구간 최장 증가 부분 수열 쿼리 (Part 1)

이번 글에서는 다음과 같은 쿼리를 수행하는 자료 구조에 대해 다룬다:

- 길이 N 의 수열 A 와 Q 개의 쿼리 $1 \le i \le j \le N$ 가 주어질 때, $A[i], A[i+1], \ldots, A[j]$ 의 최장 증가 부분 수열 (Longest Increasing Subsequence, LIS) 를 계산하라.

LIS 문제의 경우 동적 계획법으로 해결할 수 있는 가장 기초적인 문제 중 하나로, 수학적으로 여러 의미를 가지기 때문에 변형된 문제들이 다방면으로 연구되고 있다. 위와 같은 쿼리 문제는 다들 자료 구조 문제를 고민해 보다가 한번쯤 생각해 봤을 정도로 기초적인 문제 종류 중 하나이다. 본인은 오랜 시간 동안 위와 같은 쿼리를 풀 수 없다고 생각하다가 최근에 이를 $O(N \log^2 N + Q \log N)$ 시간에 해결하는 *semi-local string comparison* 이라는 논문을 발견하게 되었다. 그 내용 자체가 상당히 흥미롭고, LIS 문제 외에도 고민해 볼 거리가 많은 것 같아서 이를 이번 소프트웨어 멤버쉽 글로 소개하게 되었다. 한국 뿐만 아니라 외국 사람들도 잘 모르는 기술일 것 같아서, Codeforces에도 동일한 글을 영어로 작성하였다.

semi-local string comparison 을 소개하는 원 논문은 굉장히 길며 복잡한 수학적 용어들을 많이 사용한다. 이를 qwerasdfzxcl 이 짧게 정리했지만, 원리와 이해에 대해서는 설명을 생략한 자료이다. 오랜 기간 연구한 끝에 이러한 복잡한 수학 지식 없이 나름대로 간단하게 이 테크닉을 이해하는 방법을 찾았다. 여전히 아주 간단하지는 않지만, 이번 글을 통해서 많은 사람들이 더 고민해 보고 더욱 더 간단한 해석을 찾으면 그것도 의미가 클 것 같다.

Chapter 1. The All-Pair LCS Algorithm

위 문제의 일반화된 버전을 생각해보자:

- 길이 N 의 수열 S, 길이 M 의 수열 T, Q 개의 쿼리 $1 \le i \le j \le M$ 이 주어질 때, S 와 $T[i], T[i+1], \ldots, T[j]$ 의 최장 공통 부분수열 (LCS, Longest Common Subsequence) 를 계산하라.

위 문제가 구간 LIS 문제의 일반화인 이유는 다음과 같다: $(A[i], -i)$ 를 좌표압축 할 경우 A 를 길이 N 의 순열로 볼 수 있고, 순열 A 의 LIS는 A 와 $[1, 2, \ldots, N]$ 의 LCS와 같기 때문이다. 고로 위 자료구조를 $S = [1, 2, \ldots, N], T = A$ 로 초기화하면 LIS 쿼리를 응답하는 자료구조를 구성할 수 있다.

구간 LCS 문제는 LIS와 유사하게 그 자체로도 흥미로운 문제가 될 수 있다. 예를 들어, Cyclic LCS 역시 구간 LCS를 해결하면 풀 수 있고, 예전 Petrozavodsk 문제 중에서도 구간 LCS에 대한 문제가 있었다. 구간 LCS는 $O(N^2 + Q)$ 시간에 해결할 수 있는 다양한 풀이가 존재하며 ($N = M$ 이라 가정) 예를 들어 본인의 예전 글에 소개된 Andy Nguyen의 Cyclic LCS 풀이 를 응용해서 해결할 수도 있다. 하지만 이들 중 LIS 문제의 $O(N \log^2 N)$ 과 연관이 있는 풀이는 An all-substrings common subsequence algorithm 논문에 나온 풀이 뿐이다.

LCS 문제의 일반적 풀이에 사용되는 DP 테이블을 생각하자. 상태 및 상태 전이는 그리드 형태의 Directed Acyclic Graph (DAG) 라고 생각할 수 있다. 정확하게는, 다음과 같은 그래프이다:

- 상태 (i, j) 에 대응되는 $(N+1) \times (M+1)$ 개의 정점
- (i, j) 에서 $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ 로 가는 가중치 0의 간선
- $S[i+1] = T[j+1]$일 때 (i, j) 에서 $(i+1, j+1)$ 로 가는 가중치 1의 간선

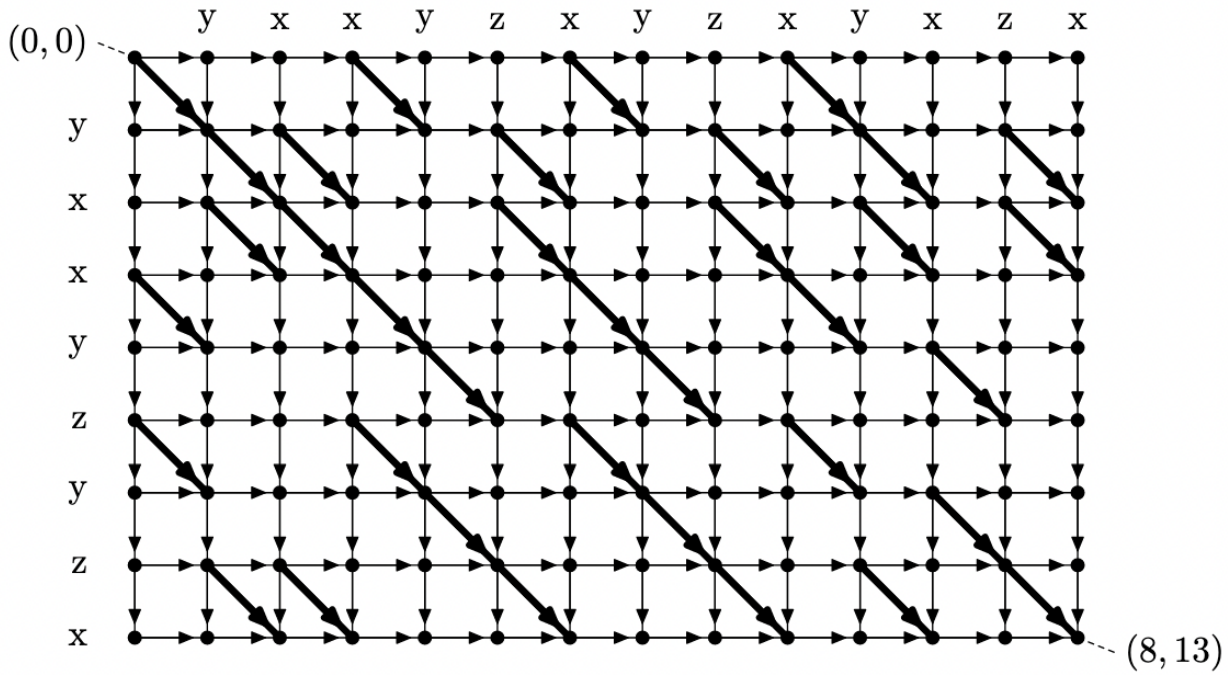


Figure: 문자열 "yxxyzyzx", "yxxyzxyzxyxzx" 에서 구성된 DAG

쿼리 (i, j) 에 대한 답은 이 그래프의 정점 $(0, i-1)$ 에서 정점 (N, j)으로 가는 최장 경로의 길이와 같다. (x_1, y_1) 에서 (x_2, y_2) 로 가는 최장 경로의 길이를 $dist((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ 라 하자. 목표는 $dist((0, i), (N, j))$ 를 모든 $0 \le i < j \le M$ 에 대해 계산하면 된다. 이를 위해서는 몇 가지 Lemma가 필요하다.

Lemma 1. $dist((0, y), (i, j)) - dist((0, y), (i, j-1))$ 는 0 혹은 1.
Proof.

- $dist((0, y), (i, j-1)) \le dist((0, y), (i, j))$: 그 외 경우 $(i, j-1)$ 로 가는 경로를 오른쪽 방향 간선으로 확장할 수 있다.
- $dist((0, y), (i, j-1)) \ge dist((0, y), (i, j)) - 1$: 그 외 경우 (i, j) 로 가는 경로를 $j-1$ 번 열에서 자르고 아래로 이동할 수 있다.
  ■

Lemma 2. $dist((0, y), (i, j)) - dist((0, y), (i-1, j))$ 는 0 혹은 1.
Proof. Lemma 1과 동일. ■

Lemma 3. 모든 i, j에 대해 정수 $0 \le i_h(i, j) \le j$ 가 존재하여

- 모든 $i_h(i,j) \le y < j$ 에 대해 $dist((0,y),(i,j)) - dist((0,y),(i,j-1)) = 1$
- 모든 $0 \le y < i_h(i,j)$ 에 대해 $dist((0,y),(i,j)) - dist((0,y),(i,j-1)) = 0$

Proof. 위 명제는 다음과 동치이다: 모든 y, i, j 에 대해
$dist((0,y),(i,j)) - dist((0,y),(i,j-1)) \le dist((0,y+1),(i,j)) - dist((0,y+1),(i,j-1))$.
$(0,y) \to (i,j)$ 를 잇는 최적 경로와 $(0,y+1) \to (i,j-1)$ 를 잇는 최적 경로를 생각해 보자. DAG가 평면 그래프이니, 두 경로는 교차한다. 두 경로의 도착점을 교환하면, 같은 비용의 두 경로 $(0,y) \to (i,j-1)$, $(0,y+1) \to (i,j)$를 얻으며 이 경로의 비용 합은 최적 경로의 비용 합 이하이다. 고로 $dist((0,y),(i,j)) + dist((0,y+1),(i,j-1)) \le dist((0,y+1),(i,j)) + dist((0,y),(i,j-1))$ 이 성립한다. ■

Lemma 4. 모든 i, j에 대해 정수 $0 \le i_v(i,j) \le j$ 가 존재하여

- 모든 $i_v(i,j) \le y < j$ 에 대해 $dist((0,y),(i,j)) - dist((0,y),(i-1,j)) = 0$.
- 모든 $0 \le y < i_v(i,j)$ 에 대해 $dist((0,y),(i,j)) - dist((0,y),(i-1,j)) = 1$

Proof. Lemma 3과 동일. ■

모든 i, j 에 대해 $i_h(i,j)$ 와 $i_v(i,j)$를 계산했다고 하자. 이를 토대로 $dist((0,i),(N,j))$ 를 계산하려면 어떻게 해야 할까? 식을 정리해 보면:

$dist((0,i),(N,j))$
$= dist((0,i),(N,i)) + \sum_{k=i+1}^{j} dist((0,i),(N,k)) - dist((0,i),(N,k-1))$
$= 0 + \sum_{k=i+1}^{j} (i_h(N,k) <= i)$

결론적으로, 전체 값이 필요한 것도 아니고 $i_h(N,*)$ 만 알면 쿼리를 계산할 수 있다. $i_h(N,*)$ 배열 값이 주어진다고 하면, 쿼리들은 $O(\log N)$ 시간에 Fenwick tree를 사용하거나, $O(1)$ 시간에 2차원 부분합을 사용하여 계산할 수 있다. (2차원 부분합은 초기화에 $O(N^2)$ 시간이 필요.)

고로 i_h, i_v 값을 계산하는 것만이 남았으며, 놀랍게도 이것은 **아주 간단한** 점화식으로 계산이 가능하다.

Theorem 5. 다음이 성립한다:

- $i_h(0,j) = j$
- $i_v(i,0) = 0$
- $i, j \ge 1, S[i] = T[j]$ 에 대해
  - $i_h(i,j) = i_v(i,j-1)$
  - $i_v(i,j) = i_h(i-1,j)$
- $i, j \ge 1, S[i] \ne T[j]$ 에 대해
  - $i_h(i,j) = \max(i_h(i-1,j), i_v(i,j-1))$
  - $i_v(i,j) = \min(i_h(i-1,j), i_v(i,j-1))$

Proof. Base case는 자명하다. 고정된 y에 대해, $(0, y)$ 에서 셀 사각형의 네 꼭지점 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i, j-1)$ 으로 가는 거리를 고정하자. $t = dist((0, y), (i-1, j-1))$ 라 하면 이에 인접한 두 꼭짓점의 거리는 t 거나 $t+1$ 이다. 가능성은:

- $dist((0, y), (i-1, j))$ 의 값이 t 인지 $t+1$ 인지 ($y \geq i_h(i-1, j)$ 과 동치)
- $dist((0, y), (i, j-1))$ 의 값이 t 인지 $t+1$ 인지 ($y < i_v(i, j-1)$ 과 동치)
- $S[i] = T[j]$ 인지 아닌지

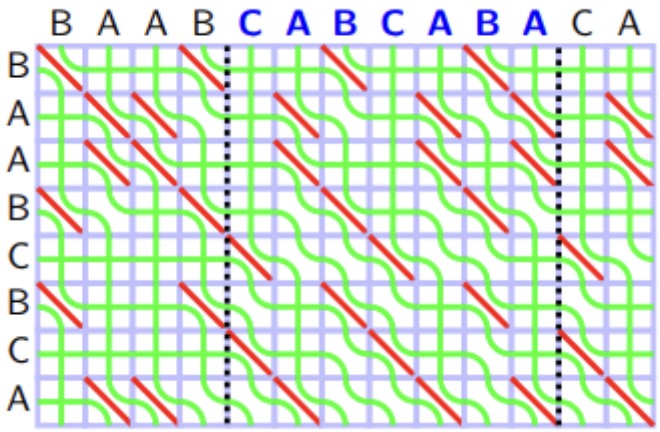
이 세 정보가 $dist((0, y), (i, j))$ 을 유일하게 결정하며, $2^3 = 8$ 가지 경우를 모두 따져보면 Theorem 5를 증명할 수 있다. ■
Remark. 원본 논문에 있는 증명이 이러하며 내가 찾은 증명도 이것이다. 아마 노가다가 없는 아주 단순한 설명이 있을 것 같은데, 이에 대해 탐구해 보면 좋을 것 같다.

Theorem 5에 의해 i_h, i_v 를 모두 계산하는 간단한 점화식을 사용할 수 있다. 고로 All-Pair LCS 문제는 $O(NM + Q \log N)$ 시간에 풀 수 있고, 이에 따라 Range LIS 문제 역시 $O(N^2 + Q \log N)$ 시간에 풀 수 있다.

SETH Conjecture 가 참이라는 가정 하에, 두 문자열의 Longest common subsequence는 $O(NM)$ 보다 빠르게 구할 수 없다. 이렇게 보면 현재 알고리즘을 줄이기 어려워 보이지만, LIS의 경우 한 쪽 패턴이 $[1, 2, \ldots, N]$로 고정되어 있다는 사실을 활용하여 시간 복잡도를 줄일 수 있다.

Chapter 2. The Seaweed

DP 과정을 도식화하면 우리가 다루는 구조를 조금 더 깊게 이해할 수 있다. 값 i_v, i_h 를 그리드 그래프의 간선에 연관해서 생각해 보자. 이 경우 매번의 DP 상태 전이는 위/왼쪽 간선에서 값을 골라서, 이를 아래/오른쪽 간선에 매칭시키는 것이라고 볼 수 있다. 그림으로 그리면 다음과 같다:



이 그림에서 초록색 곡선은 값을 나타낸다. 큰 직사각형의 왼쪽 변에서 온 값들은 ("BAABCBCA") 0이고, 위쪽 변에서 온 값들은 ("BAABCABCABA") $1, 2, \ldots, M$ 이다. 이러한 초록색 곡선을 **seaweed (미역)** 이라고 부른다. Seaweed를 왼쪽 아래에서 오른쪽 위 방향으로 읽고, 읽은 순서대로 *왼쪽* 과 *오른쪽* 으로 상대적 위치를 표현하자. 이러한 관점에서 초기 seaweed들은 증가하는 순으로 정렬되어 있다고 생각할 수 있다.

이제 DP 상태 전이를 다시 살펴보자. $S[i] = T[j]$ 일 경우 두 seaweed가 교차하지 않는다. $S[i] \neq T[j]$ 일 경우 두 seaweed가 교차한다는 것은 왼쪽 seaweed가 오른쪽 seaweed보다 큰 값을 가진다는 뜻이다. 달리 말해, $S[i] \neq T[j]$ 인 셀은 seaweed를 **버블 정렬** 하는 효과를 준다: 두 인접한 seaweed $i, i+1$ 이 증가 순으로 나열되어 있으면 ($A[i] < A[i+1]$), 감소 순이 되게 바꿔주는 것이다 ($A[i] > A[i+1]$).

Range LIS에는 이러한 쌍이 $N^2 - N$ 개 존재하니 이 정도 관찰로는 아직 문제를 해결하기 불충분하다. 하지만 이제 최적화를 위한 main idea를 소개할 준비가 되었다.

앞의 조건을 수정해서, **값의 크기와 상관없이** 두 인접한 seaweed를 바꾸는 문제를 생각해보자. 우리는 각 연산을 순열 P 로 나타낼 것이다. 이 때 $P(i)$ 는 i 번째 seaweed의 최종 위치를 나타낸다. 만약 우리가 위치 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 에서 인접한 seaweed를 바꾼다고 하자. *기초 순열* P_i 를 다음과 같이 정의하자:

$$P_i(j) = \begin{cases} j+1, & \text{if } a = i \\ j-1, & \text{if } a = i+1 \\ j, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이 때 모든 연산의 최종 결과는, $P \circ Q$를 순열의 합성이라고 할 때 ($P \circ Q(i) = Q(P(i))$):

$$P = P_{i_1} \circ P_{i_2} \circ \ldots \circ P_{i_k}$$

로 나타낼 수 있다.

위 결과는 *값의 크기와 상관없다* 는 조건을 추가해서 문제를 쉽게 만든 것이기 때문에, Range LIS에 그대로 응용할 수는 없다. 여기서 정말 흥미로운 사실이 존재하는데, 조건을 다시 추가했을 때, $\boxdot$ 라는 신기한 연산자가 존재해서:

- $\boxdot$ 는 결합 법칙을 만족한다.
- 전체 연산의 결과가 하나의 순열 $P = P_{i_1} \boxdot P_{i_2} \boxdot \ldots \boxdot P_{i_k}$ 로 표현된다.

Chapter 3. The Operator

이 연산자는 정의부터 상당히 어렵고 여러 보조 Lemma를 필요로 한다.

Definition 6. 길이 N 의 순열 P 가 주어졌을 때, $\Sigma(P)$ 는 $(N+1) \times (N+1)$ 의 square matrix로 $\Sigma(P)_{i,j} = |\{x | x \geq i, P[x] < j\}|$ 이다.

직관적으로 봤을 때 이는 왼쪽 아래 방향의 부분합이다. 예를 들어 $P = [2, 3, 1]$ 라고 하면:

$$\Sigma(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이는 다음 행렬의 부분합이다: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definition 7. 크기 $N \times M$ 의 행렬 A 와 크기 $M \times K$의 행렬 B 가 주어질 때 **min-plus multiplication** $A \odot B$ 는 $(A \odot B)_{i,j} = \min_{1 \le k \le M}(A_{i,k} + B_{k,j})$ 로 정의된다.

Theorem 8. 길이 N 의 두 순열 P, Q 가 주어질 때, 길이 N 의 순열 R 이 존재해서 $\Sigma(R) = \Sigma(P) \odot \Sigma(Q)$ 를 만족한다. 이러한 R 을 $P \boxdot Q$ 라 한다.

이를 증명하기 위해 두 Lemma가 필요하다.

Lemma 8.1. 행렬 $\Sigma(R)$에 대해, 순열 R 이 존재할 조건은 다음과 동치이다:

- $\Sigma(R)_{i,1} = 0$
- $\Sigma(R)_{N+1,i} = 0$
- $\Sigma(R)_{i,N+1} = N + 1 - i$
- $\Sigma(R)_{1,i} = i - 1$
- $\Sigma(R)_{i,j} - \Sigma(R)_{i,j-1} - \Sigma(R)_{i+1,j} + \Sigma(R)_{i+1,j-1} \ge 0$

Proof of Lemma 8.1. 순열을 복원할 조건은 부분합의 역연산인 "변횻값 배열" 에서, 각 행과 열에 정확히 하나의 1 이 존재하고 그 외 모든 원소가 0 임과 동치이다. 5번째 식은 모든 원소가 음이 아님을 보장한다. 3/4번째 식은 모든 행과 열의 합이 1 임을 보장한다. ■

Lemma 8.2. 임의의 행렬 A에 대해, $A_{i,j} - A_{i,j-1} - A_{i+1,j} + A_{i+1,j-1} \ge 0$ 가 모든 i, j 에 대해 만족하는 것은 $A_{i_1,j_2} - A_{i_1,j_1} - A_{i_2,j_2} + A_{i_2,j_1} \ge 0$ 가 모든 $i_1 \le i_2, j_1 \le j_2$ 에 대해 만족하는 것과 동치이다.
Proof of Lemma 8.2. $\rightarrow$ 는 수학적 귀납법을 사용하면ㄷ ㅗ니다. $\leftarrow$ 은 자명하다. ■

Proof of Theorem 8. Lemma 8.1의 첫 4개 항목을 증명한다. $\Sigma(P), \Sigma(Q)$ 의 모든원소가 0 이상이기 때문에 $\Sigma(R)$ 역시 모든 원소가 0 이상임을 관찰하라.

- $\Sigma(R)_{i,1} \le \Sigma(P)_{i,1} + \Sigma(Q)_{1,1} = 0$
- $\Sigma(R)_{N+1,i} \le \Sigma(P)_{N+1,N+1} + \Sigma(Q)_{N+1,i} = 0$
- $\Sigma(R)_{i,N+1} = \min(\Sigma(P)_{i,j} + \Sigma(Q)_{j,N+1}) = \min(\Sigma(P)_{i,j} + N + 1 - j)$. 변횻값을 관찰하면 항이 $j = N + 1$ 에서 최소화됨을 볼 수 있다. $\Sigma(R)_{i,N+1} = \Sigma(P)_{i,N+1} = N + 1 - i$
- $\Sigma(R)_{1,i} = \min(\Sigma(P)_{1,j} + \Sigma(Q)_{j,i}) = \min(j - 1 + \Sigma(Q)_{j,i})$. 변횻값을 관찰하면 항이 $j = 1$ 에서 최소화됨을 볼 수 있다. $\Sigma(R)_{1,i} = \Sigma(Q)_{1,i} = i - 1$

여기서 *변횻값을 관찰한다* 는 것은 다음과 같은 뜻이다. $0 \le \Sigma(P)_{i,j} - \Sigma(P)_{i,j-1} \le 1$ 이 성립하기 때문에, j 를 1 늘릴 경우 위 값은 최대 1 증가한다. 하지만, $N + 1 - j$ 는 j 를 1 늘릴 경우 무조건 1 감소하니, 최소화를 위해 j 를 늘리지 않을 이유가 없다. 이러한 논증을 이 글에서 반복적으로 사용할 것이니 익혀두면 좋다.

마지막 항목을 증명할 차례다. k_1, k_2 를 $\Sigma(R)_{i,j} = \Sigma(P)_{i,k_1} + \Sigma(Q)_{k_1,j}$,
$\Sigma(R)_{i+1,j-1} = \Sigma(P)_{i+1,k_2} + \Sigma(Q)_{k_2,j-1}$ 가 만족되는 인덱스라고 하자. $k_1 \le k_2$ 라고 하면 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&\Sigma(R)_{i,j-1} + \Sigma(R)_{i+1,j} \\
&= \min_k(\Sigma(P)_{i,k} + \Sigma(Q)_{k,j-1}) + \min_k(\Sigma(P)_{i+1,k} + \Sigma(Q)_{k,j}) \\
&\le \Sigma(P)_{i,k_1} + \Sigma(P)_{i+1,k_2} + \Sigma(Q)_{k_1,j-1} + \Sigma(Q)_{k_2,j} \\
&\le \Sigma(P)_{i,k_1} + \Sigma(P)_{i+1,k_2} + \Sigma(Q)_{k_1,j} + \Sigma(Q)_{k_2,j-1} \text{ (Lemma 8.2)} \\
&= \Sigma(R)_{i,j} + \Sigma(R)_{i+1,j-1}
\end{aligned}
$$

$k_1 \ge k_2$ 일 때도 동일하다. 이 때는 Lemma 8.2 를 $\Sigma(P)$ 에 사용한다. ■

Theorem 9. $\boxdot$ 연산자는 결합 법칙이 성립한다.

Proof. Min-plus 행렬 곱은 일반 행렬 곱처럼 결합 법칙이 성립한다. ■

Lemma 10. I 를 identity permutation 이라고 할 때 ($I(i) = i$), $P \boxdot I = P$ (*변홧값을 관찰하면* 증명할 수 있다.) ■

이제 Seaweed와 $\boxdot$ 연산자의 동치를 보일 수 있는 최종 Theorem을 보일 준비가 되었다.

Theorem 11. N 개의 seaweed와, 연산 수열 $i_1, i_2, \ldots, i_k$가 주어진다고 하자. 각 연산의 뜻은 다음과 같다:

- 초기에는 i 번째 seaweed가 i 번째 위치에 있다.
- 각 $1 \le x \le k$에 대해 순서대로, i_x 위치에 있는 seaweed의 인덱스가 $i_x + 1$ 위치에 있는 seaweed보다 작을 경우 둘의 위치를 교환한다.
  P_i 를 위에서 정의한 *기초 순열* 이라고 하자. $P = P_{i_1} \boxdot P_{i_2} \boxdot \ldots \boxdot P_{i_k}$ 라고 할 때, 모든 연산 이후 i번째 seaweed 는 $P(i)$ 위치에 있다.

Proof of Theorem 11. k 에 대한 귀납법을 사용한다. 귀납 가정에 의해 $P_{i_1} \boxdot P_{i_2} \boxdot \ldots \boxdot P_{i_{k-1}}$ 은 $k-1$ 번의 연산 후 seaweed의 위치를 저장한다. 아래와 같이 정의하자:

- $t = i_k$
- $A = P_{i_1} \boxdot P_{i_2} \boxdot \ldots \boxdot P_{i_{k-1}}$
- $B = P_{i_1} \boxdot P_{i_2} \boxdot \ldots \boxdot P_{i_k}$
- $A(k_0) = t, A(k_1) = t + 1$

다음 명제를 증명하면 된다:

- $B(k_0) = t + 1, B(k_1) = t, B(i) = A(i)$ for all other i if $k_0 < k_1$
- $B = A$ if $k_0 > k_1$

이는 다음과 동치이다:

- $\Sigma(B)_{i,j} = \Sigma(A)_{i,j} + 1$ if $k_0 < i \le k_1, j = t + 1$

- $\Sigma(B)_{i,j} = \Sigma(A)_{i,j}$ otherwise.

$\Sigma(P_t) - \Sigma(I)$ 에 있는 0이 아닌 항은 $(\Sigma(P_t) - \Sigma(I))_{t+1,t+1} = 1$ 뿐이다. $\Sigma(A) \odot \Sigma(I) = \Sigma(A)$ 이기 때문에, $\Sigma(B)$ 와 $\Sigma(A)$ 는 $t+1$ 번 열에서만 값이 달라진다. $t+1$ 번 열에서는:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma(B)_{i,t+1} \\
&= \min_j(\Sigma(A)_{i,j} + \Sigma(P_t)_{j,t+1}) \\
&= \min(\min_{j \le t}(\Sigma(A)_{i,j} + t + 1 - j), \Sigma(A)_{i,t+1} + 1, (\min_{j > t+1} \Sigma(A)_{i,j}) \\
&= \min(\Sigma(A)_{i,t} + 1, \Sigma(A)_{i,t+2}) \text{ (변홧값)}
\end{aligned}
$$

$k_0 < k_1$ 일 경우:

- $\Sigma(A)_{i,t} = \Sigma(A)_{i,t+1} - 1 = \Sigma(A)_{i,t+2} - 2$ $(i \le k_0)$
- $\Sigma(A)_{i,t} = \Sigma(A)_{i,t+1} - 0 = \Sigma(A)_{i,t+2} - 1$ $(k_0 < i \le k_1)$
- $\Sigma(A)_{i,t} = \Sigma(A)_{i,t+1} - 0 = \Sigma(A)_{i,t+2} - 0$ $(k_1 < i)$

$\Sigma(B)_{i,t+1} = \Sigma(A)_{i,t+1} + 1$ iff $k_0 < i \le k_1$ 임을 관찰할 수 있다.

$k_0 > k_1$ 일 경우:

- $\Sigma(A)_{i,t} = \Sigma(A)_{i,t+1} - 1 = \Sigma(A)_{i,t+2} - 2$ $(i \le k_1)$
- $\Sigma(A)_{i,t} = \Sigma(A)_{i,t+1} - 1 = \Sigma(A)_{i,t+2} - 1$ $(k_1 < i \le k_0)$
- $\Sigma(A)_{i,t} = \Sigma(A)_{i,t+1} - 0 = \Sigma(A)_{i,t+2} - 0$ $(k_0 < i)$

$\Sigma(B)_{i,t+1} = \Sigma(A)_{i,t+1}$ 임을 관찰할 수 있다. ■

Part 2

Part 1에서는 문제를 해결하기 위한 모든 기초 이론을 짚고 넘어갔다. Part 1에 있는 내용을 그대로 구현할 경우 $O(N^5 + Q \log N)$ 시간에 Range LIS를 구할 수 있는데, 이것으로는 물론 문제를 해결하기 너무 느리니 다음 글에서 이를 단계적으로 $O(N \log^2 N + Q \log N)$ 으로 줄여나갈 것이다. 우리는 또한 이 테크닉을 사용하여 풀 수 있는 문제들을 더 자세히 살펴볼 것이다.

Practice problem

- Yosupo Judge: Prefix-Substring LCS
- BOJ: LCS 9
- IZhO 2013: Round words
- Ptz Summer 2019 Day 8: Square Subsequences