한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-1번

1.

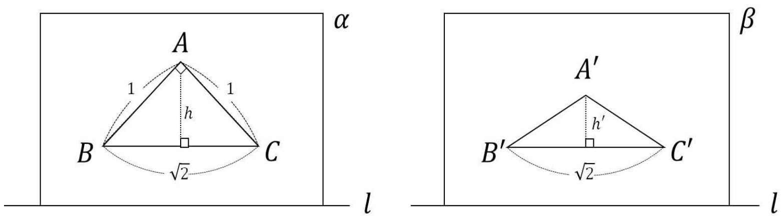
삼각형 ABC의 평면 β로의 정사영을 $A'B'C'$이라고 하고 h와 h'을 각각 삼각형 ABC와 $A'B'C'$의 높이라고 하면

h = (삼각형ABC의높이) = $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

h' = (삼각형$A'B'C'$의높이) = $h \cdot \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

$\overline{A'B'} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}$

이다.



2.

선분 PQ를 가장 긴 변으로 하고 다음과 같은 성질을 만족하는 평면 α위의 직각삼각형 PRQ를 생각한다.

- 직선 PR과 직선 l은 수직이다.
- 직선 RQ와 직선 l은 평행이다.

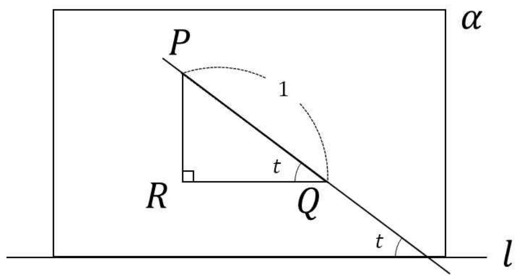
이 때, $\angle Q = t$, $\overline{PR} = \sin t$, $\overline{RQ} = \cos t$이다. 삼각형 PQR의 평면 β위로의 정사영을 $P'Q'R'$이라고 하면 이 삼각형은 $\angle R' = 90^\circ$인 직각삼각형이다. 따라서

$\overline{P'R'} = \sin t\cos\theta$, $\overline{R'Q'} = \cos t$

이므로

$\overline{P'Q'} = \sqrt{\sin^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t}$

이다.



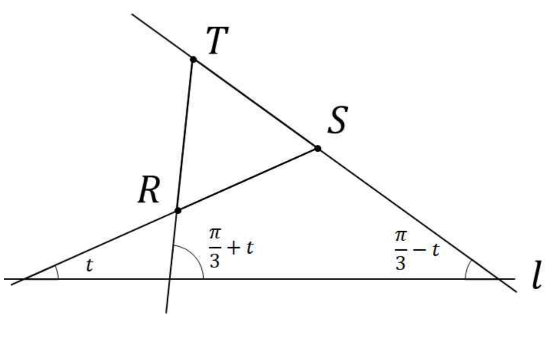
3.

점 R, S, T중 직선 l에 가장 가까운 점을 R이라고 하자. 이제 직선 RS가 직선 l과 이루는 각을 t라고 하면 직선 TS가 직선 l과 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}-t$이고, 직선 RT가 직선 l과 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}+t$이다. 문제 2의 식을 적용하면 삼각형 $R'S'T'$의 각 변의 길이의 제곱은 다음과 같다.

$\overline{R'S'}^2 = \sin^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t$

$$\begin{aligned}\overline{T'S'}^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\cos^2\theta + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\\ &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos t - \cos\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\cos^2\theta + \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t + \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{R'T'}^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)\cos^2\theta + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)\\ &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos t + \cos\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\cos^2\theta + \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t - \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\end{aligned}$$



이 세 값을 더하면

$\overline{R'S'}^2 + \overline{T'S'}^2 + \overline{R'T'}^2 = \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{3}{2}$이다.

$\cos\theta = \frac{3}{\pi}$을 대입하면 답은 $\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{\pi}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{27+3\pi^2}{2\pi^2}$ 이다.

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	논 술 예 시 답 안	오전-2번

1. 꺼낸 카드에 적힌 수를 X라고 할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은 다음과 같이 계산된다.

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1+2+3}{3} = 2 = \mathrm{E}(\overline{X})$,

$\mathrm{V}(X) = \dfrac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = \dfrac{2}{3}$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{\mathrm{V}(X)}{54} = \dfrac{1}{81}$

$n=54$가 충분히 크기 때문에 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2, 1/81)$을 따른다.

$\mathrm{E}(-2\overline{X}) = -2\mathrm{E}(\overline{X}) = -4$

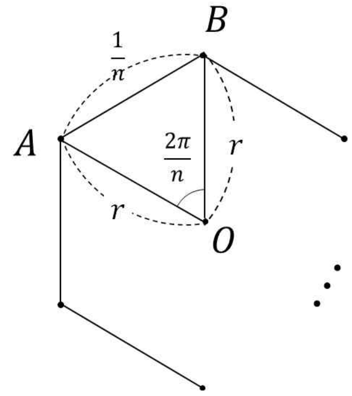
$\mathrm{V}(-2\overline{X}) = (-2)^2\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{4}{81}$

즉, $-2\overline{X}$의 평균과 분산은 각각 -4와 $4/81$이므로 확률변수 $Z = \dfrac{-2\overline{X}+4}{\sqrt{4/81}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}\left(-2\overline{X} \ge -\dfrac{11}{3}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{-11/3+4}{2/9}\right) = P(Z \ge 1.5) = 1-\mathrm{P}(Z \le 1.5) = 0.0668$이 된다.

2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$를 미분하면 $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$를 얻는다. 따라서 $f'(e)=0$이고, $x<e$에서 $f'(x)>0$, $x>e$에서 $f'(x)<0$임을 알 수 있다. 만일 $a<b$인 순서쌍 (a,b)가 $a^b=b^a$를 만족한다면 $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b}$, 즉 $f(a)=f(b)$가 성립한다. 여기서 $f(x)$가 $x<e$에서는 증가, $x>e$에서는 감소하므로, 만일 $e<a<b$ 라면 $f(a)>f(b)$, $a<b<e$라면 $f(a)<f(b)$가 되어 $f(a)=f(b)$가 불가능하다.
따라서 $a<e<b$여야만 $f(a)=f(b)$를 얻을 수 있다. 여기서 무리수 $e=2.71...$이므로 이보다 작은 양의 정수 a는 1 또는 2여야만 하는데, 모든 $b>e$에 대해 $f(1)=0<f(b)$이므로 $a=1$일수는 없다. 만일 $a=2$라면 양의 정수 b또한 2의 제곱꼴이 되고, $b=4$가 $a^b=b^a$를 만족함을 알 수 있다. 역시 4보다 큰 값 b'에 대해서는 $f(2)=f(4)>f(b')$이므로, $b=4$가 $f(2)=f(b)$를 만족하는 유일한 값이다. 우리가 앞서 $a<b$를 가정했으나 대칭적으로 $b<a$ 또한 가능하고, 따라서 모든 양의 정수 순서쌍 (a,b)는 $(2,4),(4,2)$가 된다.

3. 점 O를 정 n각형의 외접원의 중심, 점 A, B를 정 n각형의 이웃한 두 꼭짓점이라고 하자.



삼각형 OAB에서 $\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\dfrac{2\pi}{n}$, $\quad r^2 = \dfrac{1}{2n^2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ 이므로

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4n^2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ 이므로 정 n각형의 넓이 $f(n)$은

$f(n) = n \times \triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4n\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ 이다. 따라서

$f(12) = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{48\left(1-\cos\dfrac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{48(2-\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{48}$ 이고,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4n\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}\cdot\dfrac{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}\cdot\dfrac{\dfrac{2\pi}{n}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}\cdot\dfrac{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\dfrac{2\pi}{n}} = \dfrac{1}{4\pi}$ 이다.