

2021학년도 수시모집 논술전형

논술고사 문제지 (자연계열)

모집단위	학부/학과	수험번호	성명
------	-------	------	----

◆ 유의 사항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

감독확인



이화여자대학교

1

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n + 1, \quad b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n + 1}$$

을 만족시킨다. 아래 물음에 답하시오. [35점]

- (1) 부등식 $x^2 \leq x+1$ 의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때 α, β 를 구하고, 닫힌구간 $[0, \beta]$ 에서 함수 $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ 의 최댓값이 2임을 보이시오.
- (2) β 가 문항 (1)에서 정해질 때, 모든 자연수 n 에 대하여 두 부등식 $a_n \geq \beta$ 와 $b_n \leq \beta$ 가 각각 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.
- (3) 모든 자연수 n 에 대하여 두 부등식 $a_n \geq a_{n+1}$ 과 $b_n \leq b_{n+1}$ 이 각각 성립함을 보이시오.

2좌표공간에 세 점 $O(0, 0, 0)$, $A(2, -\sqrt{2}, 0)$, $B(2, \sqrt{2}, 0)$ 이 있다. [35점]

- (1) 세 점 O, A, B 로부터 같은 거리에 있는 xy 평면 위의 점 C 의 좌표를 구하시오.
- (2) 세 점 O, A, B 로부터 같은 거리에 있는 좌표공간 위의 임의의 점 D 에서 xy 평면에 내린 수선의 발 H 가 문항 (1)에서 구한 점 C 와 같음을 보이시오.
- (3) 문항 (2)에서 주어진 한 점 D 에 대하여, 평면 OAD 와 평면 OAB 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\cos 2\theta = -\frac{1}{5}$ 일 때, 선분 OD 의 길이를 구하시오. (단, 점 D 의 z 좌표는 양수이다.)

3

자연수 $n(n \geq 3)$ 에 대하여 닫힌구간 $[1, n]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

(가) $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ 은 n 이하의 서로 다른 자연수이다.
 (나) $1 \leq k \leq n-1$ 인 자연수 k 에 대하여 닫힌구간 $[k, k+1]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 각각 두 점 $(k, f(k)), (k+1, f(k+1))$ 을 지나는 직선의 일부이다.

- (1) 함수 $f(x)$ 가 $f(k)=k$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)일 때 $\int_1^n f(x) dx$ 의 값을 구하시오.
- (2) 조건 (가), (나)를 만족하는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_1^n f(x) dx$ 의 최솟값을 구하시오.
- (3) 문항 (2)의 최솟값을 갖는 함수 $f(x)$ 의 개수를 구하시오.