정답 및 해설

미적분 정답

23	④	24	③	25	③	26	②	27	②
28	①	29	4	30	129				

미적분 해설

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+5}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{5}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{5}{n^4}}+1}=\dfrac{5}{2}$

24. [출제의도] 치환적분법 이해하기

$\displaystyle\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$

$\displaystyle=\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx$

$\ln x=t$ 라 하면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e$ 일 때 $t=1$

따라서 $\displaystyle\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx=3\int_0^1 t\,dt$

$\displaystyle=3\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$\dfrac{dx}{dt}=2t\ln t+t+3$

$\dfrac{dy}{dt}=6e^{t-1}+6te^{t-1}=6e^{t-1}(1+t)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{6e^{t-1}(1+t)}{2t\ln t+t+3}\quad(2t\ln t+t+3\neq 0)$

따라서 $t=1$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6\times 2}{1+3}=\dfrac{12}{4}=3$

26. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=\dfrac{1}{3}$ 에서 $f(2)=2$, $f'(2)=\dfrac{1}{3}$

$f(x)$ 는 함수 $g(x)$ 의 역함수이므로 $g(2)=2$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(2)}=3$

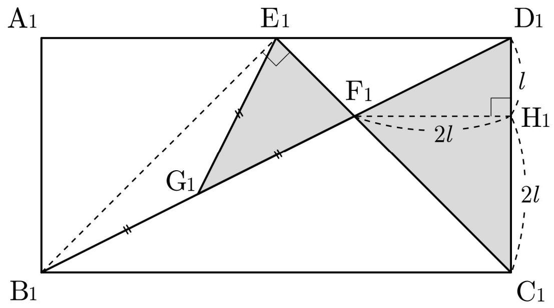
$f(2)\neq 0$ 이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$h'(2)=\dfrac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2}$

$=\dfrac{3\times 2-2\times\dfrac{1}{3}}{2^2}=\dfrac{6-\dfrac{2}{3}}{4}=\dfrac{4}{3}$

27. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



점 F_1 에서 선분 C_1D_1 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하자.

$\overline{D_1H_1}=l\,(l>0)$ 이라 하면 $\overline{F_1H_1}=\overline{C_1H_1}=2l$

$\overline{C_1D_1}=3l=1$

$l=\dfrac{1}{3}$ 이므로 $\overline{D_1H_1}=\dfrac{1}{3}$, $\overline{F_1H_1}=\dfrac{2}{3}$

삼각형 $C_1D_1F_1$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\angle B_1E_1F_1=\dfrac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$ 이므로

점 G_1 은 삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 외접원의 중심이다.

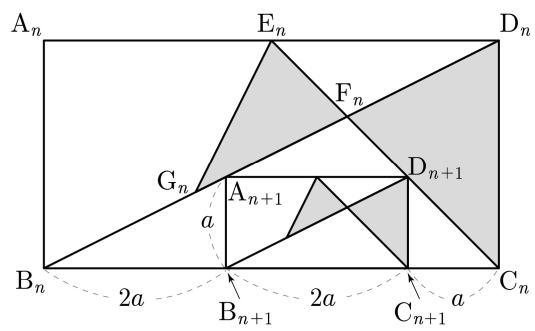
$\overline{B_1G_1}=\overline{G_1F_1}$ 이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는 삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

$\overline{B_1E_1}=\sqrt{2}$, $\overline{E_1F_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로

삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{E_1F_1}\right)=\dfrac{1}{4}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{6}$

$S_1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$



두 삼각형 $C_nD_nF_n$, $G_nF_nE_n$ 으로 만들어진 ⋈ 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=a\,(a>0)$ 이라 하면

$\overline{B_nB_{n+1}}=2a$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2a$, $\overline{C_{n+1}C_n}=a$

$\overline{B_nC_n}=5a$

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\dfrac{2}{5}\overline{B_nC_n}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$,

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 닮음비는 $1:\dfrac{2}{5}$ 이므로

넓이의 비는 $1^2:\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ 이다.

$T_{n+1}=\dfrac{4}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1=S_1=\dfrac{1}{2}$ 이고

공비가 $\dfrac{4}{25}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{42}$

28. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos 2\pi x)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^5 xf(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx\ \cdots$ ㉠

조건 (가)에 의하여

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$, $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$

$\displaystyle\int_{-1}^5 xf(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_1^3 xf(x)dx+\int_3^5 xf(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1(x+2)f(x+2)dx$

$\displaystyle\quad+\int_{-1}^1(x+4)f(x+4)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1(x+2)f(x)dx$

$\displaystyle\quad+\int_{-1}^1(x+4)f(x)dx$

$\displaystyle=3\int_{-1}^1 xf(x)dx+6\int_{-1}^1 f(x)dx$

$\displaystyle=12\int_0^1 f(x)dx=24\ \cdots$ ㉡

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x)=f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2)=f(x)\cos 2\pi x$

$\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx+\int_1^3 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle\quad+\int_3^5 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle\quad+\int_{-1}^1 f(x+2)\cos 2\pi(x+2)\,dx$

$\displaystyle\quad+\int_{-1}^1 f(x+4)\cos 2\pi(x+4)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle\quad+\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle=3\int_{-1}^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle=6\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

㉠, ㉡에 의하여

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx=\frac{1}{6}\left(\frac{47}{2}-24\right)=-\frac{1}{12}$

따라서

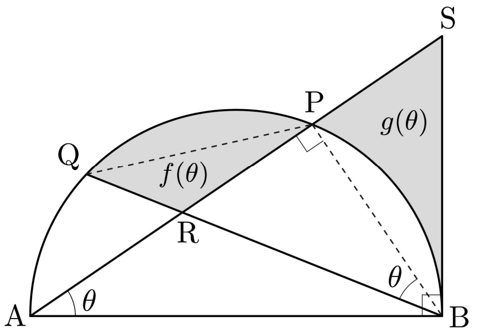
$\displaystyle\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$

$\displaystyle=\Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_0^1-2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$\displaystyle=-2\pi\int_0^1 f(x)\cos 2\pi x\,dx$

$=\dfrac{\pi}{6}$

29. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로
원주각의 성질에 의하여
$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{QBP}=\theta$

$\angle\mathrm{ABS}=\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이고

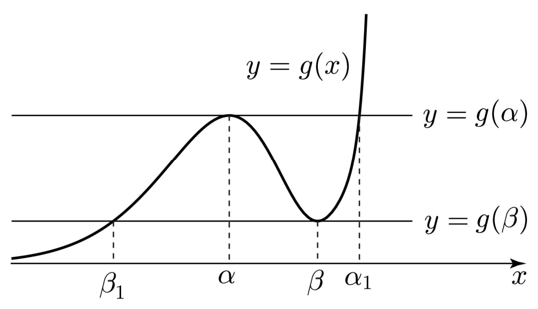
$\angle\mathrm{PBA}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 이므로 $\angle\mathrm{SBP}=\theta$
두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로
두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.
선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.
그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.
$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2\sin\theta$

$$f(\theta)+g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\sin(\pi-2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$$
$$=2\sin^2\theta\sin2\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\sin2\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)$$
$$=2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)$$
$$=2\times1^2\times2=4$$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 추론하기

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$
$\quad=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$
함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면
$g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$는 $k=t$ ($t\neq g(\alpha)$, $t\neq g(\beta)$)에서
$\lim\limits_{k\to t-}h(k)=\lim\limits_{k\to t+}h(k)=h(t)$
그러므로 함수 $h(k)$는
$k=t$ ($t\neq g(\alpha)$, $t\neq g(\beta)$)에서 연속이다.
조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로
함수 $h(k)$는
$k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속
또는
$k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속
이다.

(i) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속인 경우
$\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$
$\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1$
$h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$이므로
$\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$에서
$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$
그러므로 $\alpha=0$
함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 불연속이므로
$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq0$
조건 (나)에 의하여 $\beta=1$, $g(\beta)=3e$
$g'(0)=0$, $g'(1)=0$이므로
$g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$
$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$
$g(1)=3e$이므로 $a=3$
최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속인 경우
$\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=\beta_1$
$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=2\beta+\beta_1$
$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$이므로
$\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$에서
$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$
그러므로 $\beta=0$
함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이므로
$\lim\limits_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim\limits_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq0$
조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1$, $g(\alpha)=3e$
$g'(0)=0$, $g'(-1)=0$이므로
$g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$
$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$
$g(-1)=3e$이므로 $a=e^2$
$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times3e^4=129$