

수학 영역

정답

1	④	2	⑤	3	⑤	4	③	5	②
6	④	7	①	8	②	9	②	10	③
11	①	12	③	13	①	14	⑤	15	④
16	9	17	20	18	65	19	22	20	54
21	13	22	182						

해설

- [출제의도]** 지수 계산하기  
 $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1} = 2^{2(1-\sqrt{3})} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$   
 $= 2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}$   
 $= 2$
- [출제의도]** 미분계수 계산하기  
 $f'(x) = 3x^2 - 7$  이므로  
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 5$
- [출제의도]** 삼각함수의 성질 이해하기  
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta = \frac{3}{5}$   
 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{16}{25}$   
 $\sin\theta \cos\theta < 0$  이므로  $\sin\theta = -\frac{4}{5}$   
따라서  $\sin\theta + 2\cos\theta = \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$
- [출제의도]** 함수의 극한 이해하기  
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$   
따라서  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 + 1 = 1$
- [출제의도]** 함수의 미분가능성 이해하기  
함수  $f(x)$  가  $x = 1$  에서 미분가능하므로  
 $x = 1$  에서 연속이다.  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + a) = a + 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^3 + bx + 1) = b + 3$   
 $f(1) = a + 3$   
 $a + 3 = b + 3, a = b$   
함수  $f(x)$  가  $x = 1$  에서 미분가능하므로  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + a - (a + 3)}{x - 1} = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x^3 + ax + 1) - (a + 3)}{x - 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x^2 + 2x + a + 2)}{x - 1} = a + 6$   
 $3 = a + 6, a = -3, b = -3$   
따라서  $a + b = -6$

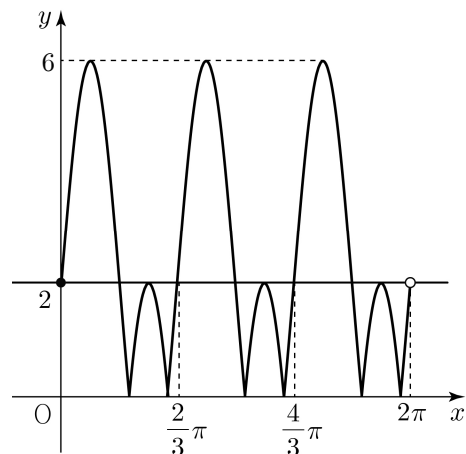
- [출제의도]** 등비수열의 일반항 계산하기  
등비수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$  라 하자.  
 $a_n = ar^{n-1}$  (단,  $n$  은 자연수)  
 $a_3^2 = a_6$  이므로  $(ar^2)^2 = ar^5, ar^4(a-r) = 0,$   
 $a = r, a_n = r^n$   
 $a_2 - a_1 = 2$  이므로  $r^2 - r = 2$   
 $(r-2)(r+1) = 0$   
 $r = 2$  또는  $r = -1$   
모든 항이 양수이므로  $r = 2$   
따라서  $a_5 = r^5 = 32$

- [출제의도]** 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기  
함수  $f(x)$  가  $x = 1$  에서 극값을 가지므로  
 $f'(1) = 0$   
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$  에서  
 $f'(1) = 3 + 2a - 9 = 0$  이므로  $a = 3$   
 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$   
함수  $f(x)$  는  $x = -3$  에서 극댓값을 갖는다.  
따라서  $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 4 = 31$

- [출제의도]** 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기  
점 P 가 운동 방향을 바꿀 때  $v(t) = 0$   
 $v(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0$   
점 P 가  $t = 1, t = 3$  에서 운동 방향을 바꾸므로  $a = 3$   
점 P 가 시각  $t = 0$  에서  $t = 3$  까지 움직인 거리는  
 $\int_0^3 |v(t)| dt$   
 $= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^3 \{-v(t)\} dt$   
 $= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt + \int_1^3 (-t^2 + 4t - 3) dt$   
 $= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3t\right]_1^3$   
 $= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

- [출제의도]** 거듭제곱근 이해하기  
(i)  $n$  이 짝수일 때  
 $(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$  의 실근은  
 $x = \pm \sqrt[n]{8}$  또는  $x = \pm \sqrt[2n]{8}$   
모든 실근의 곱이 양수이므로 모순  
(ii)  $n$  이 홀수일 때  
 $(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$  의 실근은  
 $x = \sqrt[n]{8}$  또는  $x = \pm \sqrt[2n]{8}$   
모든 실근의 곱은  
 $\frac{3}{2^n} \times 2^{\frac{3}{2n}} \times \left(-2^{\frac{3}{2n}}\right) = -2^{\frac{6}{2n}} = -4$   
 $\frac{6}{2^n} = 2^2, \frac{6}{n} = 2$   
따라서 (i), (ii)에 의하여  $n = 3$

- [출제의도]** 삼각함수의 그래프 이해하기  
삼각함수  $y = 4\sin 3x + 2$  는  
주기가  $\frac{2}{3}\pi$ , 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이므로  
 $0 \leq x < 2\pi$  일 때, 곡선  $y = |4\sin 3x + 2|$  는 다음과 같다.



따라서  $0 \leq x < 2\pi$  일 때,  
곡선  $y = |4\sin 3x + 2|$  와 직선  $y = 2$  가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

- [출제의도]** 정적분의 정의 이해하기  
 $f(1+x) + f(1-x) = 0$  에  $x = 0$  을 대입하면  
 $f(1) = 0$   
 $f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$  (단,  $a, b$  는 상수)  
조건 (나)에서  
 $\int_{-1}^3 f'(x) dx = f(3) - f(-1) = 12 \dots \textcircled{1}$   
 $f(1+x) + f(1-x) = 0$  에  $x = 2$  를 대입하면  
 $f(3) + f(-1) = 0 \dots \textcircled{2}$   
두 식  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  을 연립하면  
 $f(3) = 6, f(-1) = -6$   
 $f(3) = 2(9 + 3a + b) = 6, 3a + b = -6 \dots \textcircled{3}$   
 $f(-1) = -2(1 - a + b) = -6, a - b = -2 \dots \textcircled{4}$   
두 식  $\textcircled{3}, \textcircled{4}$  을 연립하면  $a = -2, b = 0$   
 $f(x) = x(x-1)(x-2)$   
따라서  $f(4) = 24$

- [출제의도]** 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기  
등차수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a$  라 하자.  
조건 (가)에 의하여  
 $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k = \frac{(2m+1)\{2a + 5 \times (2m+1-1)\}}{2}$   
 $= (2m+1)(a + 5m) < 0$   
 $2m+1 > 0$  이므로  $a + 5m = a_{m+1} < 0$   
(i)  $a_{m+1} = -1$  인 경우  
 $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 11$  이므로  
조건 (나)를 만족시킨다.  
 $a_{m+1} = -1$  이므로  
 $a_{m+6} = 24, a_{m+7} = 29$   
 $24 < a_{21} < 29$  인  $a_{21}$  이 존재하지 않는다.  
(ii)  $a_{m+1} = -2$  인 경우  
 $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 12$  이므로  
조건 (나)를 만족시킨다.  
 $a_{m+1} = -2$  이므로  $a_{m+7} = 28$   
따라서  $m+7 = 21$  이므로  $m = 14$   
(iii)  $a_{m+1} \leq -3$  인 경우  
 $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| \geq 13$  이므로  
조건 (나)를 만족시키지 않는다.  
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여  $m = 14$

- [출제의도]** 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle AFC = \alpha$ ,  $\angle CDE = \beta$  라 하자.  
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$  이므로  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$   
 $\angle ECD = \angle EFB = \pi - \alpha$   
삼각형 CDE 에서 사인법칙에 의하여  
 $\frac{\overline{ED}}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{\overline{EC}}{\sin \beta} = 10\sqrt{2}$   
 $\overline{ED} = 10\sqrt{2} \times \sin \alpha = 10\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{5}$   
 $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$   
 $\overline{CD} = x$  라 하자.  
삼각형 CDE 에서 코사인법칙에 의하여  
 $180 = x^2 + 100 - 2 \times x \times 10 \times \cos(\pi - \alpha)$   
 $= x^2 + 100 + 2 \times x \times 10 \times \cos \alpha$   
 $= x^2 + 2\sqrt{10}x + 100$   
 $x^2 + 2\sqrt{10}x - 80 = 0$  이고  $x > 0$  이므로  
 $x = -\sqrt{10} + \sqrt{10 + 80} = 2\sqrt{10}$   
 $\angle ABE = \angle CDE = \frac{\pi}{4}$  이므로  
삼각형 ABE 는 직각이등변삼각형이다.  
 $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$  이므로  $\overline{BE} = \overline{AE} = 2\sqrt{5}$   
두 삼각형 BEF, DEC 는 서로 닮음이고  
닮음비가 1:3 이다.  
 $\overline{AF} = \frac{2}{3} \times \overline{AB} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$   
따라서 삼각형 AFE 의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{AE} \times \sin \frac{\pi}{4}$   
 $= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{10}}{3} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{3}$

14. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여  
추론하기  
ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)g(x-3) = -f(0) \times f(-3)$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)g(x-3) = f(0) \times \{-f(-3)\}$   
 $g(0)g(-3) = f(0) \times \{-f(-3)\}$   
함수  $g(x)g(x-3)$  은  $x=0$  에서 연속이다. (참)  
ㄴ. 함수  $g(x)g(x-3)$  이  $x=k$  에서 불연속인  
실수  $k$  의 값이 한 개이므로  
 $k = -3$  또는  $k = 3$   
(i) 함수  $g(x)g(x-3)$  이  $x = -3$  에서  
연속이고,  $x = 3$  에서 불연속인 경우  
 $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x)g(x-3) = f(-3) \times f(-6)$   
 $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x)g(x-3) = -f(-3) \times f(-6)$   
 $g(-3)g(-6) = -f(-3) \times f(-6)$  이므로  
 $f(-3) \times f(-6) = 0 \dots \textcircled{1}$   
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)g(x-3) = f(3) \times \{-f(0)\}$   
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)g(x-3) = f(3) \times f(0)$   
 $g(3)g(0) = f(3) \times f(0)$  이므로  
 $f(3) \times f(0) \neq 0 \dots \textcircled{2}$   
 $f(-3) = f(0)$  이므로  
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여  $f(-6) = 0$   
(ii) 함수  $g(x)g(x-3)$  이  $x = 3$  에서 연속이고,  
 $x = -3$  에서 불연속인 경우  
(i) 과 같은 방법에 의하여  $f(3) = 0$   
(i), (ii)에 의하여  $f(-6) = 0$  또는  
 $f(3) = 0$  이므로  $f(-6) \times f(3) = 0$  (참)

ㄷ.  $k = -3$  이므로  $f(3) = 0$   
 $f(x) = (x-3)(x^2 + ax + b)$  라 하자.  
(단,  $a, b$  는 상수)  
 $f(-3) = f(0)$  이므로  
 $-6(9 - 3a + b) = -3b$ ,  $b = 6a - 18$   
 $f(x) = (x-3)(x^2 + ax + 6a - 18)$   
(i) 방정식  $x^2 + ax + 6a - 18 = 0$  이 3 이 아닌  
서로 다른 두 실근을 갖는 경우  
방정식  $f(x) = 0$  의 세 실근의 합은  
 $3 + (-a) = -1$ ,  $a = 4$   
방정식  $x^2 + 4x + 6 = 0$  은 실근을 갖지  
않으므로 모순  
(ii) 방정식  $x^2 + ax + 6a - 18 = 0$  이 중근을  
갖는 경우  
방정식  $f(x) = 0$  의 서로 다른 두 실근의 합은  
 $3 + \left(-\frac{a}{2}\right) = -1$ ,  $a = 8$   
방정식  $x^2 + 8x + 30 = 0$  은 중근을 갖지  
않으므로 모순  
(iii) 방정식  $x^2 + ax + 6a - 18 = 0$  이  
3 과  $-4$  를 실근으로 갖는 경우  
 $3 + (-4) = -a$ ,  $3 \times (-4) = 6a - 18$  에서  
 $a = 1$   
 $f(x) = (x-3)(x^2 + x - 12) = (x-3)^2(x+4)$   
그러므로  $g(-1) = -f(-1) = -48$  (참)  
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여  
추론하기  
(i)  $4 \leq n \leq 7$  인 모든 자연수  $n$  에 대하여  
 $\log_3 a_n$  이 자연수가 아닌 경우  
 $a_5 = a_4 + 6$ ,  $a_6 = a_5 + 6 = a_4 + 12$ ,  
 $a_7 = a_6 + 6 = a_4 + 18$  이므로  
 $\sum_{k=4}^7 a_k = 4a_4 + 36 = 40$ ,  $a_4 = 1$   
순서쌍  $(a_1, a_2, a_3)$  은  $(27, 9, 3)$   
그러므로  $a_1 = 27$   
(ii)  $4 \leq n \leq 7$  인 자연수  $n$  에 대하여  
 $\log_3 a_n$  이 자연수인  $n$  이 존재하는 경우  
 $a_n = 3^m$  ( $m$  은 자연수)인  $n$  ( $4 \leq n \leq 7$ ) 이  
존재한다.  
 $a_4, a_5, a_6, a_7$  중  $3^m$  ( $m \geq 4$ ) 가 존재하면  
 $\sum_{k=4}^7 a_k > 40$  이므로 주어진 조건을  
만족시키지 않는다.  
그러므로  $a_4, a_5, a_6, a_7$  중  $3^m$  ( $m \geq 4$ ) 가  
존재하지 않는다.  
또한  $a_4, a_5, a_6, a_7$  중 27 이 존재하지  
않으면  $n = 4, 5, 6, 7$  에 대하여  
 $\sum_{k=4}^7 a_k < 40$   
그러므로  $a_4, a_5, a_6, a_7$  중 하나가 27 이다.  
만약  $a_5, a_6, a_7$  중 하나가 27 이면  
 $\sum_{k=4}^7 a_k > 40$  이므로  $a_4 = 27$   
 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$   
그러므로  $a_4 = 27$  일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1 < 300$  을 만족시키는  
순서쌍  $(a_1, a_2, a_3)$  은  
 $(69, 75, 81)$ ,  $(237, 243, 81)$  이므로  
 $a_1 = 69$  또는  $a_1 = 237$   
따라서 (i), (ii)에 의하여  
모든  $a_1$  의 값의 합은  $27 + 69 + 237 = 333$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기  
로그의 진수 조건에 의하여  
 $x - 5 > 0$  이고  $x + 7 > 0$  이므로  $x > 5 \dots \textcircled{1}$   
 $\log_4(x-5)^2 = \log_4(x+7)$ ,  $(x-5)^2 = x+7$   
 $x^2 - 10x + 25 = x + 7$ ,  $x^2 - 11x + 18 = 0$   
 $(x-2)(x-9) = 0$ ,  $x = 2$  또는  $x = 9$   
 $\textcircled{1}$ 에 의하여  $x = 9$

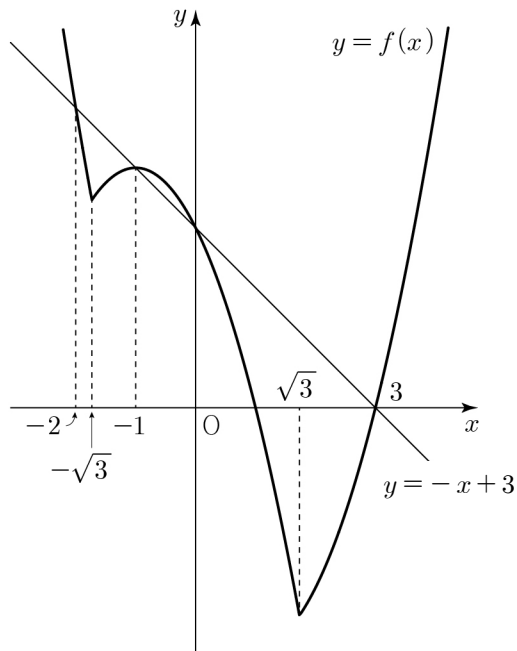
17. [출제의도] 부정적분 계산하기  
 $f(x) = \int (9x^2 - 8x + 1) dx$   
 $= 3x^3 - 4x^2 + x + C$  (단,  $C$  는 적분상수)  
 $f(1) = 3 - 4 + 1 + C = 10$ ,  $C = 10$   
 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 10$   
따라서  $f(2) = 24 - 16 + 2 + 10 = 20$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기  
 $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3 = 40$ ,  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$   
 $\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = -10$   
 $\sum_{k=1}^{10} b_k = 15$   
따라서  $\sum_{k=1}^{10} (b_k + 5) = \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 5 = 65$

19. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여  
문제 해결하기  
 $f(x) = x^3 - 10$ ,  $g(x) = x^3 + k$  라 하자.  
 $f'(x) = 3x^2$  이므로  
곡선  $y = f(x)$  위의 점  $P(-2, -18)$  에서의  
접선의 기울기는  $f'(-2) = 12$   
접선의 방정식은  
 $y - (-18) = 12\{x - (-2)\}$ ,  $y = 12x + 6$   
점 Q 의 좌표를  $(\alpha, \alpha^3 + k)$  라 하자.  
(단,  $\alpha$  는 상수)  
 $g'(x) = 3x^2$  이므로  
곡선  $y = g(x)$  위의 점 Q  $(\alpha, \alpha^3 + k)$  에서의  
접선의 기울기는  $g'(\alpha) = 3\alpha^2$   
접선의 방정식은  $y - (\alpha^3 + k) = 3\alpha^2(x - \alpha)$ ,  
 $y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3 + k$   
두 접선이 일치하므로  $3\alpha^2 = 12$ ,  $-2\alpha^3 + k = 6$   
 $\alpha = 2$  이면  $k = 22$ ,  $\alpha = -2$  이면  $k = -10$   
 $k > 0$  이므로  $k = 22$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제  
해결하기  
 $f(x) = |x^2 - 3| - 2x$   
 $= \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \leq -\sqrt{3} \\ & \text{또는 } x \geq \sqrt{3}) \\ -x^2 - 2x + 3 & (-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \end{cases}$

$x_1, x_4$ 는 이차방정식  $x^2 - 2x - 3 = -x + t$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여  
 $x_1 + x_4 = 1, x_1 x_4 = -t - 3$   
 $x_4 - x_1 = 5$ 이므로  $x_1 = -2, x_4 = 3$   
 $x_1 x_4 = -t - 3 = -6, t = 3$   
 $x_2, x_3$ 은 이차방정식  $-x^2 - 2x + 3 = -x + 3$ 의 두 근이므로  $x_2 = -1, x_3 = 0$



단한구간  $[0, 3]$ 에서 두 함수  $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는  
 $\int_0^3 |f(x) - g(x)| dx$   
 $= \int_0^{\sqrt{3}} \{(-x+3) - (-x^2-2x+3)\} dx$   
 $+ \int_{\sqrt{3}}^3 \{(-x+3) - (x^2-2x-3)\} dx$   
 $= \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{\sqrt{3}}^3$   
 $= \frac{27}{2} - 4\sqrt{3}$

따라서  $p \times q = \frac{27}{2} \times 4 = 54$

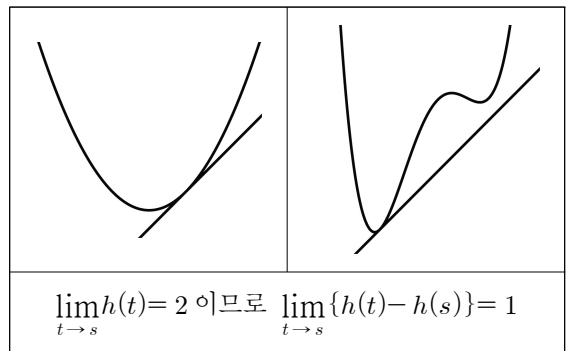
21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

점 D의 좌표를  $(t, 0) (t > 0)$ 이라 하자.  
 점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이므로  $\overline{CA} : \overline{AD} = 2 : 3$   
 점 A의 x좌표는  $\frac{2}{5}t, A\left(\frac{2}{5}t, \frac{6}{5}t\right)$   
 점 C의 y좌표는  $2t, C(0, 2t)$   
 직선 BC의 방정식은  $y = -\frac{1}{3}x + 2t$   
 점 B는 두 직선  $y = 3x, y = -\frac{1}{3}x + 2t$ 의 교점이므로  $B\left(\frac{3}{5}t, \frac{9}{5}t\right)$   
 $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}t$   
 삼각형 ABC의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2 = \frac{t^2}{5} = 20$   
 $t^2 = 100$ 이므로  $t = 10$   
 $A(4, 12), B(6, 18)$ 이므로

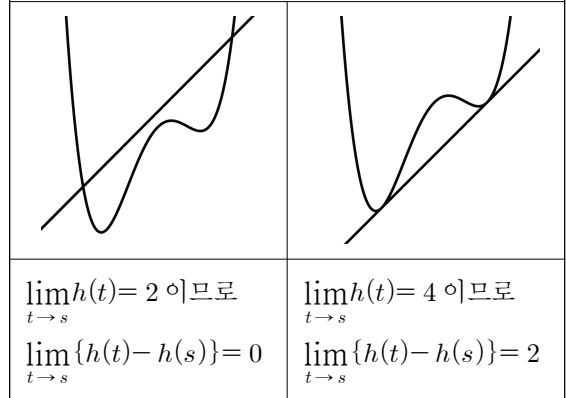
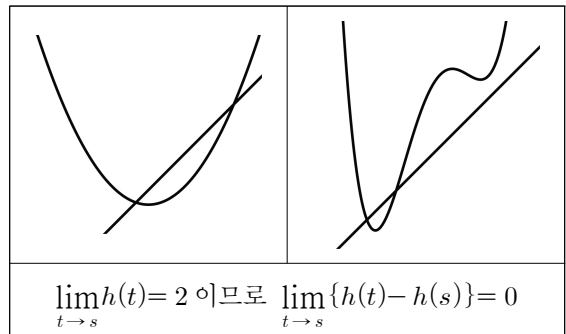
$12 = 2^{4-m} + n, 18 = 2^{6-m} + n$   
 $18 - 2^{6-m} = 12 - 2^{4-m}$   
 $2^{6-m} - 2^{4-m} = 6$   
 $64 \times 2^{-m} - 16 \times 2^{-m} = 6$   
 $48 \times 2^{-m} = 6, 2^{-m} = \frac{1}{8}$   
 $m = 3, n = 10$   
 따라서  $m + n = 13$

22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

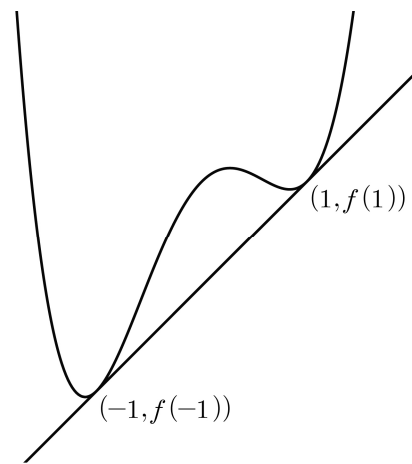
방정식  $g(x) = 0$ 에서  
 $x = t$ 일 때  $f(t) - t - f(t) + t = 0$ 이므로  $g(t) = 0$   
 $x \neq t$ 일 때  $f(x) - x - f(t) + t = 0$ 에서  
 $\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = 1$ 이다.  
 그러므로 함수  $h(t)$ 는 곡선  $y = f(x)$  위의 한 점  $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 1인 직선  $l$ 과 곡선  $y = f(x)$ 의 교점의 개수이다.  
 임의의 실수  $s$ 에 대하여  $h(s) \geq 1$ 이다.  
 (i)  $h(s) = 1$ 인 경우



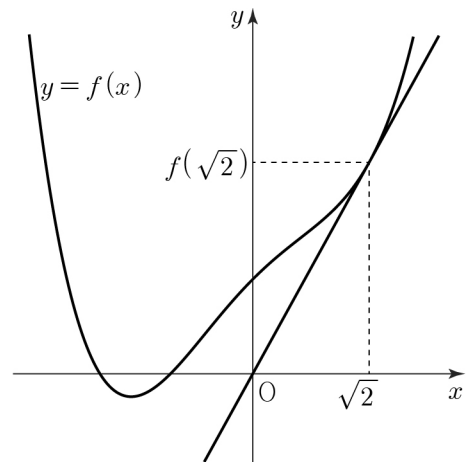
(ii)  $h(s) = 2$ 인 경우



(iii)  $h(s) \geq 3$ 인 경우  
 $\lim_{t \rightarrow s} h(t) = 4$ 이거나 극한값이 존재하지 않는다.  
 (i), (ii), (iii)에 의하여  
 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $l$ 이 두 점  $(-1, f(-1)), (1, f(1))$ 에서 접할 때  
 $\lim_{t \rightarrow -1} \{h(t) - h(-1)\} = \lim_{t \rightarrow 1} \{h(t) - h(1)\} = 2$ 를 만족시킨다.



함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를  $a$ , 직선  $l$ 의 방정식을  $y = x + b$ 라 하자.  
 (단,  $a, b$ 는 상수)  
 $f(x) - (x + b) = a(x - 1)^2(x + 1)^2$   
 $f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + b$   
 조건 (나)에서  $\int_0^\alpha \{f(x) - |f(x)|\} dx = 0$ 을 만족시키는 실수  $\alpha$ 의 최솟값이  $-1$ 이므로  
 $-1 \leq x \leq 0$ 에서  $f(x) \geq 0, f(-1) \geq 0$   
 $f(-1) > 0$ 이면 실수  $\alpha$ 의 최솟값이  $-1$ 이 아니므로  $f(-1) = 0$   
 $f(-1) = -1 + b = 0, b = 1$   
 $f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + 1$   
 조건 (다)에서  
 $\frac{d}{dx} \int_0^x \{f(u) - ku\} du = f(x) - kx \geq 0$   
 $f(x) \geq kx$ 이므로 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = kx$ 가 접하거나 만나지 않는다.  
 실수  $k$ 의 최댓값이  $f'(\sqrt{2})$ 이므로 그림과 같이 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = f'(\sqrt{2})x$ 가 점  $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ 에서 접한다.



$f(x) = a(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + 1$   
 $= ax^4 - 2ax^2 + x + a + 1$   
 $f'(x) = 4ax^3 - 4ax + 1$   
 $f(\sqrt{2}) = 4a - 4a + \sqrt{2} + a + 1 = a + \sqrt{2} + 1$   
 $f'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}a + 1 = 4\sqrt{2}a + 1$   
 $f(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2}) \times \sqrt{2}$ 이므로  
 $a + \sqrt{2} + 1 = (4\sqrt{2}a + 1) \times \sqrt{2}$   
 $= 8a + \sqrt{2}$   
 $a = \frac{1}{7}, f(x) = \frac{1}{7}(x - 1)^2(x + 1)^2 + x + 1$   
 따라서  $f(6) = \frac{1}{7} \times 5^2 \times 7^2 + 6 + 1 = 182$