

또한 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서의 미분계수가 0이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 0이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다. **답** ④

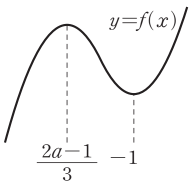
## 135

$f(x)=x^3+(2-a)x^2-(2a-1)x$에서

$$f'(x)=3x^2+2(2-a)x-(2a-1)$$
$$=(x+1)\{3x-(2a-1)\}$$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=\dfrac{2a-1}{3}$ 또는 $x=-1$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{2a-1}{3}$에서 극댓값을 갖는다. 즉,




$\dfrac{2a-1}{3}<-1$

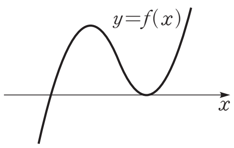
$2a-1<-3$ $\quad\therefore a<-1$ **답 $a<-1$**

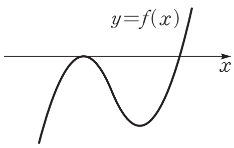
**참고** $3x^2+2(2-a)x-(2a-1)$의 인수분해는 조립제법을 이용한다.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $3$ | $2(2-a)$ | $-(2a-1)$ |
| | | $-3$ | $-1+2a$ |
| | $3$ | $1-2a$ | $0$ |

## 136

삼차함수 $f(x)=x^3-3ax^2+4a$의 그래프가 $x$축에 접하므로 다음 그림과 같이 극댓값 또는 극솟값이 0이다.




$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2a\ (a>0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=2a$에서 극솟값을 갖는다. 이때 극댓값 $f(0)=4a\neq0$이므로 극솟값 $f(2a)=0$이다. 즉
$f(2a)=8a^3-12a^3+4a=0$
$-4a^3+4a=0,\ -4a(a+1)(a-1)=0$
$\therefore a=1\ (\because a>0)$ **답 1**

## 137

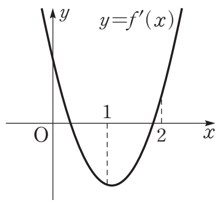
$f(x)=-2x^3+ax^2-24x-1$에서
$f'(x)=-6x^2+2ax-24$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않을 필요충분조건은 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 갖는 것이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-6)\cdot(-24)=a^2-144\leq0$

$(a+12)(a-12)\leq0$ $\quad\therefore -12\leq a\leq12$
따라서 자연수 $a$의 최댓값은 12이다. **답 12**

## 138

$f(x)=x^3+(k-3)x^2+(2-k)x-3$에서
$f'(x)=3x^2+2(k-3)x+(2-k)$
삼차함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극댓값, $1<x<2$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<1$에서 실근 한 개, $1<x<2$에서 실근 한 개를 가져야 하므로 오른쪽 그림에서




$f'(0)=2-k>0$ $\quad\therefore k<2$ ...... ㉠
$f'(1)=3+2(k-3)+(2-k)<0$
$\therefore k<1$ ...... ㉡
$f'(2)=12+4(k-3)+(2-k)>0$
$\therefore k>-\dfrac{2}{3}$ ...... ㉢
㉠~㉢의 공통 범위를 구하면
$-\dfrac{2}{3}<k<1$ **답** ②

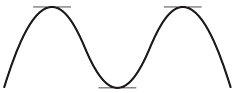
## 139

$f(x)=-3x^4+ax^3-24x^2+3$에서

$f'(x)=-12x^3+3ax^2-48x$

$\quad=-3x(4x^2-ax+16)$

$f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식



극댓값 2개, 극솟값 1개

$4x^2-ax+16=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$은 $4x^2-ax+16=0$의 근이 될 수 없으므로

$4x^2-ax+16=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4\cdot4\cdot16>0$, $a^2-16^2>0$

$(a+16)(a-16)>0 \qquad \therefore a<-16$ 또는 $a>16$

따라서 자연수 $a$의 최솟값은 17이다. **답** ⑤

## 140

$f(x)=x^3-3x-5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-3$ | $\searrow$ | $-7$ 극소 | $\nearrow$ | $13$ |

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-7$, $x=3$에서 최댓값 13을 갖는다.

$\therefore M=13,\ m=-7$

$\therefore M-m=13-(-7)=20$ **답** 20

## 141

$f(x)=x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $2$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-16+a$ | $\searrow$ | $-32+a$ 극소 | $\nearrow$ | $-25+a$ |

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $-32+a$, $x=2$에서 최댓값 $-16+a$를 갖는다.

그런데 $f(x)$의 최솟값이 $-20$이므로

$-32+a=-20 \qquad \therefore a=12$

따라서 $f(x)$의 최댓값은

$-16+a=-16+12=-4$ **답** ①

## 142

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-2+a$ | $\searrow$ | $-4+a$ 극소 | $\nearrow$ | $16+a$ |

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-4+a$, $x=4$에서 최댓값 $16+a$를 갖는다.

그런데 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 20이므로

$(16+a)+(-4+a)=20$, $2a+12=20$

$2a=8 \qquad \therefore a=4$ **답** 4

## 143

$f(x)=ax^3-3ax+2b\ (a>0)$에서

$f'(x)=3ax^2-3a=3a(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2a+2b$ | $\searrow$ | $-2a+2b$ 극소 | $\nearrow$ | $18a+2b$ |

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-2a+2b$, $x=3$에서 최댓값 $18a+2b$를 갖는다.
그런데 $f(x)$의 최댓값이 22, 최솟값이 2이므로
$18a+2b=22$, $-2a+2b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$
$\therefore ab=1\cdot 2=2$ **답 2**

## 144

$f(x)=x^4-4a^3x+1$에서
$f'(x)=4x^3-4a^3=4(x-a)(x^2+ax+a^2)$
$x^2+ax+a^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2>0$ ($\because$ $a>0$)이므로
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=a$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(a)$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $f(a)$를 갖는다.
그런데 $f(x)$의 최솟값이 $-47$이므로
$f(a)=a^4-4a^4+1=-3a^4+1=-47$
$a^4=16$ $\quad\therefore a=2$ ($\because$ $a>0$) **답 ②**

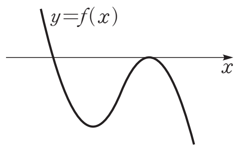
## 145

$f(x)=x^3+ax^2+3x+1$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+3$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 필요충분조건은 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 것이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면
$\frac{D_1}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$
$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$g(x)=x^3+ax^2-3ax+2$에서
$g'(x)=3x^2+2ax-3a$
삼차함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않을 필요충분조건은 이차방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는 것이므로 이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 $D_2$라 하면
$\frac{D_2}{4}=a^2-3\cdot(-3a)=a^2+9a\le 0$
$a(a+9)\le 0$ $\quad\therefore -9\le a\le 0$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-9\le a<-3$
따라서 정수 $a$는 $-9$, $-8$, $-7$, $\cdots$, $-4$의 6개이다.
**답 6**

## 146

$a=0$이면 $f(x)$는 일차함수이므로 극값을 갖지 않는다. $\quad\therefore a\ne 0$
$f(x)=ax^3-3x+b$에서
$f'(x)=3ax^2-3=3a\left(x^2-\frac{1}{a}\right)$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 즉
$\frac{1}{a}>0$ $\quad\therefore a>0$
$f'(x)=3a\left(x^2-\frac{1}{a}\right)=3a\left(x+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$
따라서 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$에서 극댓값 4, $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$에서 극솟값 2를 가지므로
$f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{a}}+b=\frac{2}{\sqrt{a}}+b=4$
$f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{3}{\sqrt{a}}+b=-\frac{2}{\sqrt{a}}+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$
$\therefore ab=4\cdot 3=12$ **답 12**

## 147



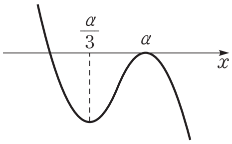

$x^3$의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축에 접하고, $f(x)$의 극솟값이 $-4$이므로 $f(x)$의 극댓값은 0이다.
$y=f(x)$의 그래프가 원점 이외의 점에서 $x$축과 접하

므로 $x$축과 접하는 점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)(\alpha\neq0)$이라 하면

$$f(x)=-x(x-\alpha)^2\ (\alpha\neq0)$$
$$=-x^3+2\alpha x^2-\alpha^2 x$$
$$f'(x)=-3x^2+4\alpha x-\alpha^2$$
$$=-(3x-\alpha)(x-\alpha)$$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\alpha$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{3}$에서 극솟값 $-4$를 가지므로




$$f\left(\frac{\alpha}{3}\right)=-\frac{\alpha}{3}\left(-\frac{2}{3}\alpha\right)^2=-4$$

$-\frac{4}{27}\alpha^3=-4,\ \alpha^3=27\qquad\therefore\ \alpha=3$

$$\therefore\ f(x)=-x(x-3)^2$$
$$=-x^3+6x^2-9x$$

따라서 $m=6,\ n=-9$이므로

$mn=6\cdot(-9)=-54$ **답** $-54$

**참고** 함수

$$f(x)=-x^3+mx^2+nx$$
$$=-x(x^2-mx-n)$$

의 그래프가 $x=\alpha(\alpha\neq0)$에서 $x$축과 접하면 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(\alpha,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=-x(x-\alpha)(x-\beta)\ (\beta\neq0)$

그런데 $\alpha\neq\beta$이면 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 세 점에서 만난다. 즉, $x$축과 접하지 않으므로

$\alpha=\beta$

$\therefore\ f(x)=-x(x-\alpha)^2$

## 148

먼저 $f(x)$가 극솟값을 가질 조건을 구한 후 그 조건을 부정하면 된다.

$f(x)=-3x^4+4ax^3-6(a+3)x^2-1$에서

$$f'(x)=-12x^3+12ax^2-12(a+3)x$$
$$=-12x\{x^2-ax+(a+3)\}$$

$f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-ax+(a+3)=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$이 $x^2-ax+(a+3)=0$의 근이 될 수 없으므로

$a+3\neq0\qquad\therefore\ a\neq-3$ …… ㉠

$x^2-ax+(a+3)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4(a+3)=a^2-4a-12>0$

$(a+2)(a-6)>0\qquad\therefore\ a<-2$ 또는 $a>6$

…… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a<-3$ 또는 $-3<a<-2$ 또는 $a>6$ …… ㉢

㉢은 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위이므로 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않도록 하는 실수 $a$의 값의 범위는 $a=-3$ 또는 $-2\leq a\leq6$

**답 $a=-3$ 또는 $-2\leq a\leq6$**

**다른풀이** $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 (i) 한 실근과 두 허근 또는 (ii) 한 실근과 다른 중근 또는 (iii) 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=-12x\{x^2-ax+(a+3)\}=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 $x^2-ax+(a+3)=0$이 두 허근을 가져야 한다. 즉,

$D=a^2-4a-12<0$

$\therefore\ -2<a<6$

(ii) ㈀ $x^2-ax+(a+3)=0$이 $x\neq0$인 다른 중근을 가지는 경우

$D=a^2-4a-12=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=6$

㈁ $x^2-ax+(a+3)=0$이 $x=0$을 한 근으로 가지는 경우

$a+3=0\qquad\therefore\ a=-3$

(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우는 없다.

(i)~(iii)에서 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않도록 하는 실수 $a$의 값의 범위는 $a=-3$ 또는 $-2\leq a\leq6$

## 149

$f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $2$<br>극대 | $\searrow$ | $-2$<br>극소 | $\nearrow$ |

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 $-2$를 갖는다. (참)

ㄴ. $f(2)=8-6=2$이고, $f(x)$는 반닫힌 구간 $[1, \infty)$에서 증가하므로 $x\ge 2$이면 $f(x)\ge f(2)=2$이다. (참)

ㄷ. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$<br>극대 | $\searrow$ | $-2$<br>극소 | $\nearrow$ | $2$ |

따라서 $-2\le x\le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 $-2$이므로 $|x|\le 2$이면 $|f(x)|\le 2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

## 150

하루에 A제품 $x$ $(x>0)$개를 판매하여 얻은 이익을 $P(x)$(원)이라 하면

$$P(x)=1200x-f(x)$$
$$=1200x-(x^3-60x^2+1200x+5000)$$
$$=-x^3+60x^2-5000$$

$P'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$

$P'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=40$

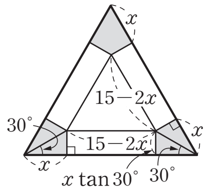
$x>0$에서 함수 $P(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $40$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $P(x)$ | | $\nearrow$ | $P(40)$<br>극대 | $\searrow$ |

따라서 $P(x)$는 $x=40$에서 최대이므로 이익을 최대로 하기 위해 하루에 생산해야 할 A제품은 40개이다.

**답 40**

## 151




정삼각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $15-2x$이므로

$15-2x>0$

$\therefore 0<x<\frac{15}{2}$

또한 정삼각기둥의 높이는

$x\cdot\tan 30^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}}$이므로 정삼각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(15-2x)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{x}{4}(15-2x)^2$$
$$=\frac{1}{4}(4x^3-60x^2+225x)$$
$$V'(x)=\frac{1}{4}(12x^2-120x+225)$$
$$=\frac{3}{4}(4x^2-40x+75)$$
$$=\frac{3}{4}(2x-5)(2x-15)$$

$V'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=\frac{5}{2}$ $\left(\because 0<x<\frac{15}{2}\right)$

$0<x<\frac{15}{2}$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{5}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{15}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V(x)$ | | $\nearrow$ | $V\left(\frac{5}{2}\right)$<br>극대 | $\searrow$ | |

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 최대가 되므로 정삼각기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 $x$의 값은 $\frac{5}{2}$이다.

**답 $\frac{5}{2}$**

## 152

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(0)=f(0)-g(0)=0$

또한 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이므로 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

따라서 $x>0$이면 $h(x)>h(0)$, 즉

$f(x)-g(x)>0 \qquad \therefore f(x)>g(x)$

따라서 참인 것은 ② $f(1)>g(1)$이다. **답** ②

## 153

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+5|x-2a|+1$에서

$x>2a$일 때,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+5(x-2a)+1$

$f'(x)=x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$

$x<2a$일 때,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5(x-2a)+1$

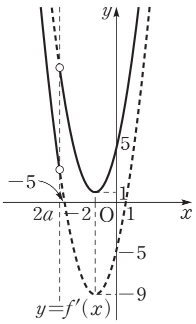
$f'(x)=x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 $x<2a$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$(x+5)(x-1)<0$인 $x$의 값의 범위가 $-5<x<1$이므로

$2a\le -5 \qquad \therefore a\le -\frac{5}{2}$

따라서 실수 $a$의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다. **답** $-\frac{5}{2}$




## 154

점 $(t, t^3)$과 직선 $x-y+6=0$ 사이의 거리 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{|t-t^3+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-t^3+t+6|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|-(t-2)(t^2+2t+3)|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|(t-2)(t^2+2t+3)|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)|t-2| \quad (\because t^2+2t+3>0)$$

ㄱ. 세 함수 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=t^2+2t+3$, $y=|t-2|$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. $t>2$일 때,

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)(t-2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^3-t-6)$$

이므로

$$g'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(3t^2-1)>0$$

$t<2$일 때,

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)(-t+2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-t^3+t+6)$$

이므로

$$g'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-3t^2+1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}t+1)(-\sqrt{3}t+1)$$

$g'(t)=0$을 만족시키는 $t$의 값은

$t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | | $+$ |
| $g(t)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | | ↗ |

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$에서 0이 아닌 극솟값 $g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$을 갖는다. (참)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}$

$$=\lim_{t\to 2+}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)(t-2)}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to 2+}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)\right\}=\frac{11}{\sqrt{2}}$$

연습문제
실력UP

$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}$$
$$=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)(-t+2)}{t-2}$$
$$=\lim_{t\to 2-}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+2t+3)\right\}$$
$$=-\frac{11}{\sqrt{2}}$$
따라서 $\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}\neq\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

## 155

$x^2+3y^2=9$에서 $y^2=\frac{1}{3}(9-x^2)\geq 0$

$x^2-9\leq 0$, $(x+3)(x-3)\leq 0$

$\therefore\ -3\leq x\leq 3$

또한,

$$x^2+xy^2=x^2+x\cdot\frac{1}{3}(9-x^2)$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$$

이므로 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$로 놓으면

$$f'(x)=-x^2+2x+3$$
$$=-(x+1)(x-3)$$

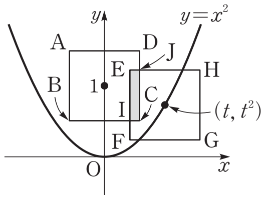
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

$-3\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $9$ | $\searrow$ | $-\frac{5}{3}$ 극소 | $\nearrow$ | $9$ |

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-\frac{5}{3}$를 가지므로 $x^2+xy^2$의 최솟값은 $-\frac{5}{3}$이다. **답** $-\frac{5}{3}$

## 156




$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 이고, 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(t,\ t^2)(t>0)$이라 하면

$E\left(t-\frac{1}{2},\ t^2+\frac{1}{2}\right)$, $F\left(t-\frac{1}{2},\ t^2-\frac{1}{2}\right)$

$\overline{BC}$와 $\overline{EF}$의 교점을 I, $\overline{EH}$와 $\overline{CD}$의 교점을 J라 하면

$$\overline{EJ}=\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)=1-t$$
$$\overline{EI}=\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=t^2$$

따라서 직사각형 EICJ의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\overline{EJ}\cdot\overline{EI}=(1-t)t^2$$
$$=-t^3+t^2$$

$f'(t)=-3t^2+2t=-t(3t-2)$

$f'(t)=0$을 만족시키는 $t$의 값은 $t=\frac{2}{3}$ $(\because t>0)$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | $\frac{4}{27}$ 극대 | $\searrow$ |

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 최댓값 $\frac{4}{27}$를 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{27}$이다. **답** ①

## 157

$x^3+3x^2-9x+4-k=0$에서

$x^3+3x^2-9x+4=k$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4$로 놓으면

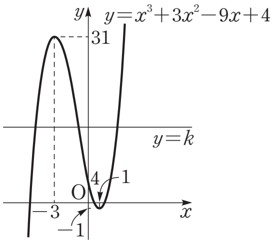
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $31$<br>극대 | $\searrow$ | $-1$<br>극소 | $\nearrow$ |

방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 개수와 같다.




따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위를 구하면 $-1<k<31$

따라서 정수 $k$는 $0, 1, 2, \cdots, 29, 30$의 31개이다.

**답** ②

# 158

두 곡선 $y=x^3-2x^2-6x+2$, $y=x^2+3x+a$의 교점의 개수는 방정식 $x^3-2x^2-6x+2=x^2+3x+a$, 즉

$x^3-3x^2-9x+2=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

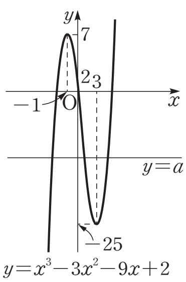
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $7$<br>극대 | $\searrow$ | $-25$<br>극소 | $\nearrow$ |

방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하면




$-25<a<7$

따라서 자연수 $a$의 최댓값은 6이다. **답** 6

# 159

$x^3-27x-a=0$에서 $x^3-27x=a$

$f(x)=x^3-27x$로 놓으면

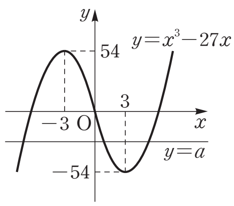
$f'(x)=3x^2-27=3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $54$<br>극대 | $\searrow$ | $-54$<br>극소 | $\nearrow$ |

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 한 개는 음수, 두 개는 서로 다른 양수가 되도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하면




$-54<a<0$

따라서 정수 $a$는 $-53, -52, -51, \cdots, -1$의 53개이다. **답** 53

# 160

곡선 $y=x^3-6x^2+9x-a$와 $x$축의 교점의 개수는 방정식 $x^3-6x^2+9x-a=0$, 즉

$x^3-6x^2+9x=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면

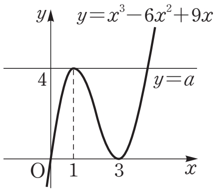
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $4$<br>극대 | $\searrow$ | $0$<br>극소 | $\nearrow$ |

방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같다.




따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 $a$의 값은 $a=4$ 또는 $a=0$이므로

양수 $a$의 값은 $a=4$ **답 4**

**다른풀이** $f(x)=x^3-6x^2+9x-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $4-a$ 극대 | ↘ | $-a$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $4-a$, $x=3$에서 극솟값 $-a$를 갖는다.

$f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 필요충분조건은 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축에 접하는 것이므로

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$

$-a(4-a)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=4$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

## 161

$x^4+3x^3+k\geq -x^3+16x$에서

$x^4+4x^3-16x+k\geq 0$

$f(x)=x^4+4x^3-16x+k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $16+k$ | ↘ | $-11+k$ 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-11+k$를 가지므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$f(1)=-11+k\geq 0$ $\quad\therefore k\geq 11$

따라서 실수 $k$의 최솟값은 11이다. **답 11**

## 162

$x^3+a\geq 6x^2+15x$에서

$x^3-6x^2-15x+a\geq 0$

$f(x)=x^3-6x^2-15x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=5$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-100+a$ 극소 | ↗ |

따라서 $x>0$일 때, $f(x)$는 $x=5$에서 최솟값 $-100+a$를 가지므로 $x>0$일 때 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면

$f(5)=-100+a\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 100$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 100이다. **답 100**

## 163

$-1<x<1$일 때 $f(x)\geq g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)\geq 0$이 항상 성립해야 하므로 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고

$h(x)=(4x^3-2x^2-4x+3)-(x^2+2x+a)$

$\quad=4x^3-3x^2-6x+3-a\geq 0$

임을 보이면 된다.

$h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$-1\leq x\leq 1$일 때 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $2-a$ | $\nearrow$ | $\frac{19}{4}-a$ 극대 | $\searrow$ | $-2-a$ |

따라서 $-1\le x\le 1$일 때, $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-2-a$를 가지므로 $-1<x<1$일 때 $h(x)\ge 0$이 성립하려면

$h(1)=-2-a\ge 0$

$\therefore a\le -2$ 답 $a\le -2$

## 164

방정식 $2x^3-6ax-3a=0$, 즉 $2x^3-6ax=3a$가 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 두 함수 $y=2x^3-6ax$, $y=3a$의 그래프의 교점은 한 개뿐이다.

$g(x)=2x^3-6ax$로 놓으면

$g'(x)=6x^2-6a=6(x^2-a)$

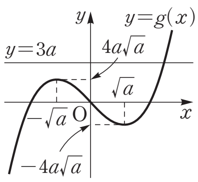
$g(x)$의 극값이 존재하므로 $a>0$

$g'(x)=6(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{a}$ | $\cdots$ | $\sqrt{a}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | $4a\sqrt{a}$ 극대 | $\searrow$ | $-4a\sqrt{a}$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 두 함수 $y=g(x)$, $y=3a$의 그래프가 한 점에서만 만나도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하면




$3a<-4a\sqrt{a}$ 또는 $3a>4a\sqrt{a}$

그런데 $a>0$이므로 $3a>4a\sqrt{a}$

$3>4\sqrt{a}$, $9>16a$

$\therefore 0<a<\frac{9}{16}$ ($\because a>0$) 답 $0<a<\frac{9}{16}$

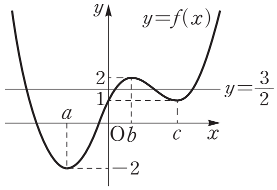
**참고** 함수 $f(x)$의 극값이 존재하므로 $g(x)=f(x)+3a$의 극값도 존재한다.

## 165

주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-2$ 극소 | $\nearrow$ | $2$ 극대 | $\searrow$ | $1$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.




방정식 $f(x)-\frac{3}{2}=0$, 즉 $f(x)=\frac{3}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{3}{2}$의 그래프의 교점의 개수와 같으므로 4이다. 답 4

## 166

$f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$

$(3x^3-x^2-3x)-(x^3-4x^2+9x+a)=0$

$2x^3+3x^2-12x=a$ ······ ㉠

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

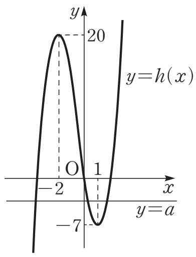
$h'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\nearrow$ | $20$ 극대 | $\searrow$ | $-7$ 극소 | $\nearrow$ |

방정식 ㉠의 실근은 두 함수 $y=h(x)$, $y=a$의 교점의 $x$좌표와 같다.

따라서 교점의 $x$좌표가 두 개는 서로 다른 양수, 한 개는 음수가 되도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하면



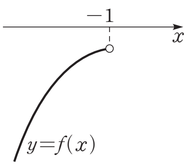

연습문제 실력 UP

$-7<a<0$
따라서 정수 $a$는 $-6$, $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$의 6개이다. **답 6**

## 167

$f(x)=2x^3+3x^2+k$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$
$x\le -1$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $1+k$ |



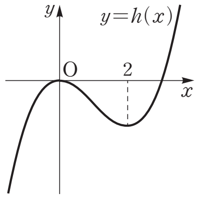

$x<-1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 반닫힌 구간 $(-\infty, -1]$에서 증가한다.
따라서 $x\le -1$일 때, $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $1+k$를 가지므로 $x<-1$일 때 $f(x)<0$이 항상 성립하려면
$f(-1)=1+k\le 0 \quad \therefore k\le -1$
따라서 실수 $k$의 최댓값은 $-1$이다. **답 $-1$**

## 168

주어진 그래프에서 $f'(0)=g'(0)$, $f'(2)=g'(2)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$
$x<0$ 또는 $x>2$에서 $f'(x)>g'(x)$
$0<x<2$에서 $g'(x)>f'(x)$
$h(0)=f(0)-g(0)=0$
따라서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\nearrow$ | $0$ 극대 | $\searrow$ | $h(2)$ 극소 | $\nearrow$ |

ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지므로 $y=h(x)$의 그래프는 $x=0$에서 $x$축에 접한다.




따라서 방정식 $h(x)=0$은 중근과 다른 한 실근, 즉 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ③**

## 169

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=9-t^2$
점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$9-t^2=0$, $(3+t)(3-t)=0$
$\therefore t=3$ $(\because t>0)$
따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는
$27-9=18$ **답 18**

## 170

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-14t+12$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-14$
점 P가 원점을 지나면 $x=0$이므로
$x=t^3-7t^2+12t=0$에서
$t(t-3)(t-4)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=3$ 또는 $t=4$
따라서 점 P가 출발한 후 마지막으로 원점을 통과하는 것은 $t=4$일 때이므로 $t=4$에서의 점 P의 가속도는
$6\cdot 4-14=10$ **답 10**

## 171

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=-2t+4$

$t=a$에서 점 P의 속도가 0이므로 $-2a+4=0$

$\therefore a=2$ 답 ②

## 172

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-9t+6=3(t-1)(t-2)$

$v=0$을 만족시키는 $t$의 값은 $t=1$ 또는 $t=2$

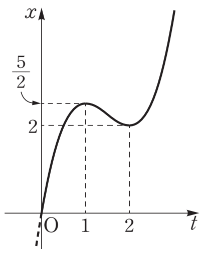
함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $x(t)$ | | ↗ | $\frac{5}{2}$ 극대 | ↘ | 2 극소 | ↗ |

ㄱ. 점 P가 출발할 때의 속도는 $t=0$에서의 속도이므로 6이다. (참)

ㄴ. 점 P는 속도가 양$(+)$이면 수직선의 양의 방향, 속도가 음$(-)$이면 수직선의 음의 방향으로 움직인다. $t=1$과 $t=2$에서 속도의 부호가 각각 한 번씩 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄷ. $x=t^3-\dfrac{9}{2}t^2+6t\,(t\geq 0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $t>0$에서 원점과 만나지 않는다. 즉, 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다. (거짓)




따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

## 173

$t$초 후의 로켓의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=10-10t$

장난감 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$10-10t=0 \quad \therefore t=1$

따라서 장난감 로켓은 쏘아 올린 후 1초만에 최고 높이에 도달한다. $\quad \therefore \alpha=1$

그때 장난감 로켓의 최고 높이는

$20+10\cdot 1-5\cdot 1^2=25(\mathrm{m}) \quad \therefore \beta=25$

$\therefore \alpha+\beta=1+25=26$ 답 26

다른풀이 $x=-5t^2+10t+20=-5(t-1)^2+25$

$x$는 $t=1$에서 최댓값 25를 가지므로 장난감 로켓은 쏘아 올린 후 1초만에 최고 높이 25 m에 도달한다.

$\therefore \alpha=1,\ \beta=25$

$\therefore \alpha+\beta=1+25=26$

## 174

공이 지면에 닿는 순간의 높이는 0이므로 $x=0$에서

$50+15t-5t^2=0,\ -5(t+2)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

따라서 공이 다시 지면에 닿는 것은 공을 위로 던진 지 5초가 지난 후이다.

$t$초 후의 공의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=15-10t$

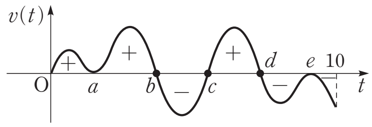
이므로 5초 후의 공의 속도는

$15-10\cdot 5=-35(\mathrm{m/s})$

$\therefore k=-35$ 답 $-35$

## 175

속도 $v(t)$의 부호가 바뀌는 시각 $t$에서 점 P의 운동 방향이 바뀐다.




따라서 그림에서 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌는 시각은 $t=b,\ t=c,\ t=d$이므로 점 P의 운동 방향은 3번 바뀐다. 답 3번

## 176

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-8t+10=(t-4)^2-6$

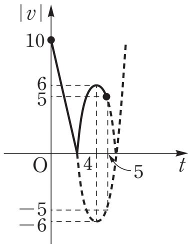
$0\le t\le 5$일 때, $v$는 $t=4$에서 최솟값 $-6$, $t=0$에서 최댓값 10을 가지므로 $-6\le v\le 10$

따라서 점 P의 속력 $|v|$의 최댓값은 10이다. **답 10**

**다른풀이** $|v|=|(t-4)^2-6|$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t\le 5$일 때, $|v|$는 $t=0$에서 최댓값 10을 갖는다.

따라서 점 P의 속력 $|v|$의 최댓값은 10이다.




## 177

두 점 P, Q의 시각 $t$에서의 속도를 각각 $v_P$, $v_Q$라 하면

$v_P=P'(t)=t^2+4$

$v_Q=Q'(t)=4t$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_P=v_Q$에서

$t^2+4=4t$, $t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0 \qquad \therefore t=2$

$t=2$일 때, 두 점 P, Q의 위치는 각각

$P(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-\frac{2}{3}=10$

$Q(2)=2\cdot 2^2-10=-2$

따라서 $t=2$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-(-2)=12$ **답 12**

## 178

수직선 위의 점은 속도가 양$(+)$이면 양의 방향, 속도가 음$(-)$이면 음의 방향으로 움직이므로 두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직인다는 것은 속도의 부호가 다르다는 뜻이다.

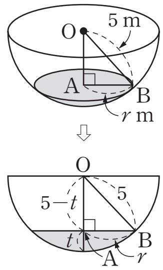
점 P의 속도는 $f'(t)=4t-2$, 점 Q의 속도는 $g'(t)=2t-8$이므로 두 점의 속도의 부호가 반대인 시각 $t$의 범위는

$(4t-2)(2t-8)<0$, $4(2t-1)(t-4)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<t<4$ **답 ①**

## 179

수면의 높이가 매분 1 m씩 올라가므로 $t$분 후의 수면의 높이는 $t$ m이고, 이때의 수면의 반지름의 길이를 $r$ m라 하면 오른쪽 그림의 직각삼각형 OAB에서




$(5-t)^2+r^2=5^2$

$r^2=25-(25-10t+t^2)$

$\therefore r^2=10t-t^2$

따라서 $t$분 후의 수면의 넓이를 $S$ m$^2$이라 하면

$S=\pi r^2=\pi(10t-t^2)$

$\therefore \frac{dS}{dt}=\pi(10-2t)$

따라서 물을 넣기 시작한 지 2분 후의 수면의 넓이의 변화율은

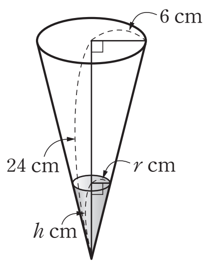
$\pi(10-2\cdot 2)=6\pi(\text{m}^2/\text{min})$

$\therefore a=6$ **답 6**

## 180

$t$초 후 수면의 반지름의 길이를 $r$ cm, 수면의 높이를 $h$ cm라 하면 $h=2t$ ⋯⋯ ㉠

이고,




$6:24=r:h$

$\therefore r=\frac{h}{4}$

따라서 $t$초 후의 물의 부피를 $V$ cm$^3$라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{h}{4}\right)^2\cdot h=\frac{\pi}{48}h^3$

$=\frac{\pi}{48}\cdot(2t)^3=\frac{\pi}{6}t^3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{2}t^2$

수면의 높이가 8 cm이면 $h=8$이므로

$8=2t \qquad \therefore t=4$

따라서 $t=4$일 때의 물의 부피의 변화율은

$\frac{\pi}{2}\cdot 4^2=8\pi$ (cm$^3$/s)

$\therefore k=8$ **답 8**

## Ⅲ. 적분

### 181

함수 $F(x)=2x^3+ax^2+3bx$가 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나이므로

$f(x)=F'(x)=(2x^3+ax^2+3bx)'$

$=6x^2+2ax+3b$

$f(0)=-3$에서 $3b=-3$ $\quad\therefore b=-1$

$f'(x)=12x+2a$이므로 $f'(1)=0$에서

$12+2a=0$ $\quad\therefore a=-6$

$\therefore a+b=-6+(-1)=-7$

답 $-7$

### 182

$\int(2x-1)f'(x)dx=2x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$(2x-1)f'(x)=6x^2+x-2=(2x-1)(3x+2)$

$\therefore f'(x)=3x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x+2)dx$

$=\frac{3}{2}x^2+2x+C$

이때 $f(-1)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{3}{2}-2+C=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+1$이므로

$f(2)=\frac{3}{2}\cdot2^2+2\cdot2+1=11$

답 11

### 183

$f(x)=2x^2-x$이므로

$f_1(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

$=2x^2-x+C$

이때 $f_1(1)=2$이므로

$2-1+C=2$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore f_1(x)=2x^2-x+1$

또한, $f_2(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=2x^2-x$

$\therefore f_1(2)-f_2(-1)$

$=(2\cdot2^2-2+1)-\{2\cdot(-1)^2-(-1)\}$

$=7-3=4$

답 4

### 184

$f(x)=\int\frac{x^3}{1-x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx$

$=\int\frac{x^3-1}{1-x}dx=-\int(x^2+x+1)dx$

$=-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right)+C$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+1$이므로

$f(2)=-\frac{1}{3}\cdot2^3-\frac{1}{2}\cdot2^2-2+1$

$=-\frac{17}{3}$

답 $-\frac{17}{3}$

### 185

$f'(x)=6x^2+4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+4)dx$

$=2x^3+4x+C$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 6)$을 지나므로 $f(0)=6$

즉, $f(0)=C=6$

따라서 $f(x)=2x^3+4x+6$이므로

$f(1)=2+4+6=12$

답 12

### 186

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2-4x+a)dx$

$=4x^3-2x^2+ax+C$

이때 $f(x)$가 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$에서 $4-2+a+C=0$ ······ ㉠

$f(2)=0$에서 $32-8+2a+C=0$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $22+a=0$

$\therefore a=-22$

답 $-22$

연습문제 실력 UP

## 187

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $2x+1$에 정비례하므로

$f'(x)=k(2x+1)$ $(k\neq0)$로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int k(2x+1)dx \\ &=kx^2+kx+C \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(0, -1)$, $(1, 3)$을 지나므로

$f(0)=C=-1$, $f(1)=k+k+C=3$

$\therefore C=-1$, $k=2$

$\therefore f(x)=2x^2+2x-1$ 　　　**답** $\boldsymbol{f(x)=2x^2+2x-1}$

## 188

$f(x)=\int(2x^2-3)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x^2-3$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1} &=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\} \\ &=2f'(1)=2(2-3)=-2 \end{aligned}$$

**답** $-2$

## 189

$f'(x)=0$의 두 근이 $-1$, $0$이므로

$f'(x)=ax(x+1)=ax^2+ax$ $(a<0)$로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int(ax^2+ax)dx \\ &=\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+C \end{aligned}$$

$a<0$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore f(-1)=-1$, $f(0)=1$

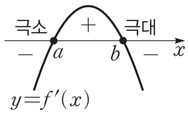
즉, $f(-1)=-\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+C=-1$, $f(0)=C=1$

$\therefore a=-12$, $C=1$

$\therefore f(x)=-4x^3-6x^2+1$

**답** $\boldsymbol{f(x)=-4x^3-6x^2+1}$

참고　$y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어졌을 때, $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖고, $x=b$에서 극댓값을 갖는다.




## 190

$f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ 　　　…… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$ 　　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$ 　　　…… ㉢

즉, $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$g(x)=4x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$g'(x)=8x+a$

㉢에서 $x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$

양변의 계수를 비교하면

$a=0$, $b-8=2$ 　　$\therefore a=0$, $b=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(1)=4+10=14$ 　　　**답** ⑤

## 191

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$의 양변을 $x$에 대하여 적분하면

$f(x)+g(x)=x^2+x+C_1$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$에서 $C_1=2-1=1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x+2$의 양변을 $x$에 대하여 적분하면

$f(x)g(x)=x^3-x^2+2x+C_2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$에서 $C_2=2\cdot(-1)=-2$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1$

$$f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2$$
$$=(x-1)(x^2+2)$$

$\therefore \begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=x^2+2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x^2+2 \\ g(x)=x-1 \end{cases}$

이때 $f(0)=2$, $g(0)=-1$이므로

$f(x)=x^2+2$, $g(x)=x-1$

$\therefore f(2)+g(1)=6+0=6$ **답 6**

## 192

$$f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$$
$$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

또한, $f(1)=4$이므로

$f(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}+C=4$

즉, $n+1=4$이므로 $n=3$

따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3$이므로

$f(2)=1+2+2^2+2^3=15$

$\therefore n+f(2)=3+15=18$ **답 18**

## 193

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & (x\geq 1) \\ 4x & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} x^3+x+C_1 & (x\geq 1) \\ 2x^2+C_2 & (x<1) \end{cases}$ …… ㉠

이때 $f(0)=3$에서 $0+C_2=3$ $\therefore C_2=3$

한편, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to 1+}(x^3+x+C_1)=\lim_{x\to 1-}(2x^2+C_2)$

$1+1+C_1=2+C_2$, $2+C_1=2+3$

$\therefore C_1=3$

$C_1=3$, $C_2=3$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\begin{cases} x^3+x+3 & (x\geq 1) \\ 2x^2+3 & (x<1) \end{cases}$

$\therefore f(2)=2^3+2+3=13$ **답 13**

## 194

$f(x)=\int(x+1)(x^2+2x+4)dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)(x^2+2x+4)$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$
$$=2(1+1)(1+2+4)=28$$

**답 28**

## 195

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$에서 $x\to 2$일 때 (분자) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이고 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(2)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$f'(2)=16+k=1$이므로 $k=-15$

따라서 $f'(x)=8x-15$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(8x-15)dx$$
$$=4x^2-15x+C$$

㉠에서 $f(2)=0$이므로

$16-30+C=0$ $\therefore C=14$

따라서 $f(x)=4x^2-15x+14$이므로

$f(1)=4-15+14=3$ **답 3**

## 196

$f'(x)=ax^2-3x-6$이고

$f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{11}{2}$을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=\frac{11}{2}$

$f'(-1)=a+3-6=0 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

한편,

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2-3x-6)dx$$
$$=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C$$

에서 $f(-1)=\frac{11}{2}$이므로

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+C=\frac{11}{2} \qquad \therefore C=2$

즉, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2-6\cdot 2+2=-8$

**답 $a=3$, 극솟값: $-8$**

## 197

$$F(x)=xf(x)-6x^3(x-1)$$
$$=xf(x)-6x^4+6x^3$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-24x^3+18x^2$

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-24x^3+18x^2$

$xf'(x)=24x^3-18x^2,\ f'(x)=24x^2-18x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(24x^2-18x)dx$$
$$=8x^3-9x^2+C$$

이때 $f(1)=0$이므로

$8-9+C=0 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=8x^3-9x^2+1$

$f'(x)=24x^2-18x=6x(4x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-16$ | ↗ | $1$ 극대 | ↘ | $-\frac{11}{16}$ 극소 | ↗ | $0$ |

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 $-16$을 갖는다.

$\therefore M=1,\ m=-16$

$\therefore M-m=17$

**답 17**

## 198

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=3$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$$

도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$$
$$=x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=x+3$$

$$\therefore f(x)=\int(x+3)dx=\frac{1}{2}x^2+3x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x$이므로

$f(-2)=\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)=-4$ 답 $-4$

## 199

$f(x)=6x^2+2ax$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (6x^2+2ax)dx$$
$$=\Big[2x^3+ax^2\Big]_0^1=2+a$$

$f(1)=6+2a$

그런데 $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$이므로

$2+a=6+2a$ $\therefore a=-4$ 답 $-4$

## 200

$$\int_{-2}^1 (-3x^2+4kx-2)dx$$
$$=\Big[-x^3+2kx^2-2x\Big]_{-2}^1$$
$$=(-1+2k-2)-(8+8k+4)$$
$$=-15-6k$$

즉, $-15-6k<3$에서 $6k>-18$

$\therefore k>-3$

따라서 정수 $k$의 최솟값은 $-2$이다. 답 $-2$

## 201

(1) (주어진 식)

$$=\int_{-2}^0 (3x+2)dx+\int_0^5 (3x+2)dx-\int_{-2}^5 (3x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^5 (3x+2)dx-\int_{-2}^5 (3x+2)dx$$
$$=0$$

(2) (주어진 식)

$$=\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-1}dx-\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}dx-\int_1^0 (x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^0 \frac{x^3-1}{x-1}dx-\int_1^0 (x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^2+x+1)dx-\int_1^0 (x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^2+x+1)dx+\int_0^1 (x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^1 (x^2+x+1)dx=2\int_0^1 (x^2+1)dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1=\frac{8}{3}$$

(3) (주어진 식)

$$=\int_{-1}^3 (2x-1)dx+\int_1^2 (2x-1)dx+\int_3^1 (2x-1)dx$$
$$=\int_{-1}^3 (2x-1)dx+\int_3^1 (2x-1)dx+\int_1^2 (2x-1)dx$$
$$=\int_{-1}^2 (2x-1)dx$$
$$=\Big[x^2-x\Big]_{-1}^2=0$$

답 (1) **0** (2) $\frac{8}{3}$ (3) **0**

## 202

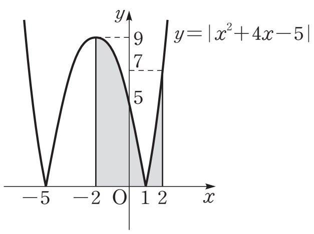
$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 (x^2+4)dx+\int_1^2 (2x+3)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_0^1+\Big[x^2+3x\Big]_1^2$$
$$=\frac{13}{3}+6=\frac{31}{3}$$

답 $\frac{31}{3}$

## 203

(1) $f(x)=|x^2+4x-5|$라 하면 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-4x+5 & (-2\le x\le 1) \\ x^2+4x-5 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$



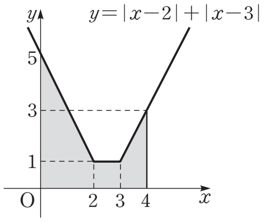
따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_{-2}^{2}|x^2+4x-5|dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-4x+5)dx+\int_{1}^{2}(x^2+4x-5)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_{1}^{2}$$
$$=18+\frac{10}{3}=\frac{64}{3}$$

(2) $f(x)=|x-2|+|x-3|$이라 하면 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2)-(x-3) & (0\le x\le 2)\\ (x-2)-(x-3) & (2\le x\le 3),\\ (x-2)+(x-3) & (3\le x\le 4)\end{cases}$$

즉 $f(x)=\begin{cases}-2x+5 & (0\le x\le 2)\\ 1 & (2\le x\le 3)\\ 2x-5 & (3\le x\le 4)\end{cases}$




따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_{0}^{4}(|x-2|+|x-3|)dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-2x+5)dx+\int_{2}^{3}dx+\int_{3}^{4}(2x-5)dx$$
$$=\left[-x^2+5x\right]_{0}^{2}+\left[x\right]_{2}^{3}+\left[x^2-5x\right]_{3}^{4}$$
$$=6+1+2=9$$

**답** (1) $\frac{64}{3}$ (2) 9

## 204

$f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

또한, $x^3f(x)$, $xf(x)$는 기함수이므로

$(3x^3-2x)f(x)$도 기함수이다.

$\therefore \int_{-2}^{2}(3x^3-2x)f(x)dx=0$

$\therefore \int_{-2}^{2}(3x^3-2x+6)f(x)dx$

$$=\int_{-2}^{2}(3x^3-2x)f(x)dx+\int_{-2}^{2}6f(x)dx$$
$$=6\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

**답 3**

## 205

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

$f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)=a+b+3=0$ …… ㉠

또, $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=1$

$f'(x)=3ax^2+b$이므로

$f'(1)=3a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-5$

따라서 $f(x)=2x^3-5x+3$이므로 구하는 정적분의 값은

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(2x^3-5x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}=1$$

**답 1**

## 206

$$\int_{0}^{1}(x-k)^2f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-2kx+k^2)f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}x^2f(x)dx-2k\int_{0}^{1}xf(x)dx+k^2\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$\int_{0}^{1}f(x)dx=1$, $\int_{0}^{1}xf(x)dx=2$이므로

(주어진 식)$=\int_{0}^{1}x^2f(x)dx-4k+k^2$

$$=(k-2)^2-4+\int_{0}^{1}x^2f(x)dx$$

이때 정적분 $\int_0^1 x^2f(x)dx$의 값은 상수이므로 주어진 식은 $k=2$일 때 최소가 된다. **답 2**

## 207

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$이고,

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=0$

한편, $f(0)=-1$이므로

$f(x)=ax^2+bx-1$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(ax^2+bx-1)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx-1)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$f(2)=3\cdot2^2-1=11$ **답 11**

## 208

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+a & (x\le1)\\ 2x+3 & (x>1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=1$에서도 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$

$\lim_{x\to1-}(3x^2-4x+a)=\lim_{x\to1+}(2x+3)$

$3-4+a=2+3 \qquad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+6 & (x\le1)\\ 2x+3 & (x>1)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(3x^2-4x+6)dx+\int_1^3(2x+3)dx$$
$$=2\int_0^1(3x^2+6)dx+\int_1^3(2x+3)dx$$
$$=2\left[x^3+6x\right]_0^1+\left[x^2+3x\right]_1^3$$
$$=14+14=28$$

$\therefore b=28$

$\therefore a+b=6+28=34$ **답 34**

## 209

$f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=2$이므로 $\frac{2}{3}a=2 \qquad \therefore a=3$

$$\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2\int_0^1 bx^2dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1=\frac{2}{3}b$$

$\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=-2$이므로 $\frac{2}{3}b=-2 \qquad \therefore b=-3$

따라서 $f(x)=3x-3$이므로

$f(-2)=-6-3=-9$ **답 −9**

## 210

$f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_{2018}^{2020} f(x)dx=\int_{2014}^{2016} f(x)dx=\int_{2010}^{2012} f(x)dx=\cdots$$
$$=\int_2^4 f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{2018}^{2020} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}=4$$

**답 4**

실력 UP
연습문제

## 211

$f'(x)=3x^2+2ax+(2a-3)$이고 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(2a-3)\le 0$

$a^2-6a+9\le 0$, $(a-3)^2\le 0$ $\therefore a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$이므로

$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx+\int_2^1 \frac{1}{x}dx$

$=\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx-\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

$=\int_1^2 \frac{f(x)-1}{x}dx$

$=\int_1^2 (x^2+3x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_1^2$

$=\frac{44}{3}-\frac{29}{6}=\frac{59}{6}$

$\therefore$ (주어진 식)$=6\cdot\frac{59}{6}=59$ **답 59**

## 212

주어진 그림에서 $f'(x)=2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2x\,dx=x^2+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$ $\therefore f(x)=x^2+2$

$\therefore F(x)=\int_0^1 f(x-t)dt$

$=\int_0^1 \{(x-t)^2+2\}dt$

$=\int_0^1 (x^2-2tx+t^2+2)dt$

$=\left[x^2t-t^2x+\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^1$

$=x^2-x+\frac{1}{3}+2=x^2-x+\frac{7}{3}$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{12}$

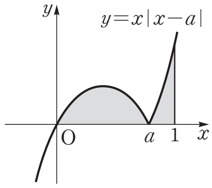
따라서 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{25}{12}$를 갖는다.

**답 $\frac{25}{12}$**

## 213

$f(x)=x|x-a|$라 하면 닫힌구간 $[0, 1]$에서

$f(x)=\begin{cases} x(a-x) & (0\le x\le a) \\ x(x-a) & (a\le x\le 1)\end{cases}$




$\int_0^1 x|x-a|dx$

$=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx$

$=\int_0^a (ax-x^2)dx+\int_a^1 (x^2-ax)dx$

$=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$

$=\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^3\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$이라 하면

$g'(a)=a^2-\frac{1}{2}=\left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

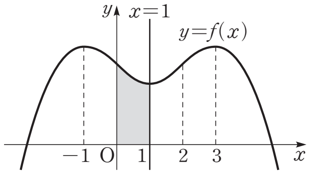
$g'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because 0\le a\le 1$)

즉, $g(a)$는 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극솟값을 갖고, $a=0$일 때 $g(0)=\frac{1}{3}$, $a=1$일 때 $g(1)=\frac{1}{6}$이다.

따라서 정적분 $\int_0^1 x|x-a|dx$의 값은 $a=0$일 때 최대가 된다. **답 0**

## 214

(가)에서 $f(1+x)=f(1-x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.



따라서 위의 그림에서

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx-2\int_0^1 f(x)dx$$

(나)에서 $\int_{-1}^0 f(x)dx=a$, $\int_0^3 f(x)dx=b$이므로

$$a=b-2\int_0^1 f(x)dx$$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\dfrac{b-a}{2}$ 답 $\dfrac{b-a}{2}$

## 215

(가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수, 즉 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx=16$

(나)에서 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_{-4}^{-2} f(x)dx=16$$

$\therefore \int_{-4}^0 f(x)dx=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^0 f(x)dx=32$

$\therefore \int_{-4}^8 f(x)dx$

$$=\int_{-4}^0 f(x)dx+\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$$
$$=3\int_{-4}^0 f(x)dx=3\cdot 32=96$$

답 96

## 216

$$F(x)=\int_0^x (t^3-1)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$F'(x)=x^3-1$

$\therefore F'(2)=8-1=7$ 답 ③

## 217

$\int_0^2 f(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x+k$

$\therefore k=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (2t+k)dt$

$$=\left[t^2+kt\right]_0^2=4+2k$$

즉, $k=4+2k$이므로 $k=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로

$f(1)=2-4=-2$ 답 ②

## 218

주어진 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8-12a+6a^2-a^3$

$a^3-6a^2+12a-8=0$, $(a-2)^3=0$

$\therefore a=2$

$\therefore \int_2^x f(t)dt=x^3-6x^2+12x-8$

이 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 0이다. 답 ③

## 219

$$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2x\int_0^1 f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt=1-2-2\int_0^1 f(t)dt$, $3\int_0^1 f(t)dt=-1$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt=-\dfrac{1}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+\dfrac{2}{3}x$

이 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+\dfrac{2}{3}$

$\therefore a=f(0)=\dfrac{2}{3}$

$\therefore 60a=60\cdot\dfrac{2}{3}=40$ 답 40

## 220

$$f(x)=\int_{-3}^x (3t^2-6t-9)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이므로 극댓값은

$$f(-1)=\int_{-3}^{-1}(3t^2-6t-9)dt$$

$$=\left[t^3-3t^2-9t\right]_{-3}^{-1}=32$$

또, $x=3$일 때 극소이므로 극솟값은

$$f(3)=\int_{-3}^{3}(3t^2-6t-9)dt$$

$$=\left[t^3-3t^2-9t\right]_{-3}^{3}=0$$

**답 극댓값: 32, 극솟값: 0**

## 221

$f(t)=|t^2-9|$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}|t^2-9|dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[F(t)\right]_{2-x}^{2+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(2+x)-F(2-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(2+x)-F(2)+F(2)-F(2-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(2+x)-F(2)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{F(2-x)-F(2)}{-x}$$

$$=F'(2)+F'(2)=2F'(2)$$

이때 $F'(t)=f(t)$이므로

$2F'(2)=2f(2)=2\cdot 5=10$ **답 ④**

## 222

$\int_1^2 f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2kx+k^2$$

$$k=\int_1^2 f(t)dt$$

$$=\int_1^2\left(\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2\right)dt$$

$$=\left[\frac{4}{7}t^3-kt^2+k^2t\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{32}{7}-4k+2k^2\right)-\left(\frac{4}{7}-k+k^2\right)$$

$$=4-3k+k^2$$

즉, $k=4-3k+k^2$이므로

$k^2-4k+4=0$, $(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

$\therefore 10\int_1^2 f(x)dx=10k=20$ **답 20**

## 223

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{8}{3}x^3-3x^2+4x\int_0^2 tf(t)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=8x^2-6x+4\int_0^2 tf(t)dt$$

$\int_0^2 tf(t)dt=a$ ($a$는 상수)로 놓으면

$$f(x)=8x^2-6x+4a$$

$$a=\int_0^2 tf(t)dt=\int_0^2 t(8t^2-6t+4a)dt$$

$$=\int_0^2(8t^3-6t^2+4at)dt$$

$$=\left[2t^4-2t^3+2at^2\right]_0^2$$

$$=32-16+8a=16+8a$$

즉, $a=16+8a$이므로 $a=-\frac{16}{7}$

따라서 $f(x)=8x^2-6x-\frac{64}{7}$이므로

$$f(2)=32-12-\frac{64}{7}=\frac{76}{7}$$

$\therefore \int_0^2 tf(t)dt+f(2)=-\frac{16}{7}+\frac{76}{7}=\frac{60}{7}$ **답 $\frac{60}{7}$**

## 224

$$\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^4+ax^2+bx \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4+ax^2+bx$$

이 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+2ax+b$$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=4x^3+2ax+b$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$을 각각 대입하면

$0=1+a+b$

$0=4+2a+b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$\therefore ab=-6$ **답 $-6$**

## 225

$f(x)=\int_0^x (t^2+at+b)dt$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b$

$x=3$일 때, 극솟값 0을 가지므로

$f'(3)=9+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=-9$ ...... ㉠

$$f(3)=\int_0^3 (t^2+at+b)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^3$$
$$=9+\frac{9}{2}a+3b=0$$

$\therefore \frac{9}{2}a+3b=-9$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=3$

$\therefore f'(x)=x^2-4x+3$

$=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1)=\int_0^1 (t^2+at+b)dt$$
$$=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$$

**답 $x=1$일 때, 극댓값 $\frac{4}{3}$**

## 226

주어진 그래프에서

$f(x)=a(x+1)(x-3)(a<0)$으로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_{x-1}^x f(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x)-f(x-1)$$
$$=a(x+1)(x-3)-ax(x-4)$$
$$=a(x^2-2x-3-x^2+4x)$$
$$=a(2x-3)$$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

$a<0$이므로 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때, 극대이면서 최대이다.

따라서 $g(x)$의 최댓값은 $g\left(\frac{3}{2}\right)$이다. **답 ④**

## 227

$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+nx$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2+n$

이때 $f(1)=4$이므로 $f(1)=1+n=4$ $\therefore n=3$

$\therefore f(x)=x^2+3$

$F'(t)=t^2f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{x^2-9}\int_{-3}^x t^2f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to -3}\frac{F(x)-F(-3)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to -3}\left\{\frac{F(x)-F(-3)}{x+3}\cdot\frac{1}{x-3}\right\}$$
$$=-\frac{1}{6}F'(-3)=-\frac{1}{6}\cdot 9f(-3)$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 12=-18$$

**답 $-18$**

## 228

$\int_0^a\left\{2+\frac{df(t)}{dt}\right\}dt=\int_0^a\{2+f'(t)\}dt=k$ ($k$는 상수)

로 놓으면

$f(x)-x^2+2ax=3k$

$\therefore f(x)=x^2-2ax+3k$

이때 $f(0)=0$이므로

$f(0)=3k=0$ $\therefore k=0$

$$\therefore k=\int_0^a \{2+f'(t)\}dt=\int_0^a (2+2t-2a)dt$$
$$=\left[2t+t^2-2at\right]_0^a=-a^2+2a=0$$

즉, $a^2-2a=0$에서 $a(a-2)=0$이므로

$a=0$ 또는 $a=2$

그런데 $a$는 양수이므로 $a=2$ **답 2**

## 229

$G(x)=\int_1^x f(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$G'(x)=f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-k$

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $G(x)$가 극솟값을 가지려면 $G'(x)=f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

즉, (극댓값)$\times$(극솟값)$<0$

한편,

$f'(x)=-3x^2+3x+6$

$\quad=-3(x^2-x-2)$

$\quad=-3(x+1)(x-2)=0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로

$f(-1)\times f(2)$

$=\left(1+\frac{3}{2}-6-k\right)(-8+6+12-k)<0$

$\therefore -\frac{7}{2}<k<10$

따라서 정수 $k$의 최댓값은 $M=9$, 최솟값은 $m=-3$이므로

$\frac{M}{m}=\frac{9}{-3}=-3$ **답 ③**

## 230

$f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-a)(x-b)$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$

조건 ㈎에서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

또한, 조건 ㈏에서 $f(a)-f(b)=\frac{1}{6}$이므로

$f(a)-f(b)$

$=\int_0^a (t-a)(t-b)dt-\int_0^b (t-a)(t-b)dt$

$=\int_0^a (t-a)(t-b)dt+\int_b^0 (t-a)(t-b)dt$

$=\int_b^0 (t-a)(t-b)dt+\int_0^a (t-a)(t-b)dt$

$=\int_b^a (t-a)(t-b)dt$

$=\int_b^a \{t^2-(a+b)t+ab\}dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+b}{2}t^2+abt\right]_b^a$

$=-\frac{(a-b)^3}{6}=\frac{1}{6}$

$-(a-b)^3=1$, $(a-b)^3=-1$

$\therefore a-b=-1$

한편, $b=\frac{1}{2}$이면 $a=b-1=-\frac{1}{2}$이므로 $a<0$이 되어 조건에 모순이므로 $a=\frac{1}{2}$이어야 한다.

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=2$ **답 2**

## 231

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-\int_2^x f(t)dt}{x^3-8}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 2$일 때

(분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\left\{f(x)-\int_2^x f(t)dt\right\}=0$

$f(2)-\int_2^2 f(t)dt=0 \qquad \therefore f(2)=0$

한편, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-\int_2^x f(t)dt}{x^3-8}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{x^3-8}-\frac{\int_2^x f(t)dt}{x^3-8}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}-\frac{F(x)-F(2)}{x^3-8}\right\}$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}-\frac{F(x)-F(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}-\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}f'(2)-\frac{1}{12}F'(2)$$

$$=\frac{1}{12}f'(2)-\frac{1}{12}f(2)\ (\because F'(x)=f(x))$$

$$=\frac{1}{12}f'(2)=\frac{1}{2}\ (\because f(2)=0)$$

$\therefore f'(2)=6$ **답 ④**

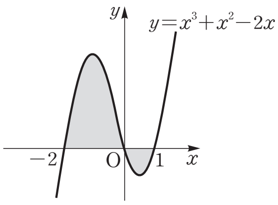
## 232

곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x^3+x^2-2x=0$에서 $x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




$-2\le x\le 0$에서 $y\ge0$, $0\le x\le1$에서 $y\le0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{37}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=37$이므로

$p+q=49$ **답 49**

## 233

곡선 $y=x(x-3)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$x(x-3)^2=x$에서 $x(x^2-6x+9)=x$

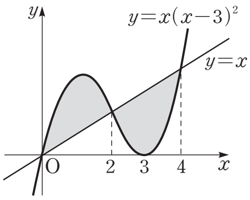
$x(x^2-6x+8)=0$, $x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

오른쪽 그래프에서

$0\le x\le 2$일 때, $x(x-3)^2\ge x$

$2\le x\le 4$일 때, $x(x-3)^2\le x$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\{x(x-3)^2-x\}dx+\int_{2}^{4}\{x-x(x-3)^2\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}(x^3-6x^2+8x)dx+\int_{2}^{4}(-x^3+6x^2-8x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_{2}^{4}$$

$$=8$$

**답 8**

## 234

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+1$의 교점의 $x$좌표는

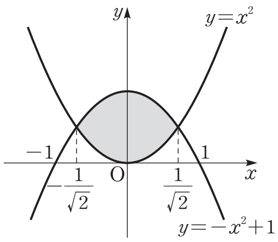
$x^2=-x^2+1$에서 $x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

오른쪽 그래프에서

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때,

$x^2\le -x^2+1$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{(-x^2+1)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2x^2+1)dx=2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+x\right]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$**

## 235

구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{-1}3x(x+1)dx-\int_{-1}^{0}3x(x+1)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(3x^2+3x)dx-\int_{-1}^{0}(3x^2+3x)dx$$

$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}-\left[x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=3$$

**답 3**

## 236

$A$, $B$의 넓이가 같으므로

$$\int_0^3 \{x^2(x-3)-ax(x-3)\}dx=0$$

$$\int_0^3 \{x^3-(3+a)x^2+3ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3+a}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2\right]_0^3=0$$

$$\frac{81}{4}-27-9a+\frac{27}{2}a=0$$

$$\frac{9}{2}a-\frac{27}{4}=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$$

**답** $\mathbf{\frac{3}{2}}$

## 237

$f(x)=2x^2+3$이라 하면 $f'(x)=4x$

곡선 $y=2x^2+3$ 위의 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2+3)$이라 하면 $f'(a)=4a$이므로 접선의 방정식은

$y-(2a^2+3)=4a(x-a)$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$을 지나므로

$-3-(2a^2+3)=4a(1-a)$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

즉, 접선의 방정식은 $y=-4x+1$ 또는 $y=12x-15$

따라서 두 접선과 곡선 $y=2x^2+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_{-1}^1 \{(2x^2+3)-(-4x+1)\}dx+\int_1^3 \{(2x^2+3)-(12x-15)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1 (2x^2+4x+2)dx+\int_1^3 (2x^2-12x+18)dx$$

$$=\int_{-1}^1 (2x^2+2)dx+\int_1^3 (2x^2-12x+18)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{-1}^1+\left[\frac{2}{3}x^3-6x^2+18x\right]_1^3=\frac{32}{3}$$

$$\therefore 3S=3\cdot\frac{32}{3}=32$$

**답 32**

## 238

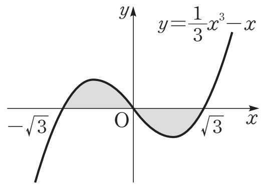
$$f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$이므로

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$$

$$=\frac{1}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{-\sqrt{3}}^0 \left(\frac{1}{3}x^3-x\right)dx-\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^0-\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

**답** ④

## 239

곡선 $y=x^2$을 조건에 따라 이동시키면

$-(y-5)=(x+1)^2$

$y=-(x+1)^2+5$

$\therefore g(x)=-(x+1)^2+5$

두 곡선 $y=x^2$과 $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표는

$x^2=-(x+1)^2+5$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

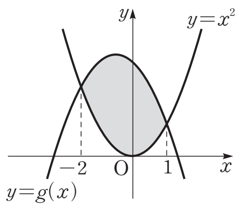
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

오른쪽 그래프에서

$-2\le x\le 1$일 때,

$x^2\le -(x+1)^2+5$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{-2}^1 \{-(x+1)^2+5-x^2\}dx$$

$$=\int_{-2}^1 (-2x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^1$$

$$=9$$

**답 9**

**다른풀이** 공식을 이용하면

$$S=\frac{|1-(-1)|\{1-(-2)\}^3}{6}=9$$

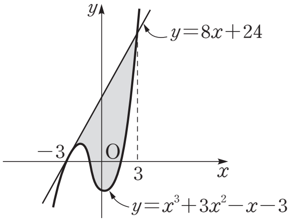
## 240

$f(x)=x^3+3x^2-x-3$

이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-1$

이므로 곡선 위의 점 $(-3,\ 0)$에서의 접선의 기울기는




$f'(-3)=3\cdot(-3)^2+6\cdot(-3)-1=8$

따라서 곡선 위의 점 $(-3,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=8(x+3)\qquad \therefore\ y=8x+24$

곡선과 접선의 교점의 $x$좌표는

$x^3+3x^2-x-3=8x+24$에서

$x^3+3x^2-9x-27=0,\ (x+3)^2(x-3)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-3}^{3}\{(8x+24)-(x^3+3x^2-x-3)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(-x^3-3x^2+9x+27)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(-3x^2+27)dx$$
$$=2\Big[-x^3+27x\Big]_0^3=108$$

**답 108**

**다른풀이** 공식을 이용하면

$$S=\frac{|1|\{3-(-3)\}^4}{12}=108$$

## 241

$0<a<b$이고 곡선 $y=(x-a)(x-b)x^2$과 직선 $y=0$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^b(x-a)(x-b)x^2dx=0$$
$$\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+b}{4}x^4+\frac{ab}{3}x^3\right]_0^b=0$$
$$\frac{1}{5}b^5-\frac{a+b}{4}\cdot b^4+\frac{ab}{3}\cdot b^3=0$$

$b>0$이므로 양변에 $\dfrac{60}{b^4}$을 곱하면

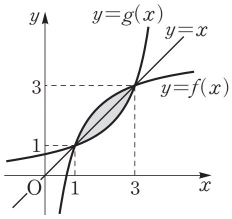
$12b-15(a+b)+20a=0,\ 5a=3b$

$\therefore\ \dfrac{3b}{a}=\dfrac{5a}{a}=5$

**답 5**

## 242

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이 $S$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.




$$\therefore\ S=2\int_1^3\{f(x)-x\}dx$$
$$=2\int_1^3f(x)dx-2\int_1^3x\,dx$$
$$=2\cdot\frac{11}{2}-2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=11-8=3$$

**답 3**

## 243

$f(x)=-x^3+ax+b$에서 $f'(x)=-3x^2+a$

곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$y-f(t)=(-3t^2+a)(x-t)$

$\therefore\ y=(-3t^2+a)(x-t)-t^3+at+b$

$\quad=(-3t^2+a)x+2t^3+b$

곡선 $y=f(x)$와 접선의 교점의 $x$좌표는

$-x^3+ax+b=(-3t^2+a)x+2t^3+b$에서

$(x-t)^2(x+2t)=0$

$\therefore\ x=-2t$ 또는 $x=t\ (t>0)$

이때 접선과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2t}^{t}\{(-3t^2x+ax+2t^3+b)-(-x^3+ax+b)\}dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x^3-3t^2x+2t^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_{-2t}^{t}$$
$$=\frac{27}{4}t^4$$

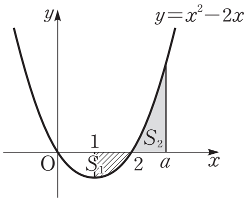
따라서 $\dfrac{27}{4}t^4=\dfrac{4}{3}$에서 $t^4=\dfrac{16}{81}$

$t>0$이므로 $t=\dfrac{2}{3}$

**답 $\dfrac{2}{3}$**

## 244

$y=x^2-2x$의 그래프의 대칭축은 $x=1$이고 $S_1=2S_2$이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 도형의 넓이는 $S_2$와 같다.




즉, $\int_1^a (x^2-2x)dx=0$

$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^a=0$

$\frac{1}{3}a^3-a^2-\left(\frac{1}{3}-1\right)=0$

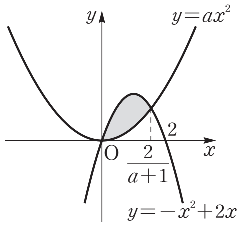
$a^3-3a^2+2=0,\ (a-1)(a^2-2a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $a>2$이므로 $a=1+\sqrt{3}$ **답** $\mathbf{1+\sqrt{3}}$

## 245

두 곡선 $y=-x^2+2x$와 $y=ax^2$의 교점의 $x$좌표는




$-x^2+2x=ax^2$에서

$(a+1)x^2-2x=0$

$x\{(a+1)x-2\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{2}{a+1}$

곡선 $y=-x^2+2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^2 (-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

따라서 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$이므로

$\int_0^{\frac{2}{a+1}} \{(-x^2+2x)-ax^2\}dx=\frac{2}{3}$

$\int_0^{\frac{2}{a+1}} \{-(a+1)x^2+2x\}dx=\frac{2}{3}$

$\left[-\frac{a+1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{2}{a+1}}=\frac{2}{3}$

$\frac{4}{3(a+1)^2}=\frac{2}{3},\ (a+1)^2=2$

$a+1=\pm\sqrt{2}\qquad \therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$

그런데 $a>0$이므로

$a=-1+\sqrt{2}$ **답** $\mathbf{-1+\sqrt{2}}$

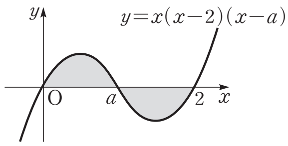
## 246

곡선 $y=x(x-2)(x-a)$와 $x$축과의 교점의 $x$좌표는

$x(x-2)(x-a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=2$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.




이때 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\int_0^a x(x-2)(x-a)dx-\int_a^2 x(x-2)(x-a)dx$$

$$=\int_0^a \{x^3-(2+a)x^2+2ax\}dx-\int_a^2\{x^3-(2+a)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2+a}{3}x^3+ax^2\right]_0^a-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2+a}{3}x^3+ax^2\right]_a^2$$

$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because\ 0<a<2$)

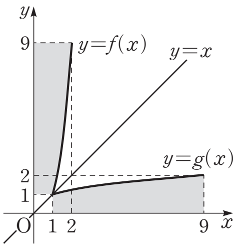
| $a$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $S(a)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 $S(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소가 되고, 그때의 넓이는

$S(1)=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$

**답** $\mathbf{a=1}$**, (넓이)**$\mathbf{=\frac{1}{2}}$

## 247




위의 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_1^9 g(x)dx=2\cdot 9-1\cdot 1-\int_1^2 f(x)dx$$
$$=17-\int_1^2 (x^3+x-1)dx$$
$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$$

**답** ③

## 248

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (6t-3t^2)dt$$
$$=\left[3t^2-t^3\right]_0^3=0$$

$\therefore a=0$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|dt=\int_0^2 (6t-3t^2)dt+\int_2^3 (-6t+3t^2)dt$$
$$=\left[3t^2-t^3\right]_0^2+\left[-3t^2+t^3\right]_2^3=8$$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b=0+8=8$

**답** 8

## 249

두 점 P, Q의 $t$초 후의 위치를 각각 $x_1$, $x_2$라 하면

$$x_1=\int_0^t (3t^2-8t+4)dt$$
$$=\left[t^3-4t^2+4t\right]_0^t=t^3-4t^2+4t$$
$$x_2=\int_0^t (12-8t)dt$$
$$=\left[12t-4t^2\right]_0^t=12t-4t^2$$

$t^3-4t^2+4t=12t-4t^2$에서

$t^3-8t=0$, $t(t+2\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0$

그런데 $t>0$이므로

$t=2\sqrt{2}$(초 후)

**답** $2\sqrt{2}$초 후

## 250

2초 후에 5 m의 상공에 도달하려면 $\int_0^2 v(t)dt=5$

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (v_0-9.8t)dt$$
$$=\left[v_0t-4.9t^2\right]_0^2=2v_0-19.6$$

이므로 $2v_0-19.6=5$

$\therefore v_0=12.3$(m/s)

**답** 12.3 m/s

## 251

$$(\text{구하는 높이})=\int_0^{35} v(t)dt$$
$$=\int_0^{20} t\,dt+\int_{20}^{35} (60-2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{35}$$
$$=275(\text{m})$$

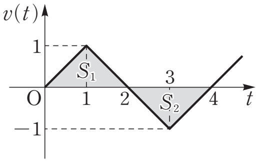
**답** 275 m

## 252

$t=a$일 때, 출발한 점에 다시 돌아온다고 하면

$\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로 $t=4$일 때, 출발한 점에 다시 돌아온다.




$\therefore a=4$(초)

**답** 4초

## 253

$$\int_0^6 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6 \{-v(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$=\frac{11}{2}$$

**답** $\frac{11}{2}$

## 254

$t=a(a>0)$일 때, 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 $\int_0^a(-3t^2-2t+12)dt=0$이어야 한다.

$\int_0^a(-3t^2-2t+12)dt=\left[-t^3-t^2+12t\right]_0^a=0$

$-a^3-a^2+12a=0$, $a(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 3초 후에 원점으로 다시 돌아온다. **답 3초 후**

## 255

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리가 58이므로

$a>2$

$\therefore \int_0^a|3t^2-6t|dt$

$=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^a(3t^2-6t)dt$

$=-\left[t^3-3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^a$

$=a^3-3a^2+8=58$

$a^3-3a^2-50=0$, $(a-5)(a^2+2a+10)=0$

$\therefore a=5$

$\therefore v(5)=3\cdot5^2-6\cdot5=45$ **답 45**

## 256

최고 높이에 도달할 때, 이 물체의 속도는 0이므로

$v(t)=40-8t=0$에서 $t=5$

최고 높이에 도달할 때까지 이 물체가 움직인 거리는

$\int_0^5|40-8t|dt=\int_0^5(40-8t)dt$

$=\left[40t-4t^2\right]_0^5=100(\text{m})$

따라서 이 물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리는

$100+(100+20)=220(\text{m})$ **답 220 m**

## 257

$72(\text{km/h})=20(\text{m/s})$이고 속도가 일정한 비율로 감소하였으므로 브레이크를 밟은 지 $t$초 후의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=20-kt(\text{m/s})$ (단, $k$는 상수)

정지할 때까지 걸린 시간은 $v(t)=20-kt=0$에서

$t=\frac{20}{k}$

정지할 때까지 움직인 거리는 50 m이므로

$\int_0^{\frac{20}{k}}|20-kt|dt=\int_0^{\frac{20}{k}}(20-kt)dt=50$

$\left[20t-\frac{1}{2}kt^2\right]_0^{\frac{20}{k}}=50$

$\frac{400}{k}-\frac{1}{2}k\left(\frac{20}{k}\right)^2=50$, $\frac{200}{k}=50$

$\therefore k=4$

따라서 걸린 시간은

$t=\frac{20}{k}=\frac{20}{4}=5(\text{초})$ **답 5초**

## 258

$t=a$에서 $t=b$까지 움직일 때,

위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$

ㄱ. $\int_0^5 v(t)dt=\frac{1}{2}(1+3)\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

이므로 출발점에 위치하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 2초 동안 멈추었다면 $v(t)=0$인 구간이 2초 동안 있어야 하므로 옳지 않다. (거짓)

ㄷ. 운동 방향을 바꾼 시각은 $v(t)=0$인 시각 $t=3$, $t=5$이므로 움직이는 동안 방향을 2번 바꿨다. (참)

ㄹ. $\int_0^3|v(t)|dt=\frac{1}{2}(1+3)\cdot2=4$이므로

점 P가 출발하고 나서 3초 동안 움직인 거리는 4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. **답 ㄷ, ㄹ**