대한수학교육학회지 <학교수학> 제 22 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 22, No. 2, 423 ~ 444. Jun 2020
DOI: https://doi.org/10.29275/sm.2020.06.22.2.423

실수의 연속성 지도를 위한 연속체의 역사적 분석

이 정 아* · 유 재 근** · 박 문 환***

본 연구는 연속체의 역사적 발달과정을 분석하고, 이를 바탕으로 하여 실수의 연속성에 대한 교수학적 시사점을 논의한 것이다. 역사적 분석 결과로 다음을 확인하였다. 첫째, 실수를 구성하는 과정은 무한에 대한 이해와 정당화를 둘러싼 오랜 시간이 걸린 매우 험난한 과정이었다. 둘째, 귀류법은 완비성이 실수를 구성하는 다양한 방법과 서로 동치임을 밝히는 데 전제가 되는 조건이다. 이에 대한 교수학적 함의는 다음과 같다. 첫째, 유리수로부터 실수를 구성하는 방법은 직관적 이해부터 수학적 정당화까지의 다양한 수준으로 구분될 수 있으며, 학생들의 이해 수준에 적절한 교수학적 조치가 제공되어야 한다. 둘째, 실수의 연속성은 수직선 모델로 직관적으로 설명할 수 있다는 장점이 있지만 유리수와의 차별성을 드러내기에 부족하며, 이를 위한 대안적인 방법이 필요하다. 이러한 연구결과는 실수의 연속성에 대한 교수학습에 유의미한 시사점을 제공한다.

Ⅰ. 서론

1872년에 Dedekind가 출판한 <연속과 무리수(Stetigkeit und irrationale Zahlen)>의 제목에서도 드러나듯이, 연속성은 유리수와 실수를 구분하는 중요한 성질(박임숙, 2000, p. 37)이므로 유리수에서 실수로의 수 체계 확장에서 다루어야 하는 필수 개념이라 할 수 있다. 또한 수직선에서 유리수의 빈틈을 메우는 무리수를 정의하려면 수열, 급수, 극한 등의 개념이 필요하다(정영우, 2010). 즉, 유리수로부터 실수로의 수 체계 확장에서 핵심적인 측면이라 할 수 있는 것은 유리수와 실수의 성질을 구분하는 것과 함께 무리수를 수열이나 급수에 의한 극한으로 이해하는 것이다.

학교수학에서 무리수는 중학교 3학년 ‘제곱근과 실수’ 단원에서 다루어진다. 교과서에서는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이를 수로 표현해야 하는 상황에서 제곱근 기호 $\sqrt{2}$와 그 소수표현을 설명한 후, 유리수가 아닌 수라는 무리수 정의로부터 $\sqrt{2}$의 무한소수 표현에서의 비순환성과 수직선과 실수 사이의 일대일 대응 관계를 ‘일반적으로 … 알려져 있다’라는 진술로 제시한다. 이러한 설명 방식은 유리수로부터 실수로의 수 체계 확장에서 핵심적인 측면을 간과할 우려가 있으며, 결과적으로 미적분의 토대로서의 실수 개념 형성에 공백이 발생할 수 있다.

실수와 수직선의 관계에 대하여, 2015개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 3학년 교과서의

* 용인풍덕고등학교 교사, cantatamath@hanmail.net (제1 저자)
** 홍천중학교 교사, kuki122@chol.com (교신저자)
*** 춘천교육대학교 교수, pmhwan@cnue.ac.kr

‘실수의 대소 관계’에서는 제곱근을 정사각형과 컴퍼스를 이용하여 수직선에 나타내보도록 한 후 ‘일반적으로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다(류희찬 외, 2015, p.27).’로 기술한다. 이는 수학자 수준에서의 엄밀한 이해가 아닌 중학생 수준에서의 이해를 의도하기에 ‘일반적으로 … 알려져 있다’라는 형식의 진술의 제시가 불가피할 수도 있다. 하지만 ‘완전히 메울 수 있음’에 대한 이해의 실마리나 그것의 필요성도 함께 다루어질 필요가 있을 것이다. 즉, 중학교에서 학습한 실수 개념은 고등학교 수학의 배경이 되기에, 중학교 수준에서 실수의 핵심적인 특성이 드러날 수 있도록 교수학습 방안이 마련될 필요가 있다. 이를 통해 학교수학에서 실수 개념에 대한 일관된 이해를 기대해 볼 수 있다.

중학교 수학에서 실수에 대응하는 기하학적 대상으로 수직선을 다루는 것은 수직선이 연속체의 특성을 지각적으로 파악할 수 있는 모델이기 때문이다. 그러한 지각으로부터 개념적 이해로 나아갈 필요가 있다. 그러나 개념적 이해를 위해서 무한에 대한 이해가 필수이며 이를 수직선에서 다루는 것은 쉽지 않다. 특히 이를 중학교 수준에서 명시적으로 다루는 것은 어렵다.

그럼에도 불구하고 선행연구(Peled & Hershkovitz, 1999; 박임숙, 2000; 이지원 2008; 최은아, 강향임, 2016)들은 중학교 수준을 고려한 실수의 연속성에 대한 좀 더 명시적인 교수학습이 필요하다고 하였다. 왜냐하면 연구의 설문대상자들이 무리수는 유리수가 아닌 수이고 수직선에 유리수와 무리수를 대응시킬 수 있다는 것을 알지만 순환소수로 표현된 유리수나 비순환소수로 표현된 무리수의 정확한 위치를 수직선 위에 찍을 수 없다고 생각하는 경향을 보였기 때문이다.

실수와 수직선의 관계에 대해 학교수학의 실수 단원에서 학습한 학생들이 연속체로서의 실수의 중요한 성질에 대한 낮은 이해도를 보인 것은 무리수 교수학습에 대한 재고를 시사한다.

변희현(2005)의 연구에 의하면, 학생들은 수열 1, 1.4, 1.41, 1.414, …은 $\sqrt{2}$에 수렴해 가기는 하지만, $1.414213562\cdots$이 $\sqrt{2}$는 아니라고 생각한다. 즉, 학생들은 ‘… 의 의미’를 소수점 이하의 숫자를 구하는 과정이 무한히 계속되는 잠재적 무한으로 이해하고 있는 것이다. 그러나 교과서에서는 등식 $\sqrt{2}=1.414213562\cdots$을 제시한 후, 실수의 대소 관계 단원에서 수직선 위의 제곱근의 위치를 잡아보게 하는 것으로 수직선과 실수의 관계에 대한 이해를 기대한다. 이러한 교수 의도와 학습 실제 사이의 차이에 따른 문제점은 선행연구에서 이미 살펴본 바 있다.

한편, 실수에 대한 교수학적 분석이 시도된 바 있으나(이지원, 2008; 정영우, 2010; 주신영, 2014), 연속체로서의 실수에 초점을 둔 교수학적 분석은 미흡했다. 교수학적 분석에는 수학적, 인식론적, 역사발생적, 심리학적, 교육학적 등의 분석이 포함된다(우정호, 2011). 따라서 특정한 수학적 개념의 온전한 이해를 위해서 역사적 발달의 분석이 고려된 다각도의 분석(이종희, 2002)이 이루어질 필요가 있다.

수학사는 일반적으로 수학적 개념의 형성과정에 대한 이해를 바탕으로 교수학습 활동을 설계하는 방법을 마련하는 데 있어 유용한 자원으로 여겨진다(우정호, 민세영, 박미애, 2004). 그리고 학문수학에서 실수는 완비순서체로 정의되며, 이것은 학교수학에서 실수와 수직선의 대응관계의 기저에 놓인 개념인 바, 무한소수에 대한 동적, 정적 관점 즉, 잠재적 무한과 실무한의 관계에 대한 이해를 필요로 한다(조한혁, 최영기, 1999).

예를 들어, $\sqrt{2}$, π, e와 같은 무리수 개념과 $0.9999\cdots=1$라는 사실을 설명하기 위해 수학적으로 정의된 실무한 개념이 사용된다(정계섭,

2008, p. 34).

이에 본 논문에서는 연속체에 대한 역사적 분석으로부터 실수의 연속성에 대한 교수학적 시사점을 얻고자 한다. 즉, 연속체로서의 실수 개념의 발생 과정을 살펴보고, 이를 바탕으로 학교수학에서 실무한으로서의 실수에 초점을 둔 교수학습 방안을 모색하고자 한다.

II. 연속체의 역사

유리수에서 실수로의 수 체계 확장 시 유리수에는 없고 실수에는 있는 것이 실수 개념의 교수학습에서 중요시 되어야 할 것이다. 학교수학에서 사칙연산은 유리수에 대해 닫혀 있으므로 이차방정식의 근의 필요성을 무리수의 교수학습의 의의로 다룬다. 그러나 이는 원주율 π나 $0.101001000\cdots$을 포함한 비순환소수에는 해당되지 않는 것이다.

유리수는 체의 공리와 순서공리를 만족하지만 완비성 공리를 만족하지 않는 수 체계이다. 완비성 공리까지 가정한 수 체계가 실수인 것이다. 실수는 완비순서체(complete ordered field)이다. 순서체인 유리수를 수직선과 대응시키면 공백이 생기고, 이 공백에 대한 탐구의 결과가 실수와 수직선 사이의 관계라 할 수 있다. 따라서 완비순서체를 이해하기 위해 연속체(continuum)에 대한 이해가 선행되어야 한다.

실수의 연속성은 그 무한분할가능성과 함께 미적분의 토대가 되는 것으로, 끊임이 없는 하나(一體)의 것이 얼마든지 세분될 수 있다고 하는 것이 쉽게 이해되지 않는 모순으로 여겨졌고 19세기 후반에 이르기까지 많은 혼란이 있었다(박근생, 1976, p. 2).

이에 Toepliz(1963)가 정리한 미적분 역사의 갈래를 참고하고 조한혁, 최영기(1999)의 무한소수에 대한 이해 관점인 잠재적 무한과 실무한을 토대로 연속체의 역사를 고찰해 보고자 한다.

1. Aristotle의 연속체[1)]

그리스의 현실주의 인식론은 산술적 수(number)와 기하학적 크기(magnitude)의 개념 및 관계를 분리하여 생각하였다. Aristotle(기원전 384-322)은 양을 구분하는 기본 조작으로 가분성(可分性, divisibility)을 도입하였다. 무한하게 나눌 수 있는 양은 크기이며, 이는 연속성의 성질을 갖는다. 반면, 유한 단계로만 나눌 수 있는 양은 수이며, 이는 이산성의 성질을 갖는다는 것이다. Aristotle의 관념에서는 개념의 기원이 물리적 세계에 있으며, 그 성질과 관계는 자연으로부터 물려받은 것이다. 따라서 지식을 얻기 위해서 자연을 면밀히 관찰하면서 과학적 개념을 추출하였다. 또한 수와 공간적 크기도 사물(things)과 떨어져서는 존재할 수 없다고 보았다.

Aristotle은 기하학적 연속체를 수와 구별한 것이며, 기하학적 연속체는 물리적 연속체의 추상화로 보았다. 그는 시간이 순간의 합으로 이루어질 수 없고 선은 점들의 합으로 이루어질 수 없다고 하였다. 이에 연속성은 '결코 끝나지 않는(never ending)' 가분성(divisibility)이므로, 선이 점들로 이루어질 수 없으며 연속체는 불가분량으로 구성되지 않는다고 결론지었다.

기하학적이며 연속적인 크기는 잠재적으로 무한히 나누어질 수 있으므로, 통약가능한 경우에는 크기들 사이의 비와 비례를 구할 수 있다. 그래서 통약가능한 경우만 수의 비를 유사하게 적용하였다. 통약가능한 경우는 각각의 크기를 동

1) 연속체 개념은 연속성을 포괄하는 것으로 해석할 수 있다. 즉, 본 연구에서 연속체 개념은 물리적 대상과 수학적 대상 모두에 적용되고, 연속성은 수학적 대상에만 적용되는 것으로 해석한다.

시에 나누어떨어지게 하는 유한한 크기를 찾을 수 있다. 반면에, 통약불가능한 경우는 잠재적으로 무한한 분할 과정에서 점점 더 작은 크기를 찾게 하며, 이때 단위 크기가 존재하지 않는다. 그리스의 인식론에서는 단위 크기의 존재를 실제적인 측정에 필요할 뿐만 아니라, 통약가능성과 통약불가능성을 구별하기 위해 이론적으로도 필수적인 것으로(우정호, 2017, p. 290) 보았다.

그래서 당시에는 단위 '하나(one)'를 수로 생각하지 않고 수(numbers)는 이산적 집합체로만 보았으므로, 수 개념과 관련된 연속에 대한 생각을 하지 않았다(Katz, 2000, p. 185). 산술적 단위와 기하학적 단위가 구별된 것이다.

Aristotle의 연속체(continuum)에 대한 설명은 다음과 같다(Branchetti, 2016, pp. 10-12).

> 점(0-차원), 선(1-차원), 면(2-차원)의 크기는 존재론적으로 변형 가능하고 지각할 수 있는 물리적인 대상(body)에 의존한다. 수학적 대상에 대해 이렇게 설명하는 것은 어렵기는 하지만, Aristotle은 점, 선, 면이 실제로는 지각적이고 물리적인 실체(reality)와 분리될 수 없다는 관점을 갖는 것으로 보인다. 차라리 기하학자는 물리적인 물체를 기하학적으로 생각하며, 물체의 공간적/기하학적 특성을 추상하고, 물체의 다른 특성과는 별도로 그러한 성질을 생각한다(White, 2009; Branchetti, 2016, p.11에서 재인용).

Aristotle은 연달아 배치된 물체의 경계가 붙어 있을 때 '접촉'이라고 설명하고, 접촉된 물체가 단일체를 이루었을 때 '연속'이라고 설명한다.

[그림 II-1] 연속체의 분류

예를 들어, 물리적 대상인 종이 한 장은 연속체라고 할 수 있다. 이 종이를 둘로 찢어서 두 종이의 경계를 다시 맞붙인 상태는 '접촉'이라고 할 수 있지만 단일체는 아니므로 '연속'이라고 할 수는 없다.

반면, 기하학적 대상인 두 선분의 경계(끝점)가 붙어 있으면 '접촉'이며, 동시에 단일체가 되므로 '연속'이다. 따라서 물리적 대상에 대한 연속과 기하학적 대상에 대한 연속은 차이가 있다.

Branchetti(2016)는 Aristotle 연속체의 주요 특징을 다음과 같이 정리하였다.

> ① 무한 분할 가능하지만 무한한 단위 부분으로 구성되는 것은 아니다.
> ② 연속의 특수한 경우로서, 부분은 서로 붙어 있고 단일체(a whole)를 구성한다.
> ③ 무한 분할 과정의 가능성(potential)을 허용한다.
> ④ Eudoxos의 비례 이론과 일관성이 있다.
> ⑤ 수학적 대상은 현실과 분리될 수 없기에 물리적 연속체와 직접적으로 연결되어 있다.
> ⑥ 수의 연속체 차원은 비교를 위해서만 가능하다(Branchetti, 2016, p. 11).

①, ②, ③, ⑤는 물리적·기하학적인 연속에 대한 설명이며, ④와 ⑥은 수에 대한 설명이라 할 수 있다. 특히 ④와 ⑥에서 Aristotle은 수에 대한 연속성을 물리적·기하학적인 연속과 구분하여 잠재적 무한의 관점에서 설명하고 있는 점은 눈여겨 볼만하다.

박선화(1998, p. 29)에 의하면, Aristotle은 잠재적 무한을 어떤 것을 임의로 끝없이 증대시키는 것으로, 실무한을 무한히 증대시킨 것의 총체가 완결되어 실체로서 존재하는 것으로 설명하면서 실무한의 존재에 대해서는 부정적인 태도를 취하였다. 그리고 Branchetti(2016, p. 11)에 따르면 잠재적 무한과 실무한의 존재에 관한 Aristotle의 신념은 많은 수학자들에게 영향을 미쳤다.

Aristotle의 관념은 19세기까지 물리 및 수학적 맥락에서 정통 견해가 되었으며, 미적분학 기초

를 세우는 데 어려움이 있었음에도 불구하고, Bolzano, Cauchy, Weierstrass까지 지속된다. 이러한 경향은 19세기 후반 Cantor에 이르러 전환점을 맞게 된다. 현대 수학에서 Aristotle의 영향은 소위 직관주의와 구성주의 전통에서 감지할 수 있다.

Aristotle의 무한 관념은 Dummett(1974)가 Aristotle 관련하여 서술한 것으로 정리해 보면, “직관 수학에서 모든 무한대는 잠재적 무한이며, 무한대는 완성되지 않았다. 무한한 구조를 파악하는 것은 이를 생성하는 과정을 파악하는 것이다. 무한을 인식하는 것은 그 과정이 끝나지 않을 것임을 인식하는 것이다” (Branchetti, 2016, p.12에서 재인용).

이상과 같이, Aristotle은 [그림 II-1]을 토대로 물리적 연속체와 기하적 연속체를 구분하였으며, 후대 학자들에게 연속체의 연구 영역에 대한 범주를 제공하였다. 또한 잠재적 무한 관념은 중세 및 근대 수학자들에게 영향을 주었으며, 대부분의 문제 상황에서 직관적 문제해결을 가능하게 한다는 장점이 있다. 하지만 수를 연속체로서 파악하게 하는 데에는 한계가 있다.

2. Archimedes의 연속체

Archimedes(기원전 287-212)의 연속체 개념은 매우 복잡하다. Archimedes의 연속체 개념은 (1906년 Heiberg에 의해 발견된) Eratostenes와 주고받은 서신에서 확인할 수 있으며, 두 가지 관점을 취하고 있다고 판단된다. 즉, 결과적 측면에서는 실무한을 사용하는 한편으로 잠재적 무한도 실진법(method of exhaustion)의 사용과 연구에 의해 받아들이고 있다.

다음은 원의 넓이를 구하기 위한 Archimedes의 접근 방법의 요약이다.

원의 넓이는 (원주)×(반지름)/2이 아니라고 가정하자. 그리고 d를 두 양(원의 넓이와 (원주)×(반지름)/2)의 차라고 하자. 원에 외접하는 정n각형을 그리면, 이 다각형의 넓이는 높이가 1인 n개의 삼각형의 넓이의 합과 같다. p를 다각형의 둘레의 반이라고 할 때, 전체 넓이는 p이다. 충분히 큰 n을 취하면, 다각형의 넓이와 원의 넓이의 차를 d/2보다 작게 할 수 있다. (이때) 다각형의 둘레와 원주의 차이는 d/2보다 작으므로, 원의 넓이와 (원주)×(반지름)/2의 차이는 d보다 작다. 따라서 d는 0이어야 한다(Maffini, 1999; Branchetti, 2016, p.12에서 재인용).

위의 접근법에서는 우선 다음과 같은 측정 공리를 암묵적으로 사용하고 있음을 알 수 있다.

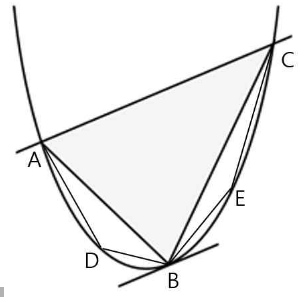
두 선분 a, b에 대하여 $a<n\cdot b$인 자연수 n이 반드시 존재한다.

즉, 원주의 넓이를 a라 하고, d를 (원의 넓이)와 (원주)×(반지름)/2의 차라고 할 때, $a<n\cdot\frac{d}{2}$를 만족하는 최소의 자연수 n이 존재하며, 이때 $(n-1)\frac{d}{2}\le a<n\frac{d}{2}$이다. 즉 $n\cdot\frac{d}{2}-a\le\frac{d}{2}<d$이다. 이는 외접하는 정$n$각형으로 원에 근사시킬 수 있음을 의미하며 잠재적 무한이 사용되고 있다. 그런데 (원의 넓이)=(원주)×(반지름)/2 임을 보이기 위해 귀류법을 사용하며 여기서 실무한이 사용되고 있다. 즉, 원의 넓이를 구하는 방법(또는 과정)에서는 잠재적 무한을, 원의 넓이에 대한 공식을 공표하면서 실무한을 사용하고 있음을 볼 수 있다.

이는 Archimedes가 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이에 대한 연구에서도 드러난다. 그는 [그림 II-2]에서 △ABC의 넓이를 S라 하면, △ABD와 △BCE의 넓이의 합은 $\frac{S}{4}$이다. 따라서 포물선과 직선 AC로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S+\frac{S}{4}+\frac{S}{4^2}+\cdots=\frac{4}{3}S$$

이며 등식이 성립된다는 것을 보이기 위해 $S+\frac{S}{4}+\frac{S}{4^2}+\cdots<\frac{4}{3}S$ 라고 가정했을 때 모순이 된다는 것을 밝히는 귀류법을 적용한다. 이는 실진법과 급수를 병행한 잠재적 무한을 사용하면서 동시에 귀류법에 의한 실무한을 사용하고 있음을 보여주는 것이다.



[그림 II-2] 포물선의 실진법

이와 관련하여 Volterra(1920)는 다음과 같이 설명한다.

> Eratostenes에게 보낸 Archimedes의 서신에서 그는 자신의 발견을 위해 무한소량의 방법을 사용했으며, 결과를 대중에게 공개하기 위해서만 실진법과 급수(series) 방법을 사용했다는 것이 분명하다. 포물선의 넓이를 구하기 위해, 그는 다양한 해결책을 제시했다는 것을 생각해 보면, 기본 원리를 인식하고 있으며, 그 원리는 먼 옛날부터 현재까지 발전하였다. 사실 그 방법들은 무한소 방법, 실진법, 급수 방법의 세 가지로 분류할 수 있다. 그 방법들은 현재까지 우리가 사용해 왔던 것이며, 무한소 미적분학의 기본 개념을 설명하는 것이다(Volterra, 1920; Branchetti, 2016, p.13에서 재인용).

Volterra(1920)는 무한소 방법을 실무한에 대응시키고, 실진법과 급수 방법을 잠재적 무한에 대응시켜 논의를 단순화하였다. 하지만, Archimedes는 무한소 방법을 실제적으로 사용하지 않았고 귀류법에 의해 실무한을 설명하고 있다. 따라서 Archimedes의 무한소 방법 사용에 대한 Volterra(1920)의 분류 관점은 다소 논란의 여지가 있다.

이상과 같이, Archimedes의 연속체에는 귀류법을 통한 실무한 관점에서의 실제적인 연속체와, 실진법과 급수를 통한 잠재적 무한 관점에서의 이론적인 연속체라는 두 가지의 개념이 들어있다. 그런데 Archimedes는 잠재적 무한의 관점을 실무한의 관점으로 대체할 수 있을 만큼 수학화하지는 못한 것으로 볼 수 있다.

3. Galileo의 연속체

Descartes는 기하적 대상을 해석적으로 설명할 수 있는 길을 열었으며, 그 이후 물리적 현상을 좌표를 사용하여 표현하는 것이 가능해졌다. Descartes의 해석기하는 Galileo가 자유낙하 운동을 설명하는 데 중요한 역할을 하였다.

Galileo(1564-1642)는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리는 그 거리까지 움직이는 데 걸린 시간의 제곱에 비례한다는 것을 관찰하였다. Oresme은 등가속도 운동을 나타내는 방법으로 속도와 시간을 기준으로 그래프를 그렸으며, 수평인 직선에 시각을 표시하고, 속도는 각 시각에 대해 수직인 선분의 길이로 나타내었다. 이를 바탕으로 Galileo는 ‘정지 상태에서 어떤 직선이 등가속도 운동을 하는 것은 동일한 직선이 처음의 등가속도 운동에서 가장 빠른 속도와 가장 느린 속도의 합의 반에 해당하는 속도로 등속운동을 하는 것과 같다.’는 법칙을 서술하였다.

Galileo는 물리 문제, 특히 운동과 역학에 관한 연구를 하면서 연속체의 합성 문제에 직면한다. 운동을 무한소량으로 분해하려는 그의 아이디어는 물리학에 있어서 혁신적이었다. 그의 아이디어에 의하면, 국소적으로 속도가 일정하다는 가

정에서 출발하여, 간단한 경우에 성립되었던 법칙을 일반적인 상황에서의 법칙으로 확장시킬 수 있었다. 그는 물리학에 무한소 방법을 적용하였으며, 이를 통해 기하학과 물리학의 상호연계성을 인식하는 길을 열어 주었으며, 이는 과학의 발달에서 매우 중요한 결실이었다(Volterra, 1920; Branchetti, 2016, p. 14에서 재인용).

Galileo는 연속체를 조각화되고 원자적이며, 무한 분할 과정의 결과인 무한 요소로 합성된다고 하였다. 즉, Galileo 연속체의 중요한 특징은 무한 기수(infinite cardinality)와 직접적으로 관련된다. 무한 기수와 관련된 Galileo 입장에서의 설명을 살펴보면 다음과 같다 (김용운, 김용국, 1996, pp. 244-245). 일반적으로 선분은 무한한 수의 점을 포함하고 있다. 무한한 수의 점을 포함하는 선분에 또 다른 선분을 연결한다면, 새로 만들어진 선분은 처음 선분보다 더 많은 수의 점을 포함한다. 따라서 무한대보다 큰 값이 존재해야 하는데 이러한 해석은 적절하지 않다. 예를 들어, 어떤 자연수는 그 자연수의 제곱과 일대일대응시킬 수 있다. 그런데 모든 자연수는 자연수에 포함되기 때문에 제곱수는 자연수에 포함된다. 자연수와 제곱수는 일의적으로 대응시킬 수 있음에도 불구하고 자연수는 제곱수보다 더 많다. 그래서 Galileo는 양쪽이 무한이라고 말할 수 있을 뿐 '대소' 관계는 무한집합에 적용할 수 없다고 결론짓고 있으며, '같다', '보다 크다', '보다 작다'라는 속성은 유한한 양에 대해서만 적용할 수 있을 뿐, 무한에는 적용할 수 없다고 한다.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \cdots \end{array}$$

여기서 Galileo는 자연수와 제곱수 사이의 대응관계를 바탕으로 기수 개념을 도입하고, 이를 무한에 적용하려고 시도하고 있다. 대응을 바탕으로 기수를 설명하는 것은 Cantor의 방식과 유사하다고 할 수 있다. 하지만 Galileo는 무한기수를 모두 동등한 것으로 받아들이고 있는데, 이는 초한기수를 갖는다는 Cantor의 입장과는 다르다.

결론적으로, Galileo는 무한 기수를 갖는 집합으로서 연속체를 설명하려고 시도하였지만, 연속체에 대한 만족할 만한 설명을 이끌어내지 못하였다고 할 수 있다.

이상과 같이, Galileo는 등가속도 운동을 시간과 속도 사이의 관계로 기하학적으로 표현하였으며, 운동의 맥락에서 연속체를 설명하려고 하였다. 하지만 무한 기수와 관련하여 불가분한 부분의 무한합으로 연속체를 설명하려고 하면서 어려움을 겪었다.

이를 교수학적으로 해석하면, 운동을 무한소량으로 분해한 발상은 미적분과 관련된다. 즉, 속도-시간 그래프에서 넓이가 운동거리라는 사실은 물리학에서 혁신적인 아이디어이다. 이러한 설명은 학교수학, 특히 미적분학에서 중요한 개념적 기초가 된다. 하지만 불가분량을 기수 측면에서 설명하려고 시도하면서 불가분량의 합으로 전체를 구성할 수 없다는 한계에 빠졌다. 이러한 어려움이 오랜 시간이 지나 Cantor에 의해 극복이 되었다는 것은 교수학적으로 시사하는 바가 크다.

4. Cavalieri의 연속체

Cavalieri(1598-1647)는 Galileo의 제자이며, Galileo의 연구를 계승 발전시키려고 노력하였다. 하지만 Cavalieri는 연속체를 다루면서 자신의 가정이 Galileo의 가정 즉, 넓이와 부피를 계산하기 위해 채택했던 가정인 '무한량은 비교할 수 없다.'는 것과 충돌하면서 어려움을 겪게 된다.

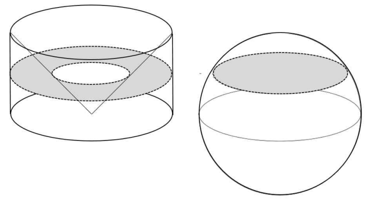
김용운, 김용국(1996, pp.232-234)에 의하면, 이

당시 유럽은 스콜라(schola) 철학의 영향 하에 있었다. 스콜라 철학은 중세에 수학에서의 무한론에 영향을 주기 시작하여 르네상스, 종교개혁을 거쳐 17세기의 미적분학의 발견에 이르기까지 영향을 미치게 되는데, 여기에는 스콜라적 교양을 지닌 많은 가톨릭계의 성직자들이 참여했기 때문이다. 스콜라 학자들은 연속체를 ‘불변적 연속체’와 ‘계속적 연속체’로 구분한다. ‘불변적 연속체’는 평면이나 공간도형처럼 각 부분이 나란한 위치에 있으면서 그것들이 동시에 존재하는 경우이고, ‘계속적 연속체’란 시간처럼 각 부분이 다른 부분의 앞 또는 뒤에 있는 경우를 말한다. 선은 ‘불변적 연속체’이며, 선은 점으로 이루어진 것은 아니다. 하지만 점이 운동함으로써 선을 만들 수 있다고 보았으며, 점은 선의 불가분한 분자이고 선은 면의 불가분한 분자이며 면은 입체의 불가분한 분자라고 생각되었다. 따라서 불가분이란, ‘차원이 하나 낮은 다른 종류의 것’이라고 설명한다.

넓이나 길이가 없는 점을 아무리 모은다고 해도 선분이 될 수는 없다. 또한 폭이 존재하지 않는 선분을 아무리 모은다 하더라도 면을 만들 수는 없다. 스콜라 철학에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 ‘운동’의 개념을 도입한 것으로 해석되며, Cavalieri는 이러한 입장을 받아들인 것으로 보인다.

Branchetti(2016, p. 11)에 따르면 Cavalieri는 연속체 개념을 단순화시키고, 또한 연속체 개념을 보다 효과적으로 다루기 위해 Eudoxos의 실진법에 관심을 가졌다. 그는 Eudoxos의 방법이 의존하는 비(ratios) 이론과 ‘불가분량의 기하학’을 결합할 필요가 있었다. 불가분량의 개념을 이론적으로 설명하는데 끝내 성공하지는 못하였지만, 불가분량(indivisibles)으로 $n-1$차원 요소를 사용한다. 즉, 넓이를 구하기 위해 선분을 사용하며, 부피를 구하기 위해 직사각형을 사용한 것이다.

Cavalieri 원리란 “두 개의 입체(또는 평면도형)가 밑면(또는 밑변)에 평행인 평면(또는 직선)에 의해 절단되는 부분의 비가 $m:n$으로 일정할 때, 두 입체의 부피(또는 평면도형의 넓이) 비는 $m:n$이다.”는 것으로 [그림 II-3]은 이 원리를 적용하여 구의 부피를 구할 수 있음을 보여준다.



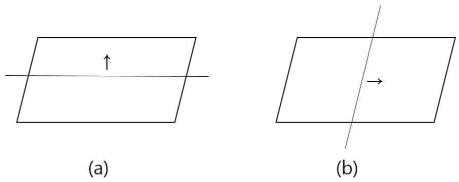
[그림 II-3] 불가분량의 비교

[그림 II-3]의 반지름 r, 높이 r인 원기둥과 원뿔에 대해 원기둥의 밑면에 평행인 평면으로 자른 단면의 넓이는 반구의 단면의 넓이와 같으므로 ‘(반구의 부피)=(원기둥의 부피)−(원뿔의 부피)’이다. 이를 바탕으로 반지름 r인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$임을 보일 수 있다. 여기서 단면인 불가분량을 무한히 합하였을 때, 왜 부피가 생성되는지를 명확하게 설명하는 것은 쉽지 않다. 개념적으로 설명하기 어려운 ‘무한 합’을 피하기 위하여 Cavalieri는 ‘대응하는 불가분량의 비가 일정한 경우’만을 생각함으로써 무한이라는 과정을 피할 수 있었다. 또한 Cavalieri는 밑면(또는 밑변)에 평행인 평면(또는 직선)에 의해 절단되는 부분의 비만을 고려하고 있으며, 사선에 의해 절단되는 경우는 고려하지 않는다.

그 이유는 [그림 II-4] (a)에서 평행사변형의 밑변에 평행인 직선에 의해 잘린 단면은 밑변의 길이와 같고, 각 단면이 운동한 거리는 높이이므로 (평행사변형의 넓이)=(밑변)×(높이)임을 설명할 수 있다. 반면에 [그림 II-4] (b)에서 사선으로 잘랐을 때 평행사변형의 넓이는 이웃하는 두 변

의 길이의 곱으로 설명되기에 모순이 발생한다.

절단된 부분의 비(ratio)만을 고려하는 Cavalieri의 발상은 당시에 어렵게 느껴졌던 무한대 및 무한소와 관련된 문제를 해결하는 데 효과적이었고, 본질적으로 정적분 개념의 기초가 되었다.



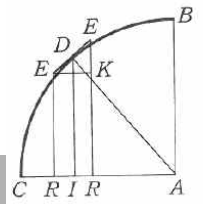
[그림 II-4] 평행사변형의 넓이

이상과 같이, Cavalieri는 불가분량에 의해 연속체를 설명하려고 시도하였다. 즉, $n-1$차원의 기하학적 불가분량을 사용하여 두 도형의 부피비(또는 넓이비)를 구하였으며, 도형의 부피(또는 넓이)를 구하는 일반적인 아이디어를 제공하였다. 연속체를 전체적으로 고려하면서 연속체는 불가분량의 합이 아닌 하나의 전체로 간주하였으며, 무한에 대한 언급은 피할 수 있었다. 또한 Cavalieri는 불가분량에 의한 설명에 만족하지 않고 운동의 맥락을 도입하여 연속체를 설명하려 하였는데, 이는 잠재적 무한의 관념에 해당하는 것으로 생각된다. 그러나 불가분량과 운동의 맥락 사이의 관계를 이론적으로 명확하게 설명하지는 못하였다.

이를 교수학적으로 해석하면, $n-1$차원의 불가분량으로 n차원의 기하학적 대상을 직관적으로 설명하는 발상은 연속체인 수직선에서 실무한에 대한 심상을 제공할 수 있다는 점에서 의미를 찾을 수 있다.

5. Leibniz와 Newton의 연속체

Cavalieri는 $n-1$차원을 이용하여 n차원을 설명하려고 했으며, 이러한 아이디어는 특히 Leibniz가 적극적으로 수용했다. Leibniz와 Newton은 비슷한 시기에 미적분학을 발명하였으나, Newton이 논문 발표를 20년이나 미루었고 결과적으로 Leibniz 논문이 10년 먼저 발표되었다. 그래서 최초로 미적분학을 발명한 인물이 누구인지에 대한 다툼이 훗날 벌여졌다. 이러한 다툼은 오랫동안 이후 학자들에게 영향을 미쳤고, 두 학자들의 미적분법에 대한 접근의 차이점에 주목하지 못하게 하는 요인이 되었다.



[그림 II-5] 무한소삼각형
(Boyer & Merzbach, 1968)

Leibniz는 미적분 계산법을 위한 보편적인 기호를 고안하는 데 힘썼으며, $\int$, dx, $\frac{dy}{dx}$은 그러한 예이다. 그런데 $\frac{dy}{dx}$을 $\frac{0}{0}$으로 해석할 경우 계산이 불가능해지기에, Leibniz는 $\frac{dy}{dx}$를 절대적인 0이 아닌 상대적인 $\frac{0}{0}$으로 설명하였다.

즉, [그림 II-5]에서 $\frac{dy}{dx}$는 무한소삼각형(Differential triangle)의 밑변과 높이의 비(즉, $\frac{EK}{RR}$)로 해석될 수 있다. Leibniz는 상대적인 $\frac{0}{0}$의 관점에서 무한소삼각형으로 설명하였으며, 이는 Cavalieri의 불가분량 개념과 유사하다. 그런데 $\frac{dy}{dx}$를 무한소삼각형의 기울기로 해석할 경우, 그 기울기는 유한한 양이므로 무한의 문제는

사라지고 만다. Newton은 이러한 문제를 피하려고 하였으며, Newton의 연속성 개념은 Leibniz에 비해 더 정밀하다.

Newton은 순간적인 점을 물리 현상으로 직관하였으며, 움직이는 점이라든가 흘러가는 순간이 현실적으로 존재하는 것을 당연하다고 생각하였다. Leibniz의 기호 $\frac{dy}{dx}$ 에 해당하는 것을 Newton은 $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 로 표현하고 있으며, 여기서 $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ 는 시간에 따른 운동의 변화로 연속성의 역동적인 개념화를 내포한다.

Newton은 유율(fluxions) 및 유량(fluents)의 형식을 통해 미분계산과 적분계산을 설명하였다. 유량은 시간에 따라 흐르는 양, 즉 연속적으로 변하는 양을 의미하며 $y = f(t)$, $x = g(t)$ 로 표현된다. 이때, 유율은 시간에 따른 변화율을 의미하며 $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ 로 표현된다. Newton이 사용하는 용어인 유량과 유율은 연속성에 대한 직관적이고 지각적인 차원의 흐름을 의미하며, 한 점에서 다른 점으로 넘어가는 진행 과정으로 생각한다.

유율법을 써서 함수를 미분하는 방법에 관해 Newton이 든 보기를 살펴보자. 유량의 상호 관계가 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ 이라고 하자. 여기서 극히 작은 시간적 변화(O)가 일어났을 때, 각 유량에 대해서 유량의 상호 관계는

$$(x + dotx\,O)^3 - a(x + dotx\,O)^2 + a(x + dotx\,O)(y + doty\,O) - (y + doty\,O)^3 = 0$$

이며, 이를 정리하면

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$$

이다(김용운, 김용국, 1996, p. 326).

Newton이 사용한 유율과 유량은 무한소의 문제를 수학적 분석이 아니라 시간과 물리량 사이의 관계로 해결하려고 한 Aristotle의 관점과 일맥상통한다고 할 수 있다.

이상과 같이, Leibniz와 Newton는 모두 무한소 아이디어를 사용하여 연속성을 다루었지만 서로 다른 방식을 사용하였음을 볼 수 있다. Leibniz는 불가분량을 바탕으로 미적분을 정적인 관점에서 설명하려고 한 반면에, Newton은 시간에 따른 운동의 변화를 바탕으로 미적분을 동적인 관점에서 설명하려고 한 것이다. 또한 Leibniz는 Cavalieri의 관점에서 도형을 전체로 간주하여 국소적으로 연구하였을 뿐, 무한소의 합으로 설명하지는 않았다. 반면, Newton은 Aristotle의 관점에서 시간과 공간을 분리하여 생각하고 있으며, 무한소의 합을 시간에 따른 운동이나 그 변화 양상으로 설명하려 하였다.

이를 교수학적으로 해석하면, Leibniz의 정적인 관점은 직관적이기에 받아들이기 쉬운 반면에, Newton의 동적인 관점은 논리적인 이해를 수반하기에 매우 어렵게 느껴진다. 따라서 Leibniz와 Newton의 두 관점을 통합할 필요가 있음을 시사한다. 학교수학에서 실수의 연속성은 정적인 관점에서 출발하여 동적인 관점으로 전환하는 방안이 고려될 필요가 있다. 예를 들어, 대수적 접근에 의한 정적인 관점에서는 $0.9999\cdots = 1$은 대수적 절차의 적용을 따른다면 받아들이기 쉬운 편이라 할 수 있다. 반면, 무한급수의 동적인 관점에서는 $0.9999\cdots < 1$으로 생각하기 쉬우며, 등식 $0.9999\cdots = 1$ 을 이해하기 위해서는 실무한에 내재된 수학적 의미의 이해가 요구된다. 그러므로 실수의 연속성에 대해 정적 관점과 동적 관점을 통합하는 교수학습 방안이 필요하다.

6. Cantor와 Dedekind의 연속체

Zeno 이래 사람들은 수학뿐만 아니라 신학에 있어서도 무한을 논의의 대상으로 삼아 왔다. 그러나 Dedekind가 <연속과 무리수(Stetigkeit und irrationale Zahlen)>를 1872년에 출판하기 전까지

Zeno의 역리를 정확히 설명할 수 있는 사람은 아무도 없었다(김용운, 김용국, 1996, pp. 414-415).

무리수의 기초에 대한 보다 엄밀한 형식화의 필요성이 인식된 것은 19세기 후반에 이르러서이다. Dedekind의 접근 방식은 기하학적 크기의 비율에 대한 Eudoxus의 비례 정의와 밀접한 관련이 있다. Dedekind는 유리수의 절단(cut)을 취함으로써 실수를 생성할 수 있으며, 실수 집합의 모든 절단은 실수가 되므로 실수는 완비(complete)되어 있다.

Dedekind에 의하면, 다음 조건을 만족하도록 유리수 전체를 A와 B 두 부분으로 분할할 수 있다. (1) A의 모든 수는 B의 어떤 수보다 작다. (2) 모든 유리수는 A 또는 B 중 하나에 속한다.

이때, 유리절단(proper cut)과 무리절단(improper cut)이 생기며, 무리절단의 예로 $\sqrt{2}$ 를 들 수 있다. Dedekind는 순전히 논리적인 관점에서 유리수의 집합의 절단 (A,B)를 실수라고 정의하고 무리절단을 무리수라고 정의한다. 실수의 집합에서 다시 절단 (A,B)를 생각하면 A에 최댓값이 존재하거나 B에 최솟값이 존재한다. 이를 실수의 완비성 또는 연속성이라고 한다(Toeplitz, 1963, p. 31).

우정호(2017)에 의하면, Dedekind가 보기에 당시에는 연속량을 다루는 수학인 미적분법을 뒷받침하는 산술에 대한 기초가 결여되어 있었다. 수직선에는 유리수와 대응하지 않는 무한히 많은 점이 존재하며 수영역이 직선과 같은 연속성을 갖도록 새로운 수를 창안하는 것이 절대적으로 필요해진다. 유리수 전체의 집합에서 유리수는 한 절단을 생성하지만, 유리수에 의해 생성되지 않는 무한히 많은 절단이 존재하는바 그러한 절단을 무리수로 보아 불연속인 유리수의 집합이 연속이 되도록 수를 확장하고자 하였다(우정호, 2017, pp. 305-306).

다시 말해, 직선의 특성인 연속성을 고려하여 연속체인 직선에 수에 대한 공리를 설정하기 위한 도구가 절단이며, 유리수 집합의 절단으로 정의된 무리수는 실수의 연속성을 보증하게 된다.

(A, A′)와 (B, B′)를 각각 유리수 전체의 절단이라 하고, $a=$ (A, A′), $b=$(B, B′)라 하자. 이때, 두 실수 a와 b에 대해 대소 관계와 연산은 다음과 같이 정의될 수 있다.

(1) $a<b \Leftrightarrow \mathrm{A} \subsetneq \mathrm{B}$

(2) $a+b=\inf\{x+y \mid x\in \mathrm{A}',\ y\in \mathrm{B}'\}$

(3) $a\cdot b=\inf\{x\cdot y \mid x\in \mathrm{A}',\ y\in \mathrm{B}'\}$

뺄셈과 나눗셈은 덧셈과 곱셈을 이용하여 정의될 수 있으며, 이렇게 정의된 연산에 의해 실수는 연산에 대한 성질, 체의 공리, 순서공리 등을 만족한다.

Dedekind가 절단의 개념을 사용하여 실수를 구성한 반면, 비슷한 시기에 Cantor는 집합의 개념을 사용하여 실수를 구성하였다. 즉, Cantor는 유리수 집합에서 Cauchy 수열의 동치류로 실수를 구성하였다.

예를 들어, $\sqrt{2}$ 에 수렴하는 유리수열은 다양하게 구성할 수 있다. 하지만 Cauchy 수열의 개념을 적용한다면 $\sqrt{2}$ 에 수렴하는 다양한 유리수열은 동치류로 묶을 수 있다. 이와 같이 구성된 동치류의 집합을 $\sqrt{2}$ 로 정의할 수 있다.

이를 좀 더 구체적으로 설명하면 다음과 같다. 두 유리수열 $\langle a_n \rangle$과 $\langle b_n \rangle$이 $\sqrt{2}$ 에 수렴한다고 하자. 이때 임의의 유리수 $\epsilon>0$에 대해 적절한 자연수 N을 잡으면, N보다 큰 자연수 k에 대하여 $|a_k-b_k|<\epsilon$이 성립하므로 두 유리수열 $\langle a_n \rangle$과 $\langle b_n \rangle$은 같은 것으로 볼 수 있다.

학교수학에서는 $\sqrt{2}$ 의 근삿값으로 1.4, 1.41, 1.414, ⋯ 을 구하고, $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 와 같이 정의한다. 이는 Cantor의 방법을 초등화하여 학교수학에 반영한 것으로 볼 수 있다.

여기서 Dedekind의 방법에 의해 구성한 실수와 Cantor의 방법에 의해 구성한 실수가 서로 동

치임을 설명할 필요가 있다. 실제로 완비성 공리를 전제로 하였을 때, Dedekind가 구성한 실수와 Cantor가 구성한 실수는 동일하다고 할 수 있다. 완비성 공리란 실수 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면, 반드시 그 상한이 존재한다는 것이다. 특히 완비성 공리를 만족하는 순서체는 실수체 하나만 존재함이 밝혀졌다.

다음으로 기수 측면에서 실수의 성질을 살펴보자.

Galileo, Cavalieri 등은 무한을 기수(cardinality) 측면에서 설명하려고 시도하였으나 벽에 부딪혔으며, Leibniz도 도형을 무한소의 무한합으로 설명하려고 하면서 어려움을 겪었다. 즉, 길이가 없는 점(즉, 길이가 0인 점)이 모여서 어떻게 선분(예를 들어, 길이가 1인 선분)을 구성할 수 있는지를 설명하지 못하였다. 또한 대응 관계를 이용하여 길이가 1인 선분과 길이가 2인 선분의 기수가 같다는 사실은 알았지만, 두 선분의 기수가 2배만큼의 차이가 되지 않는 현상을 명확하게 설명하지는 못하였다. 당시까지 많은 수학자들은 무한한 집합이 같은 기수를 갖는다고 생각하였으며, 무한한 집합은 가산(countable)집합임을 암묵적으로 가정하였던 것으로 판단된다.

이에 대한 해결의 실마리는 Cantor가 제공하였다. Cantor는 일대일대응 방법을 사용하여 유한집합의 기수를 비교할 수 있다는 아이디어를 무한집합에 적용함으로써 무한집합을 기수에 따라 분류할 수 있음을 보여주었다. 예를 들어, 자연수와 유리수 집합은 가산집합으로 같은 기수를 갖는다. 조밀한 유리수 집합이 자연수 집합의 기수와 같다는 것은 놀라운 일이다. 더욱이 실수 집합이 유리수 집합보다 큰 기수를 갖는다는 것도 놀라운 사실이었다.

Cantor는 0과 1 사이의 실수 집합이 가산이라고 가정했을 때 모순이 발생함을 보임으로써 즉, 귀류법을 적용하여 실수 집합은 유리수 집합보다 큰 기수를 가지는 비가산(uncountable)집합임을 보였다. 또한 실수는 다른 기준에 따라 유리수와 무리수, 대수적 수와 초월수로 분류할 수 있으며, 대수적 수도 가산집합임을 밝혔다. 따라서 실수 체계의 기수를 높이는 역할을 하는 것은 초월수의 집합이라 할 수 있다. 더 놀라운 사실은 집합의 기수를 결정하는 요인이 차원이 아니라는 사실이다. 즉, 1차원인 직선, 2차원인 평면, 3차원인 공간은 모두 비가산집합으로 기수가 같다(김용운, 김용국, 1996, pp. 415-417).

또한, 기수와 선분의 길이는 서로 관계가 없다는 것을 Cantor 집합을 통해 설명할 수 있다.

Cantor 집합이란 0과 1 사이의 실수로 이루어진 집합이며, 구간 [0, 1]부터 시작하여 다음과 같이 각 구간을 3등분하여 가운데 구간을 반복적으로 제외하는 방식으로 만들어진다.

(1) $C_0 = [0, 1]$라 한다.

(2) 구간 [0, 1]을 3등분한 후, 가운데 개구간 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$을 제외하여 $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$라 한다.

(3) 두 구간 $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$의 가운데 구간을 제외하여 $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{3}, 1]$라 한다.

(4) 위의 과정을 반복한다.

(5) Cantor 집합 $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$로 정의한다.

이때 Cantor 집합에 포함되는 수를 삼진법 소수로 표기하였을 때 모든 자릿수는 0 또는 2가 되며, Cantor 집합의 수는 구간 [0, 1]의 수와 일대일대응시킬 수 있다. 따라서 Cantor 집합은 비가산집합이다. 그런데 Cantor 집합의 Lebesgue 측도는 0이며 조밀한 곳이 없는 집합이다. 반면, 구간 [0, 1]은 조밀한 집합이며 Lebesgue 측도는 1이다. 즉, 어떤 집합이 비가산이라는 사실은 구간의 길이 또는 조밀성과 무관함을 알 수 있다.

또한 유리수 집합은 조밀함에도 불구하고 가산집합이며, Cantor 집합은 조밀하지 않음에도 불구하고 비가산집합이다. 조밀성은 연속성의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아니다. 또한 비가산집합에 대하여 Lebesgue 측도(즉 길이)는 가산집합과는 다르게 생각해야 한다.

이상과 같이, Dedekind는 절단 개념을 도입하여 수직선과 실수의 일대일대응 관계를 토대로 실수의 연속체를 설명할 수 있었으며, 실수를 산술화하는 데 기여하였다. Cantor는 초한기수 개념을 토대로 길이는 기수로 설명될 수 없음을 밝혔으며, 기수에서 측도로 관점을 전환하는 계기를 마련하였다.

7. 분석 결과

무한을 잠재적 측면에서 이해한 Aristotle 이후로 무한이 그것의 완결된 측면인 실무한으로 다루어지기까지는 지난한 수학사가 있었다. 이는 물리적 또는 기하적 대상의 연속성은 지각적으로 수용되어 쉽게 이해할 수 있었지만 이 특성을 드러내는 산술적, 대수적 측면에서의 기술에는 수의 연속성의 기저에 놓인 실무한에 대한 이해가 있어야 했기 때문이다. 역사적 분석의 결과는 다음과 같다.

첫째, 실수를 구성하는 과정은 무한에 대한 이해와 정당화를 둘러싼 오랜 시간이 걸린 매우 험난한 과정이었다. 즉, 계산 결과로 실무한을 이해하기는 어려웠으며, 실무한을 거부하거나 잠재적 무한에 의해 설명하려고 시도하게 되었다.

실무한이라는 관점의 등장은 Archimedes의 연구에서 볼 수 있었다. 원의 넓이, 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 과정에서 실진법과 급수를 사용하여 오늘날의 무한급수의 합에 해당하는 값을 만든 후에는 등식에 대한 정당화를 위해 귀류법을 사용하였다.

귀류법은 배중률(the law of excluded middle)을 기초로 하는 증명으로 수학에서 중요한 증명 방법 중 하나이지만, 김용운, 김용국(1996, p.87)에 의하면, 귀류법을 사용한다는 것은 사전에 그 결과를 미리 알고 있어야 하므로 발견적인 측면에서는 결점을 가지고 있다.

그래서 16세기 이후로 많은 수학자들은 귀류법을 사용하지 않고 연속체를 설명하려고 시도하였다고 볼 수 있다. Galileo는 연속성을 설명하기 위해 운동 개념을 도입하였으며, Cavalieri는 불가분량(indivisibles)으로 $n-1$ 차원 요소를 사용하면서 직선(또는 평면)으로 절단된 단면만을 비교함으로써 무한 과정을 피하고자 하였다. Cavalieri의 불가분량 개념을 활용한 예의 근원은 Archimedes까지 거슬러 올라갈 수 있다. 이러한 Cavalieri의 방법은 Leibniz에게 영향을 주었으며, 미적분의 계산을 위한 보편적인 방법을 개발하는데 도움을 제공하였다. 한편, Newton은 유율의 개념을 도입하여 연속성의 수학화를 시도하였다.

당시까지 수학자들은 연속성을 점의 기수(cardinality)로 설명하려고 하면서 벽에 부딪혔으며, 그러한 어려움을 피하기 위해 이론적으로 완벽하지 않은 불가분량을 도입하기도 했고 운동 개념을 도입하여 해결하려 하였으나 연속체로서의 실수의 개념을 명확하게 밝히지는 못하였다. 이는 실수 관련 이해가 직관에 의존한 것이기 때문이다.

이후 물리적인 문맥에서 수가 사용되기 시작하면서 기하학적인 직관에 기초하지 않은 새로운 수 이론의 확립이 필요하게 되었다. 19세기에 Dedekind, Cantor 등은 실수 체계를 산술화하여 이 문제를 해결하였다. 실수 체계의 산술화는 기하의 도움 없이 자연수와 그 연산 등의 산술에 기초함을 뜻한다. 실수 체계의 산술화는 실수 체계에 기초한 해석학에서 기하학적 직관을 제거할 수 있게 한다는 점에서 매우 중요하다(변희

현, 2005, pp.29-30).

둘째, 귀류법은 완비성이 실수를 구성하는 다양한 방법과 서로 동치임을 밝히는 데 전제가 되는 조건이다.

Klein(1924, p. 33)은 “19세기 후반에 보다 정밀한 산술적 형식화에 의해 무리수의 기초를 세우려는 요구가 있었으며, 1872년에 Cantor와 Dedekind에 의해 독립적으로 (무리수에 대한) 일반적인 기초가 세워졌다.”고 한다. 순서체인 실수의 ‘완비성’ 개념이 명확히 설명된 것은 19세기 후반에 이르러서이며, 완비성 공리가 ‘단조수렴 정리’, ‘축소 구간 정리’, ‘극한점 성질’, ‘Cauchy 성질’, ‘Dedekind 절단’ 등과 서로 동치임이 밝혀지게 되었다.

완비성 공리란 실수 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면, 반드시 그 상한이 존재한다는 것이다. 그런데 완비성 공리와 동치인 명제를 증명하기 위해서는 귀류법의 사용이 필수적이다. 예를 들어 완비성 공리와 Dedekind 절단이 동치임을 증명하는 과정(정동명 외, 1996, pp.45-46)과 완비성 공리와 축소 구간 정리가 동치임을 증명하는 과정(정동명 외, 1996, pp. 68-70)에서 귀류법이 사용되고 있음을 확인할 수 있다.

또한 완비성 공리를 토대로, 실수의 성질을 밝히는 데 중요한 기초 개념인 Archimedes의 공리를 증명(정동명 외, 1996, pp. 68-70)하기 위해서도 귀류법이 사용된다.

이상에서 Cantor와 Dedekind에 의해 실수의 산술화가 가능해졌으며, 불가분량이나 운동의 개념을 배제하여 실수를 정적인 측면에서 설명하는 것이 가능해졌지만 실무한으로서의 실수의 특성을 설명하기 위해서는 귀류법이 불가피한 선택임을 보여준다. 이는 Archimedes 이후로 피하려고 노력했던 귀류법으로 회귀하였음을 의미한다.

III. 연속체와 학교수학

대수적 조작 절차를 따라 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$와 같이 계산할 수 있는 학생에게 $0.\dot{9}$를 분수로 표현하도록 하였을 때, $0.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$과 같이 계산하면서도 $0.\dot{9}=1$이 된다는 사실에 놀라워한다. 이는 $0.\dot{9}$이 1에 가까워지기는 하지만 1보다는 작은 수라고 생각하기 때문이다.

학생들이 $0.\dot{9}=1$보다는 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$을 더 잘 받아들이는 것은 학생들이 무한소수를 잠재적 무한으로 이해하고 있는 한편으로 유리수 $\frac{2}{9}$의 소수 표현을 찾는 활동에서 분수의 실제 나눗셈이라는 산술적 조작의 학습 경험이 있기 때문이라 할 수 있다(신보미, 2008, p.286).

다시 말해, $2\div 9$를 소수로 표현해 보면서 그 결과가 $0.222\cdots$ 임을 확인해 보는 경험을 바탕으로 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$임을 이해할 수 있다. 반면, 유사한 대수적 조작을 통해 $0.999\cdots$ 이 되는 상황을 경험할 수 없기에 $0.\dot{9}=1$임을 받아들이기 어려워하는 것으로 해석된다. 즉, 대수적 조작에 의해 경험 가능한 소수 표현의 경우 그것을 실무한으로 받아들이는 것은 쉬우며, 그렇지 않은 경우 실무한으로 받아들이기 어렵다고 할 수 있다.

등식 $x=0.222\cdots$ 에서 $0.222\cdots$ 를 x로 표현하는 것 자체는 실무한의 존재를 인정하고 있는 것이며, $10x-x=2.222\cdots-0.222\cdots=2$와 같은 계산이 가능하다는 사실을 어렵지 않게 받아들일 수 있다. 하지만, $y=0.999\cdots$ 로부터 $10y-y=9$가 되어 $0.\dot{9}=1$이 된다는 사실은 받아들이기 어려울 수 있다. 이는 $0.\dot{9}$이 1에 수렴하기는 하지만 1이 된다는 것에는 여전히 의문을 가지기 때문이다.

적어도 $0.222\cdots$ 를 실무한인 $\frac{2}{9}$ 로 받아들이기는 쉬우며, $0.999\cdots$ 를 실무한인 1 로 받아들이기 어렵다는 사실로부터 대수적 조작의 유무에 따라 실무한으로 받아들이는 데 차이가 있음을 알 수 있다. 한편, $0.\dot{9}$ 이 1 에 수렴하기는 하지만 1이 될 수 없다고 느끼면서도 $10y-y=9$ 와 같은 조작을 통해 $0.\dot{9}=1$ 이 될 수 있다는 가능성은 배제하지는 않는다.

다음 급수 계산을 살펴보자.

$S=1+2+2^2+2^3+\cdots$

$2S=2+2^2+2^3+\cdots$ 이므로

$S=2S-S=-1$

이러한 계산 방식은 순환소수를 분수로 고치는 과정을 설명하는 것과 유사하다. 이렇게 계산되는 것을 학생들에게 제시하였을 때, 학생들은 S 의 값은 무한대로 커지므로 -1 이 될 수 없으며 대수적 조작에 문제가 있음을 직감한다.

즉, $S=1+2+2^2+2^3+\cdots$, $x=0.\dot{2}$, $y=0.\dot{9}$ 에 대한 계산 방식은 동일하지만, 학생들은 $S=-1$ 이 되지 않음을 직감하고, $x=\frac{2}{9}$ 임을 쉽게 받아들이며, $y=1$ 임을 받아들이는 데 혼란을 느낀다는 사실로부터 실무한에 대한 인식론적 수준이 존재함을 알 수 있다.

같은 맥락에서, 순환소수를 변환하여 분수로 바꿀 수 있는 대수적 조작이 존재하기 때문에 순환소수를 실무한으로서의 유리수로 인정하는 것에 비해, 비순환소수의 경우 특정한 수로 바꿀 수 있는 일반적인 대수적 조작이 존재하지 않기에 비순환소수를 실무한으로서의 무리수로 받아들이는 데 있어서 더 어려움을 느끼게 되는 것으로 예상할 수 있다.

중학교 3학년에서는 $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 구하는 과정을 다음과 같이 설명한다.

1. $1^2=1$ 이고 $2^2=4$ 이므로
   $1<\sqrt{2}<2 \Rightarrow \sqrt{2}=1.\cdots$
2. $1.4^2=1.96$ 이고 $1.5^2=2.25$ 이므로
   $1.4<\sqrt{2}<1.5 \Rightarrow \sqrt{2}=1.4\cdots$
3. $1.41^2=1.9881$ 이고 $1.42^2=2.0164$ 이므로
   $1.41<\sqrt{2}<1.42 \Rightarrow \sqrt{2}=1.41\cdots$
4. $1.414^2=1.999396$ 이고 $1.415^2=2.002225$ 이므로
   $1.414<\sqrt{2}<1.415 \Rightarrow \sqrt{2}=1.414\cdots$

$\sqrt{2}$ 의 근삿값을 구하는 이와 같은 과정은 소수점 이하의 자리를 늘여 구하는 것이 계속 가능함을 나타내는 것이므로 학생들이 제곱근의 소수 표현을 잠재적 무한으로 생각할 수도 있는 것이다. 따라서 교과서에서 $\sqrt{2}$ 는 순환소수가 아닌 무한소수가 된다는 설명에도 불구하고, 학생들은 '… '의 의미를 잠재적 무한으로 받아들일 뿐 실무한으로 인식하는 데 어려움을 가질 수 있다. 이러한 현상은 변희현(2005)의 연구를 통해서도 확인된다. 변희현(2005)의 실험 중 실무한과 관련하여 고등학교 3학년을 대상으로 적용한 일부 문항은 다음과 같다.

문항1. $\sqrt{2}$ 는 다음의 과정을 통해 소수로 나타낼 수 있다.

1. $1^2=1$ 이고 $2^2=4$ 이므로
   $1<\sqrt{2}<2 \Rightarrow \sqrt{2}=1.\cdots$
2. $1.4^2=1.96$ 이고 $1.5^2=2.25$ 이므로
   $1.4<\sqrt{2}<1.5 \Rightarrow \sqrt{2}=1.4\cdots$
3. $1.41^2=1.9881$ 이고 $1.42^2=2.0164$ 이므로
   $1.41<\sqrt{2}<1.42 \Rightarrow \sqrt{2}=1.41\cdots$
4. $1.414^2=1.999396$ 이고 $1.415^2=2.002225$ 이므로
   $1.414<\sqrt{2}<1.415 \Rightarrow \sqrt{2}=1.414\cdots$

(1) 이 과정에서 생기는 다음 수열의 수렴, 발산을 판정하고 그 이유를 쓰시오.

1, 1.4, 1.41, 1.414, $\cdots$ (수렴/발산)

(2) 무한소수 $1.414\cdots$는 $\sqrt{2}$ 와 같은 수입니까? 아니면 단지 $\sqrt{2}$ 에 가까이 가는 수입니까?(답하고 그 이유를 밝히시오.)

문항4. 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음 설명의 참과 거짓을 밝히시오.(참/거짓)

무한수열 $\{a_n\}$이 수렴한다는 것은 n이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값이 일정한 값에 한없이 가까워지면, 무한수열 $\{a_n\}$은 수렴한다고 한다.

(2) 다음 무한수열의 수렴과 발산을 판정하고, 그 이유를 쓰시오.(단, 수렴하는 경우 극한값을 밝히시오.

① 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, 0.333333, 0.3333333, ⋯ (수렴/발산)

② 1.2, 1.24, 1.247, 1.2471, 1.24715, 1.247158, 1.2471589, ⋯ (수렴/발산)

문항5. 다음 무한급수의 수렴, 발산을 판정하고 그 이유를 간단히 쓰시오.

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$ (수렴/발산)

(2) $0.1+0.03+0.007+0.0002+0.00005+0.000004+\cdots$ (수렴/발산) (변희현, 2005, pp.164-167)

변희현(2005, p. 114)의 실험결과, 각 문항의 정답률은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 정답률

문항번호	1(1)	1(2)	4(1)	4(2)①	4(2)②	5(1)	5(2)
정답률(%)	65.8	19.0	71.7	72.8	28.8	17.4	34.2

변희현(2005)의 실험결과를 토대로, 실무한에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보자.

문항1(2)의 정답률(19.0%)은 문항1(1)의 정답률(65.8%)에 비해 많이 떨어진다. 이는 학생들이 수렴의 의미를 잠재적 무한으로 파악하고 있으며, 문항1(2)의 정답률에서 볼 수 있듯이 $1.414\cdots$을 실무한으로 파악하지 못함을 의미한다.

문항4(2)②는 문항1(1)과 유사하다. 하지만 문항1(1)의 정답률(65.8%)에 비해 문항4(2)②의 정답률(28.8%)이 상당히 낮다. 이러한 현상이 나타나는 이유는 수렴값을 알 수 있는 경우에 비해 수렴값을 모르는 경우 정답률이 떨어지는 것으로 해석될 수 있다. 이는 문항4(2)①에서도 확인된다. 즉, 문항4(2)①의 수렴값은 알 수 있으며, 정답률(72.8%)도 높다.

문항4(2)②와 유사한 문항5(2)를 비교해 보면, 문항5(2)의 정답률(34.2%)이 문항4(2)②의 정답률(28.8%)에 비해 높다. 이는 수열보다는 급수의 수렴을 좀 더 쉽게 이해함을 의미한다.

또한 문항5(1)의 경우 정답률이 매우 낮은 것을 확인할 수 있는데, 이는 수렴/발산을 판정할 수 있는 방법을 모르기 때문으로 해석된다.

중학교 수학에서 무한과 관련된 내용인 분수와 순환소수와의 관계, 무리수의 의미에 대한 내용은 학생들의 이해수준을 고려하여 직관적인 접근을 시도하는 것으로 판단된다. 하지만, 실무한 개념에 도달하기까지 여러 단계의 수준이 존재하는 것으로 보이며, 각 수준별 특징을 구체화함으로써 잠재적 무한에서 실무한으로의 전환이 이루어질 수 있는 교수학적 조치를 마련할 필요가 있다. 변희현(2005)의 연구에서 보듯이, 고등학교 3학년에 이르러서도 실무한을 받아들이지 못하는 이유가 그러한 적극적인 교수학적 조치의 부재일 수 있는 것이다.

실무한 개념에 여러 수준이 있을 수 있다는 사실은 역사적 분석을 통해서도 확인할 수 있다. 피타고라스 학파에서는 무리수 $\sqrt{2}$의 존재성을 알고 있었음에도 불구하고, $\sqrt{2}$를 수로 받아들이는 데 어려움을 겪었다. Aristotle도 물리적 연속체와 기하학적 연속체를 받아들이면서도 수를 연속체로 받아들이지 못하였다. Descartes가 기하학적 대상을 해석적으로 나타낼 수 있는 방법을 고안한 이후에도 Galileo, Cavalieri, Newton 등 수 자체를 연속체로 해석하려고 하기 보다는 불가분량과 운동의 관점에서 물리적인 현상을 설명하려고 시도하였다. 역사적으로 물리적 대상과 기하적 대상의 연속체 개념을 실수의 연속체 개념과 통합하는 데 오랜 시간이 필요했음에 주목할 필요가 있다. 19세기에 들어서면서 실수의 산

술화를 통해 물리적 대상, 기하적 대상, 실수 개념을 하나의 연속체 개념으로 통합할 수 있었다. 특히 실수를 연속체로 해석할 수 있었던 근저에는 귀류법이 있었다.

이로부터 실무한 개념에는 여러 수준이 존재한다는 사실과 함께 실무한의 최종적인 수준에 귀류법이 위치함을 보여준다고 생각된다.

2015 개정 수학과 교육과정에서는 '귀류법'을 고등학교 1학년 과목의 학습내용 성취 기준에 명시하고 교과서에서 예제로 제곱근이 유리수가 아님을 증명하도록 하고 있다. 학교수학에서 귀류법을 적용하여 증명하는 명제로 제곱근의 무리수성을 예제로 다룬 것은 무리수 역사에서 귀류법이 중요했기 때문일 것이다. 하지만 귀류법은 수학적 진술의 정당화 외에는 발견적 측면에서는 기능하지 못한다는 단점이 있다. 즉, '$\sqrt{2}$가 유리수가 아니다', '$\sqrt{2}$의 값을 소수로 나타내는 과정에 따라 구한 $1.414\cdots$는 $\sqrt{2}$이다', '$0.999\cdots$이 1이다' 등의 명제에서 결론에 해당하는 조건이 있는 경우에 귀류법을 적용해 볼 수 있으며 명제가 참임을 논리 수학적으로 설명할 수 있는 것이다.

이기돈, 홍갑주(2006, p.840)의 연구에서는 귀류법의 이해와 활용에서의 어려움을 해소하기 위해 귀류법을 적용하여 논리 수학적으로 증명해서는 심리적으로 수용 가능한 설명이나 이해를 학생들에게 제공하지 못한다고 하였다.

따라서 무리수를 유리수가 아닌 수로 정의하고 소수표현을 구해보는 것 등으로 중학교에서 실수 개념을 학습한 후 고등학교에서 귀류법의 예제로 다루는 것으로는 학생들의 실수 개념에 대한 이해가 제한적일 수도 있다.

또한 귀류법은 중학교 수학에서 $\sqrt{2}$가 유리수가 아니라는 것을 설명하는 것에서 볼 수 있다.

> 정수를 제곱하면 정수가 되고, 정수가 아닌 유리수를 제곱하면 정수가 아닌 유리수가 된다는 것을 확인할 수 있다.
> 이제 $\sqrt{2}$가 유리수인지 알아보자.
> $(\sqrt{2})^2=2$이고 $1<2<4$, $1^2<(\sqrt{2})^2<2^2$, $1<\sqrt{2}<2$이다. 따라서 ㉠<u>$\sqrt{2}$는 연속하는 두 자연수 사이에 있으므로 정수가 아니다.</u>
> 또, ㉡<u>$\sqrt{2}$를 제곱하면 정수가 되고, 정수가 아닌 유리수를 제곱하면 정수가 될 수 없으므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아닌 유리수도 아니다.</u>
> 따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.(장경윤 외, 2020, p.20)

이러한 설명은 '① p:정수 $\Rightarrow$ p^2:정수, ② p:정수가 아닌 유리수 $\Rightarrow$ p^2:정수가 아닌 유리수'라는 두 전제로부터 출발하여 ㉠에서 ①의 경우를 배제하고, ②로부터 ㉡을 유도하는 것으로 해석된다. 그런데 ㉡의 설명은 이해가 언뜻 잘 되지 않을 수 있다. ㉡을 상세히 풀어 쓰면 다음과 같다.

"$\sqrt{2}$는 연속하는 두 자연수 사이에 있으므로 정수가 아니다. $\sqrt{2}$가 정수가 아닌 유리수라고 <u>가정</u>하자. 정수가 아닌 유리수 $\sqrt{2}$를 제곱하면 정수가 될 수 없다. 그런데 $\sqrt{2}$를 제곱하면 정수이므로 <u>모순</u>이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 정수가 아닌 유리수도 아니다."

이러한 설명이 ㉡에 비해 수학적 이해에는 더 도움이 될 것 같다. 하지만 귀류법의 명시적 사용을 고등학생들도 어려워하는 것을 고려한다면 귀류법이라는 증명의 형식을 익히고 적용하기 전에 귀류법이 적용될 수학적 진술의 이면의 아이디어를 다루는 것이 보다 더 필요하다고 본다.

인간이 도달할 수 없는 무한의 세계를 유한으로 설명하는 것은 어렵다. 역사적으로 무한의 세계를 다양한 방식으로 설명하려고 시도하였으며, 잠재적 무한으로 실무한을 설명하려는 시도는 만족할만한 결론으로 이르게 하지 못하였다. 그래서 19세기에 이르기까지 실무한을 설명하기 위해 선택한 것이 귀류법이라 할 수 있다.

이는 실무한은 무한 개념의 이해 발달의 과정에서 자연스럽게 획득될 수 있는 개념은 아니며, 교육을 통해서만 이해될 수 있는 이차적 직관임을 의미한다. 하지만 학교수학에서 귀류법을 이해하고 사용하는 것에 대한 어려움을 보고하는 연구들(이기돈, 홍갑주, 2016; 황진연, 신보미, 2016)에서 보듯이, 귀류법을 단지 증명의 형식으로만 제시한 후 그것을 적용하는 데 그쳐서는 안 될 것이다. 학생들이 실무한의 세계를 받아들이도록 하기 위하여 실무한의 수준을 고려한 구체적인 교수학적 방안이 모색될 필요가 있다.

대안적인 교수학적 방안으로 유재근 외(2020)의 연구가 고려될 수 있다. 현행 교과서에서는 '일반적으로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.'라는 진술을 제시하고 있다. 이러한 교수학습에서는 수직선 위의 점에 해당하는 수가 실수라는 명제적 지식은 만들어 질 수 있겠으나 수직선에서 시각적으로 파악되는 연속성 때문에 유리수 사이의 틈을 학습자가 지각하도록 하는 것에는 제한적이라 할 수 있다. 유재근 외(2020)는 유리수를 좌표평면에서 원점을 지나는 직선의 기울기로 표현하고 무리수를 기울기로 갖는 과제를 학생들의 활동으로 제안하고 있다. 특히 기울기를 활용한 설명 방식은 무리수가 두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수 즉, 유리수가 아닌 수라는 무리수의 개념 정립을 도울 수 있다. 이를 바탕으로 유리수의 소수표현을 생각하여 무리수의 비순환소수 표현에 대한 이해에 다다를 수 있을 것이다. 이는 Cantor가 사용한 동치류 개념을 초등화하여 학교수학에 적용한 것이라 할 수 있다. 실수에 대한 다양한 심상은 학생들이 실무한의 세계를 이해하는 발판이 될 수 있으며, 특히 기울기를 활용한 설명 방식은 귀류법에 의한 증명의 구조와 함께 그 내용을 인식시키는 데 도움이 될 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 논의

본 연구는 실수의 연속성에 대한 유의미한 이해를 돕는 교수학적 방안을 모색하고자 그 모태가 되는 학문지식인 실수가 완비순서체 즉, 연속체임에 주목하였다. 연속체에 대한 역사적 분석을 하여 다음과 결론을 도출하였다.

첫째, 연속체의 역사는 실무한의 문제를 인간의 유한한 마음으로 다루고자 하면서 무한 개념에 대한 이해를 발달시키는 과정이었다고 할 수 있다. 수직선의 연속성에 대한 지각적 파악은 쉬우나, 실수의 연속성을 수학적으로 규정하기까지는 지난한 시간을 거쳐야 했던 것이다. 그것에는 무한 개념에 대한 이해와 정립이 있었다.

연속체 역사의 특징은 물질세계, 기하, 수 사이의 일관성을 찾고자 한 것이다. 연속체의 특성을 수학적으로 기술할 필요로 무한이 다루어졌으며, 여기서 중요한 문제는 실무한과 잠재적 무한의 관계였다. 잠재적 무한은 인간의 1차 직관이며 현실적으로 가능하지 않는 무한 과정에 대해 그 완결된 실체로서 실무한을 인정하기까지는 오랜 시간이 걸렸다. 여기에는 계산의 결과로 실무한을 이해하기는 어려워서 실무한을 거부하거나 잠재적 무한만으로 설명하려고 한 것도 포함된다.

둘째, 실수와 수직선을 통합하는 데 있어 완비성과 귀류법이 내재되어 있음을 확인하였다.

19세기에 이르러서야 Dedekind와 Cantor에 의해 실수의 산술화에 성공하게 되었다. 특히 Dedekind가 구성한 실수와 Cantor가 구성한 실수가 동치임을 설명하려고 시도하면서 완비성 공리가 필요함을 이해하게 되었고, 결국 완비성 공리는 Dedekind 절단, Cantor 방법과 모두 동치임을 확인할 수 있었다. 이후 실수를 설명하기 위해 완비성 공리를 기본적인 전제 조건으로 택한 것이었다. 특히 완비성 공리를 바탕으로

Dedekind 절단과 Cantor 방법이 동치임을 설명하는 데 있어 귀류법이 활용되었다.

수학자들은 무한을 설명하기 위해 귀류법을 사용하는 한편, 불가분량, 무한소를 이용하여 실무한에 다다르려고 한 시도들이 있었고 많은 문제들을 해결할 수도 있었지만 무한을 논리 수학적으로 설명하는 데는 성공적이지 못했다. 한 예로, 점의 운동에 의한 선분의 연속성은 직관적 설명 및 관련 문제 해결이 가능하였지만 이에 대한 엄밀한 논리 수학적 설명을 위해서는 직관을 배제하는 것이 필요하며, 이를 위해 귀류법의 활용을 고려해야 한다. 따라서 실수와 수직선의 통합에 대한 이해에는 1차 직관의 긍정적 작용도 있는 한편, 논리 수학적 이해 즉 2차 직관 또한 필요하다고 할 수 있다.

이상으로부터 실수의 연속성에 대한 교수학적 시사점은 다음과 같다.

첫째, 유리수로부터 실수를 구성하는 방법은 직관적 이해부터 수학적 정당화까지의 다양한 수준으로 구분될 수 있으며, 학생들의 이해 수준에 적절한 교수학적 조치가 제공되어야 한다.

잠재적 무한에서 실무한으로의 무한 개념 이해의 이행에는 수준이 존재함을 고려할 필요가 있다. 이에 학생 수준을 고려한 지도를 통해 실무한에 대한 유의미한 이해를 도울 수 있다.

이를 테면, 유리수의 실무한 수준이 있을 수 있다. 먼저, $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$ 와 같은 등식을 다루는 수준에서는 대수적 절차를 기계적으로 조작하기 이전에 유리수 $\frac{2}{9}$ 의 소수표현을 찾는 활동에서 분수의 실제 나눗셈이라는 산술적 조작의 학습 경험을 상기하도록 할 수 있을 것이다.

다음은 $0.999\cdots=1$ 과 같이 분수 나눗셈 알고리즘이 바탕이 되지 않는 등식을 다루는 수준이 있을 수 있다. 이 수준에서는 대수적 조작 절차에 따라 $0.9999\cdots=1$ 을 만들 수는 있지만 $0.9999\cdots$를 $0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \cdots$과 같은 수에 의해 만들어지는 잠재적 무한으로 받아들일 수 있다. 즉, 등식에 대한 심리적 수용이 어려운 것이다. 이러한 어려움의 원인은 $0.9999\cdots$을 x라고 두는 것을 당연시하는 데 있을 수 있다. 여기서 x로 두는 것 자체가 실무한(조한혁, 최영기, 1999)인데 이것에 대한 설명이 필요하다. 따라서 나눗셈 알고리즘이 없는 대수적 조작을 논리적으로 받아들이게 하는 교수학적 조치가 필요하다. 이에 이승우(2016)가 대수적 규칙이 문제 상황의 구조를 드러내는 분배 시나리오의 아이디어를 제시한 것을 고려할 수 있다.

또한 무리수의 실무한 수준을 생각할 수 있다. 등식 $1.414213562\cdots=\sqrt{2}$ 에 대해 계산기 조작이나 교과서의 진술로 다루는 수준에서는 잠재적 무한의 수렴값이 존재하며 그것이 $\sqrt{2}$ 라는 것을 알지만 등식에 대한 심리적 수용은 어려울 수 있다. 따라서 무리수를 수열의 극한으로 명시적으로 다루지 못하는 수준에서는 실수 개념의 직관적 이해를 돕는 심상의 제시(우정호, 2017, pp. 236-237)가 도움이 될 수 있다.

그리고 위 등식에 대한 의구심의 해소를 다루는 수준에서는 귀류법 증명을 고려할 수 있다. 그러나 귀류법 증명의 형식을 설명하고 그것을 적용하는 것은 여전히 실무한의 심리적 수용의 해소에 기여하지 못할 수 있다. 따라서 이를 돕는 데 귀류법이 적용될 수학적 진술의 결론에 해당하는 실무한의 제시가 도움이 될 수 있다. 즉, 잠재적 무한에서 실무한으로의 무한 개념 이해의 발달을 위해 실무한 자체를 제시하는 것이 디딤돌이 될 수 있는 것이다. 이는 Nasr & Haifa(2018)가 과정에서의 지체를 건너뛰는 방안으로 수학적 성질의 수용보다는 추상적 이슈, 특히 무한에 대한 더 깊은 생각을 유발할 수 있도록 하는 수학적 추론의 장려(p.196)를 제안한 것과도 일치한다.

둘째, 실수의 연속성을 수직선 모델에서 유리수의 성질과 구별되도록 하는 것에는 한계가 있으므로 그 대안이 모색될 필요가 있다.

실수는 수직선과 직관적으로 결부되지만, 이를 통해 실수의 연속성을 이론적으로 설명하기에는 제한적이라 할 수 있다. “일반적으로 수직선은 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.” 는 것은 실수의 연속성을 학교수학 수준에서 직관적인 방식으로 제시한 것이다. 하지만 실수의 연속성을 개념적으로 이해하도록 하기 위해서는 무한 개념을 바탕으로 실무한을 다루어 보도록 하는 것이 실수와 수직선의 관계에 대한 유의미한 이해에 도움이 될 것이다.

학생들이 수직선에서의 실무한을 받아들이는 것을 어려워하는 이유는 선은 점으로 이루어져 있으므로 ‘가까워진다’는 운동 직관에 기대어 지도한 것에 원인이 있을 수 있다. 역사적 분석에서의 Cavalieri와 Leibniz의 방법을 떠올려보면 부피를 구할 때는 넓이를 적분하고, 넓이를 구할 때는 선을 적분하여 한 차원 낮은 불가분량으로 생각한 바가 있다. 이로부터 단면의 실체를 대상화하여 다루기에 넓이나 부피가 편리한 점이 있음을 알 수 있다. 비록 무한을 피하기 위해 단면만 비교한 것이 Cavalieri이며, 이 방식은 Archimedes의 실진법으로 제시된 것이지만 수렴성을 점이 가까워진다는 것으로 다루기보다는 선이나 면에 의해 파악하도록 하는 것이 교수학적 방안이 될 수도 있다고 본다.

이에 유리수의 본질적인 표상인 분수표현을 이용할 수도 있다. 무리수는 단위량과 전체량의 비가 통약불가능(incommensurable)하여 그 비를 분수로 나타낼 수 없는 수를 의미한다. 그러나 통약불가능성은 피타고라스 정리의 적용으로 제곱근을 도입하는 학교수학에서는 적절한 교수학적 조치로 고려되기는 다소 어렵다. 하지만 분수를 기울기로 좌표평면에 나타내어 그 변화를 쉽게 지각할 수는 있을 것이다. 이로부터 무리수의 근사분수열의 가까이 가는 값이 유리수에는 없으므로 유리수 사이의 공백을 직관하게 하고, 그 값이 무리수임을 이해하도록 하는 것도 위에서 언급한 교수학적 방안의 하나가 될 수 있다.

이러한 활동을 통해 실수와 수직선 사이의 관계에 대한 기초적인 심상을 심어줄 수 있으며, 심화 과정에서 실수에 대한 형식적이고 논리적인 설명을 시도한다면 완비성과 귀류법의 도입이 고려될 필요가 있다.

본 연구는 유리수로부터 실수 체계를 구성하는 가운데 발생된 수학적 개념을 유의미하게 지도하기 위해, 연속체의 역사적 분석을 통해 교수학적 방안을 모색하였다는 데에 연구의 의의가 있다. 이와 관련한 교수학적 조치의 효과를 확인하는 실질적인 연구가 보다 적극적으로 이뤄지기를 기대한다.

참고문헌

김용운, 김용국(1996). **수학사대전**. 서울: 우성.

류희찬 외 (2015). **중학교 수학 3**. 천재교육

박근생(1976). 무한개념의 발전과정에 대한 고찰. **수학교육, 15**(1). 1-4.

박선화(1998). **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

박임숙(2000). 교사의 무한개념 이해도 조사 연구. **수학교육, 39**(1), 37-47.

변희현(2005). **소수 개념의 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

신보미(2008). 실수로의 수 체계 확장을 위한 유리수의 재해석에 대하여. **한국학교수학회논문집, 11**(2), 285-298.

우정호(2011). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호(2017). **개정판 학교수학의 교육적 기초상**. 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호, 민세영, 박미애(2004). **역사발생적 수학 교육 원리에 대한 연구**. (KRF-2002- 074-BS1051)

유재근, 이정아, 박문환, 장혜원(2020). 스프레드시트 환경에서 근사 분수와 직선의 기울기를 이용한 무리수의 대안적 지도법. **수학교육학연구, 30**(2), 353-374.

이기돈, 홍갑주(2016). 교과서의 귀류법 도입과 활용에 대한 고찰 및 개선방안. **학교수학, 18**(4), 839-856.

이승우(2016). 무한 등비급수의 합에 대한 Archimedes의 아이디어의 은유적 모델과 그 교육적 활용. **학교수학, 18**(1), 215-229.

이지원(2008). **무리수 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이종희(2002). 수학적 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. **교과교육학연구, 6**(2), 23-36.

장경윤 외(2020). **중학교 수학 3**. 서울: 지학사.

정계섭(2008) 무한 개념의 진화 : Bolzano를 중심으로. **한국수학사학회지, 21**(3), 31-52.

정동명, 조승제(1996). **실해석학개론**. 서울: 경문사.

정영우(2010). **실수 체계의 교수학적 조직화에 관한 연구**. 부산대학교 대학원 박사학위논문.

조한혁, 최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. **학교수학, 1**(2), 605-615.

주신영(2014). **실수 지도를 위한 교사 지식**. 부산대 대학원 박사학위논문.

최은아, 강향임(2016). 예비교사의 무리수의 개념과 표현에 대한 이해. **학교수학, 18**(3), 647-666.

황진연, 신보미(2016). 귀류법에 대한 교사 지식 분석- '교과 내용 지식' 및 '학생의 이해에 대한 지식'을 중심으로-. **수학교육, 55**(1), 91-106.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc. 수학의 역사 하. (양영오, 조윤동, 역, 2000). 서울: 경문사. (Boyer, C. B. & Merzbach, U. C., 영어 개정판 원작은 1991년 출판).

Branchetti, L. (2016). *Teaching real numbers in the high school: An onto-semiotic approach to the investigation and evaluation of the teachers' declared choices*. Unversità degli studi di palermo.

Katz, V. J. (2000). *Using history of teach mathematics*. MAA service center. 수학교육에서 역사 활용하기 하. (계영희 외, 역, 2006). 서울: 교우사.

Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint- Arithmetic・Algebra・Analysis*. New York: Dover Publications.

Nasr, L. & Haifa, N. (2018). Conceptions of Infinity An APOS Analysis. *International Journal of Innovative Science and Research Technology, 3*(12), pp. 193-197.

Peled, I. & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integrations: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), pp. 39-46.

Toepitz(1963). *Calculus: A genetic Approach*. University of Chicago Publishers. 퇴플리츠의 미분적분학. (우정호, 임재훈, 박경미, 이경화, 역, 2006). 서울: 경문사.

Historical Analysis of Continuum for Teaching Continuity of Real Numbers

Yi, Jung-A (Teacher, Pungduck High School)
Yoo, Jae-Geun (Teacher, Hongcheon Middle School)
Park, Moon Hwan (Professor, Chuncheon National University of Education)

This study analyzes the historical development process of continuum and discusses the pedagogical implications of continuity of real numbers based on this. As a result of historical analysis, the following was confirmed. First, the process of constructing real numbers was a very difficult process that took a long time surrounding understanding and justification of infinity. Second, reductio ad absurdum was a premise condition to revealing that completeness is equivalent to the various ways of constructing real numbers. Teaching implications for this are as follows. First, the method of constructing real numbers from rational numbers can be divided into various levels from intuitive understanding to mathematical justification, and pedagogical treatment appropriate to students' understanding level should be provided. Second, it is not enough to distinguish the properties of rational numbers from the continuity of real numbers in the number line model, so the alternatives need to be studied. These findings provide significant implications for teaching and learning about the continuity of real numbers.

* Key Words : continuum(연속체), history of mathematics(수학사), completeness axiom(완비성 공리), reductio ad absurdum(귀류법), understanding levels of actual infinity(실무한 이해 수준)

논문접수 : 2020. 5. 10
논문수정 : 2020. 6. 16
심사완료 : 2020. 6. 16