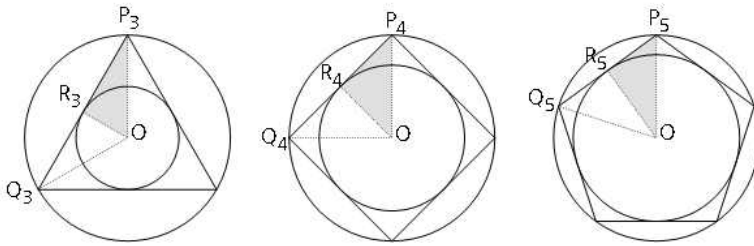


자연계열 논술문제

지원학과(부) :	수험번호 :	성명 :
-----------	--------	------

※ 앞뒤 양면에 <문제 1> ~ <문제 4>까지 있습니다.

<문제 1> 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정 n 각형에서 이웃한 두 꼭짓점을 각각 P_n, Q_n 이라고 하고, 점 O 에서 선분 P_nQ_n 에 내린 수선의 발을 R_n 이라고 하자. 이 정 n 각형에 내접하는 원 O_n 의 넓이를 a_n , 둘레의 길이를 b_n 이라 하자. (단, n 은 3 이상의 자연수)



다음 물음에 답하시오. [총25점]

(1-1) 직각삼각형 OP_nR_n 의 넓이를 구하시오. [7점]

(1-2) $b_6 - 2a_6$ 의 값을 구하시오. [6점]

(1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(b_n - 2a_n)$ 을 구하시오. [12점]

<문제 2> 구간 $[0, 2]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 로 정의할 때 다음 조건이 모두 성립한다고 하자.

- (가) $1 \leq x \leq 2$ 이면 $f(x) \leq 4 - \cos \pi x$ 이다.
- (나) $0 \leq x \leq 1$ 이면 $f(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x$ 이다. (a, b 는 상수)
- (다) $F(1) = 2, F(2) = 6$

다음 물음에 답하시오. [총25점]

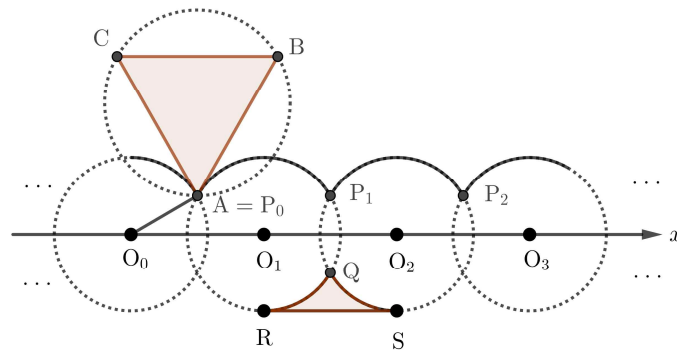
(2-1) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) 상수 a, b 의 값을 구하시오. [8점]

(2-3) $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [7점]

<문제 3> 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 2π 인 원에 내접하는 정삼각형 ABC를 다음 세 조건을 만족하는 반지름의 길이가 r 인 원의 호로 이루어진 길 위로 굴리려고 한다.

- (가) 정수 n 에 대하여 원 C_n 은 x 축 위에 차례대로 놓인 점 O_n 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원이고, 선분 O_nO_{n+1} 의 길이는 n 의 값과 관계없이 모두 같다.
- (나) 원 C_n 과 원 C_{n+1} 의 두 교점 중 x 축 위쪽에서 만나는 점을 P_n 이라 할 때, 중심각의 크기가 π 보다 작은 부채꼴 $O_nP_nP_{n-1}$ 의 호 $P_{n-1}P_n$ 의 길이는 정삼각형 ABC의 한 변 AB의 길이와 같다.
- (다) 정삼각형 ABC의 한 꼭짓점 A가 점 P_0 에 있을 때, 직선 AB는 원 C_1 에 접하고, 직선 AC는 원 C_0 에 접한다.



다음 물음에 답하십시오. [총25점]

(3-1) 선분 AB의 길이와 반지름의 길이 r (선분 O_nP_n 의 길이)를 구하십시오. [12점]

(3-2) 조건 (가)~(다)를 만족하는 원의 호로 이루어진 길을 따라 정삼각형 ABC가 한 바퀴 굴렀을 때 점 A가 점 A'으로 옮겨졌다. 선분 AA'의 길이를 구하십시오. [5점]

(3-3) 위의 그림과 같이 원 C_1 위의 점 R과 원 C_2 위의 점 S를 연결한 직선이 두 원 C_1 과 C_2 에 동시에 접하고, 점 Q는 두 원 C_1 과 C_2 의 두 교점 중 P_1 이 아닌 점이다. 선분 RS, 호 RQ, 호 QS로 둘러싸인 색칠된 도형의 넓이를 구하십시오. [8점]

<문제 4> 다음 물음에 답하십시오. [총25점]

(4-1) 좌표평면 위의 세 점 $P(10,0)$, $Q(20,0)$, $R(0,20)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하십시오. [7점]

(4-2) 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $A(n,0)$, $B(0,n)$, $C(-n,0)$, $D(0,-n)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $N(n)$ 이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{11} N(k)$ 의 값을 구하십시오. [8점]

(4-3) $x + y + z = 20$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 에 대하여 x 는 홀수, y 는 짝수, z 는 소수인 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하십시오. [10점]