1장 연습문제 풀이

1-1 (예제 1.1의 연습 1/4) 어느 질점의 운동변위가 $x(t) = 0.2\sin(20t - \frac{\pi}{3})$ m로 표시될 때 다음을 구하라.

(a) 주기 T

(b) 최고속도 $\dot{x}_{\max}$와 최고가속도 $\ddot{x}_{\max}$

(풀이) (a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0.314\ \mathrm{s}$

(b) $\dot{x}_{\max} = \omega X = 20 \cdot\ 0.2 = 4\ \mathrm{m/s}$

$\ddot{x}_{\max} = \omega^2 X = 20^2 \cdot\ 0.2 = 80\ \mathrm{m/s^2}$

(a) $T = 0.314\ \mathrm{s}$, (b) $\dot{x}_{\max} = 4\ \mathrm{m/s}$, $\ddot{x}_{\max} = 80\ \mathrm{m/s^2}$ (답)

1-2 (예제 1.1의 연습 2/4) 진동수가 5 Hz이고 최대가속도가 150 $\mathrm{m/s^2}$인 조화운동의 진폭은 얼마인가?

(풀이) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot\ 5 = 10\pi\ \mathrm{rad/s}$

$\ddot{x}_{\max} = \omega^2 X$에서 $150 = (10\pi)^2 X$, $\quad \therefore \quad X = 0.152\ \mathrm{m}$

$0.152\ \mathrm{m}$ (답)

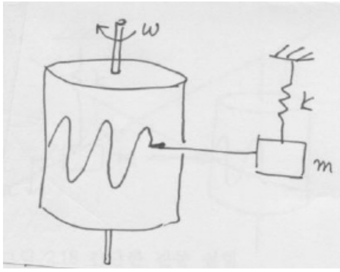
1-3 (예제 1.1의 연습 3/4) 회전속도가 360 rpm인 조화운동의 주기 T를 구하라.

(풀이) $f = \frac{360}{60} = 6\ \mathrm{Hz}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6} = 0.167\ \mathrm{s}$

0.167 s (답)

1-4 (예제 1.1의 연습 4/4) 그림과 같이 질량과 스프링으로 구성된 진동계에 대해 간단한 실험을 하여보자. 270 g의 질량이 20번 왕복할 때, 소요되는 시간이 각각 20.3 s, 21.1 s, 20.7 s라고 할 때, 이 단진자의 진동수는 얼마인가?



(풀이) 반복실험한 측정시간의 평균은 $(20.3+21.1+20.7)/3=20.8\ \mathrm{s}$이다. 따라서 주기는 $T=20.8/20=1.04\ \mathrm{s}$이다. 따라서 진동주파수는 다음과 같다.

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1.04}=0.97\ \mathrm{Hz}$$

$0.97\ \mathrm{Hz}$ (답)

1-5 (예제 1.2의 연습) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$일 때 두 행렬의 곱을 구하라.

$\begin{pmatrix}9 & 2\\ -5 & -5\end{pmatrix}$ (답)

1-6 (예제 1.3의 연습) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$의 행렬식(determinant)을 구하라.

4 (답)

1-7 (예제 1.4의 연습) 다음 행렬의 역행렬(inverse matrix)을 각각 구하라.

(a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, (b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ (답)

1-8 (예제 1.5의 연습) 다음을 계산하라.

(a) $3\cos 2t+4\sin 2t$를 sine 함수로 합성하라.

(b) $3\cos 2t+4\sin 2t$를 cosine 함수로 합성하라.

(a) $5\sin(2t+0.644)$ 또는 $5\sin(2t+36.9^{\circ})$,

(b) $5\cos(2t-0.927)$ 또는 $5\cos(2t-53.1^{\circ})$ (답)

1-9 (예제 1.6의 연습 1/2) 어느 사찰에 있는 대형 종(Korean bell)이 100.5 Hz와

100.7 Hz의 인접한 고유 진동수를 가지고 있다고 한다. 이 종이 울릴 때 발생되는 맥놀이 진동수는 얼마인가?

(풀이) $f_b = f_1 - f_2 = 100.7 - 100.5 = 0.2\,\mathrm{Hz}$

0.2 Hz (답)

1-10 (예제 1.6의 연습 2/2) $x_1 = 3\sin 602t$와 $x_2 = 3\sin 604t$을 합성하면 맥놀이(beat) 현상이 일어난다. 이 때 맥놀이 진동수 f_b는 몇 Hz인가?

(풀이) $f_b = \dfrac{\omega_1}{2\pi} - \dfrac{\omega_2}{2\pi} = \dfrac{604}{2\pi} - \dfrac{602}{2\pi} = 0.318\,\mathrm{Hz}$

$f_b = 0.318\,\mathrm{Hz}$ (답)

1-11 (예제 1.7의 연습) $3e^{-2it}$를 sine과 cosine으로 나타내라.

$3(\cos 2t - i\sin 2t)$ (답)

1-12 (예제 1.8의 연습) 어느 위치에서 SPL(Sound pressure level)이 70 dB로 측정되었다. 이 순간의 음압은 얼마인가?

(풀이) $SPL = 20\log\left(\dfrac{P}{2\times 10^{-5}}\right)$에서

$$70 = 20\log\left(\frac{P}{2\times 10^{-5}}\right) \qquad \therefore\ P = 0.0632\,\mathrm{Pa}$$

$0.0632\,\mathrm{Pa}$ (답)

1-13 (예제 1.10의 연습) 다음 미분방정식의 해를 구하라.

(a) $\ddot{x} + 4x = 6\sin t$

(풀이) $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$에서, 제차 해는 $x_h(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$로 구해진다.

특수해 $x_p(t) = a\sin t + b\cos t$라 놓자.

$$\ddot{x}_p(t) = -a\sin t - b\cos t$$

이들을 원 식에 대입하면,

$$3a\sin t + 3b\cos t = 6\sin t$$

계수 비교함으로써

$$a = 2, \quad b = 0$$

$x(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + 2\sin t$ (답)

(b) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=t^2+3t$

(풀이) $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$에서, 제차 해는 $x_h(t)=e^{-t}(C_1+C_2t)$로 구해진다.

특수해 $x_p(t)=at^2+bt+c$라 놓자.

$$\dot{x}_p(t)=2at+b$$

$$\ddot{x}_p(t)=2a$$

이들을 원 식에 대입하면,

$$2a+2(2at+b)+(at^2+bt+c)=t^2+3t$$

계수 비교함으로써

$$a=1,\quad b=-1,\quad c=0$$

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}+t^2-t$$

(c) $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=3e^{-2t}$

(풀이) $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$에서, 제차 해는 $x_h(t)=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$로 구해진다.

특수해 $x_p(t)=ae^{-2t}$라 놓자.

$$\dot{x}_p(t)=-2ae^{-2t}$$

$$\ddot{x}_p(t)=4ae^{-2t}$$

이들을 원 식에 대입하면,

$$4a+2\cdot(-2a)+2a=3,\quad \therefore\quad a=\frac{3}{2}$$

$$x(t)=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+\frac{3}{2}e^{-2t}$$ (답)

(d) $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=3e^{-2t}$

(풀이) $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$에서, 제차 해는 $x_h(t)=e^{-2t}(C_1+C_2t)$로 구해진다.

재차항의 근 $\lambda=-2$(중근)과 비제차항의 근이 중첩되었으므로 $x_p(t)=ae^{-2t}$라 둘 수 없으므로, 특수해 $x_p(t)=at^2e^{-2t}$라 놓는다.

$$\dot{x}_p(t)=(2at-2at^2)e^{-2t}$$

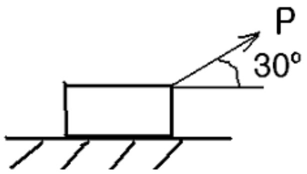
$$\ddot{x}_p(t)=(2a-8at+4at^2)e^{-2t}$$

이들을 원 식에 대입하면,

$$(2a-8at+4at^2)+4\cdot(2at-2at^2)+4\cdot at^2=3,\quad \therefore\quad a=\frac{3}{2}$$

$$x(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t) + \frac{3}{2}t^2 e^{-2t} \quad \text{(답)}$$

1-14 (예제 1.11의 연습) 그림과 같이 정지 상태에 있는 질량 5 kg인 물체를 수평과 30^o의 각도로 20 N의 힘으로 끌 때, 물체의 가속도를 구하라. 단, 수평면과 물체 사이의 마찰은 무시한다.



(풀이) $\sum \mathrm{F} = m\mathrm{a}$에서

x 방향성분: $P\cos30^o = 5a \qquad \therefore \; a = 3.464\ \mathrm{m/s^2}$

$$\mathrm{a} = 3.464\ \mathrm{m/s^2} \rightarrow \quad \text{(답)}$$

(참고) 수직항력을 N이라 할 때,

y 방향성분: $N - mg + P\sin30^o = 0$,

$N - 5\times9.81 + 20\sin30^o = 0, \qquad N = 39.05\ \mathrm{N}$

$N \geqq 0$, 즉 수직항력이 존재하므로 물체는 공중으로 뜨지 않고 지면 위로 끌려간다.