1번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

[1-1] (1) $f'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3)$

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

왼쪽 표를 보면 극댓값의 좌표는 (1, 5) 극솟값은 (3, 1) 이다.
즉 A좌표는 A(1, 5), B좌표는 B(3, 1)
$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (2, 3)$ 이다.

(2) $f''(x) = 6x-12 = 6(x-2)$
변곡점의 x좌표는 2, y좌표는 $f(2)=3$
∴ 변곡점 I 좌표는 (2, 3) 이다.

[1-2] (1) 제시문(나)에 의해 곡선 $y=x^3-6x^2+9x+1$을 x축 방향으로 K, y축 방향으로 L만큼 평행이동 시킨
곡선의 방정식은 $y-L=(x-K)^3-6(x-K)^2+9(x-K)+1$
이때 이 방정식이 $y=x^3+Bx$가 되기 위해서는
x^2의 계수와 상수항이 0이 되야 한다.
x^2의 계수는 $-6-3k=0$ 이므로 $k=-2$ 상수항은 $-k^3-6k^2-9k+1-L=3-L=0$ $L=3$
x의 계수는 $B=3k^2+12k+9=-3$ ∴ $K=-2$, $L=3$, $B=-3$

(2) (1)과 마찬가지로 $y-L=a(x-K)^3+b(x-K)^2+c(x-K)+d$ 에서 x^2 계수와 상수항이 0이 되면 된다.
x^2의 계수는 $b-3ka=0$ 이므로 $K=\frac{b}{3a}$, 상수항은 $-ak^3+bk^2-ck+d+L=0$ $K=\frac{b}{3a}$를 대입하면
$L=-\frac{2b^3}{27a^2}+\frac{bc}{3a}-d$ x 계수는 $B=3ak^2-2bk+c=\frac{b^2}{3a}-\frac{2b^2}{3a}+c=-\frac{b^2}{3a}+c$
∴ $K=\frac{b}{3a}$, $L=-\frac{2b^3}{27a^2}+\frac{bc}{3a}-d$, $B=-\frac{b^2}{3a}+c$

[1-3] (1) [1-2]의 (2)를 이용해 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$를 x축 방향으로 $\frac{b}{3a}$만큼, y축 방향으로 $-\frac{2b^3}{27a^2}+\frac{bc}{3a}-d$만큼
평행이동 시켜 이를 $g(x)$라 하면 $g(x)=ax^3-\left(\frac{b^2}{3a}-c\right)x$
$\frac{b^2}{3a}-c=e$라 하면 $g(x)=ax^3-ex$ $g''(x)=6ax$ $g(x)$의 변곡점은 $(0, g(0))=(0,0)$
(0,0)을 지나는 직선 $y=mx$와 $g(x)$의 교점을 구하면 $ax^3-ex=mx$ $x\{ax^2-(e+m)\}=0$ ($e+m>0$ ∵ 교점이 3개)
두 교점을 P', Q'라 하면 P'는 $\left(-\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}, g\left(-\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}\right)\right)$ Q'는 $\left(\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}, g\left(\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}\right)\right)$ 이다.

또한 $g(x)=ax^3-ex$, $g(-x)=-ax^3+ex$ 이므로 $g(x)+g(-x)=0$
즉 P'Q'의 중점은 $g(x)$의 변곡점 (0,0)이다
이를 다시 평행이동 시킨다면 (x방향으로 $-\frac{b}{3a}$만큼 y방향으로 $\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d$만큼) 점 P, Q, I 모두 P', Q', O점과 같은 방향과 거리만큼 이동한 것이므로
선분 $\overline{PQ}$의 중점은 I 이다.

(2) 선분 $\overline{PI}$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분은 선분 $\overline{P'O}$와 곡선 $y=g(x)$ ... ①
선분 $\overline{IQ}$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분은 선분 $\overline{OQ'}$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분 ②의 넓이와 같다
[1-3](1)에 의해 P'의 x좌표는 $-\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}$, Q'의 x좌표는 $\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}$ 이므로

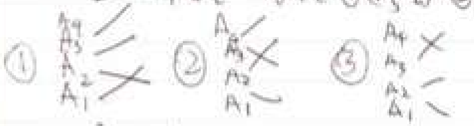
① $=\left|\int_{-\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}}^{0} x\{ax^2-(e+m)\}\,dx\right|$ ② $=\left|\int_{0}^{\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}} x\{ax^2-(e+m)\}\,dx\right|$

① − ② $=\int_{\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}}^{\frac{\sqrt{e+m}}{\sqrt{a}}} x\{ax^2-(e+m)\}\,dx$ $y=g(x)$와 $y=mx$는 [1-3](1)에 의해 $y=g(x)-mx$ 역시 원점 대칭이 되어

모두 원점대칭이므로 ① − ② = 0 ∴ 이를 평행이동시킨 $\overline{PI}$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와 $\overline{IQ}$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.

[2-1] (a) $= {}_nP_m = \frac{n!}{(n-m)!}$ (b) $= {}_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

[2-2] (1) 교점의 개수가 1개이고 두 선분만 교차 해야 되므로 [2-1]의 (b) 상황에서 이웃한 두 $A_k A_{k+1}$ 만 교차하면 되므로 교차될 수 있는 경우는 ①(A_3A_4) ②(A_2A_3) ③(A_1A_2) 3가지 이다.



∴ 총 경우의 수는 ${}_7C_4 \times 3 =$ ~~210~~ 이다. (210)

($\{C_k\}$는 공차가 양수인 등차수열 이므로 ~~[illegible]~~ 공차를 d라 하면 $C_k = C_1 + d(k-1)$ 과 같은 수열 이며 $d>0$이므로 증가한다 ← k값이 커지면)

(2) i) 세개의 선분이 한점에서 만날 때

~~[illegible]~~ 세 선분이 만나는 경우는 ①$A_1A_2A_3$ ② $A_2A_3A_4$ 만 존재한다.

①에서 A_1과 A_2 간격과 A_2A_3 간격 모두 d 이므로 제시문 (나)에 의해 이웃이 선택된 B들이 같은 간격이 면 된다.

△ B_k의 간격이 d일 경우 A_1 선택에 따라 A_2A_3 결정되고 A_1은 B_3 부터 고를 수 있으므로 ${}_6C_2 = 15$

△ 간격이 $2d$일 때 A_1 은 B_4 부터 고를 수 있으므로 ${}_4C_2 = 6$

△ // $3d$ 일 때 A_1은 B_7만 올 수 있으므로 1

① 는 22가지 ② 도 ①과 대칭되는 꼴이므로 22가지 총 44가지

ii) 네개의 선분이 한점에서 만날 때 ~~[illegible]~~ $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$ 이므로 $A_1A_2A_3A_4$ 모두 고른 ~~[illegible]~~ B들의 간격도 모두 같아야 한다.

△ 간격이 d일 때 5가지 △ 간격이 $2d$ 일 때 $(C_1C_3C_5C_7)$, $(C_2C_4C_6C_8)$ 2가지

△ 간격이 $3d$ 이상일 때 A_1이 C_9를 넘어가야 할 경우 ×

총 7가지

∴ i)+ii) = 44 + 7 = 51 가지 이다.

[2-3] (1) A_1을 지나는 선분의 길이가 1 이라면 이 선분은 $\overline{A_1B_1}$ 일것이다. $\overline{A_1B_1}$인 경우는 $A_2 \sim A_5$가 $B_2 - B_5$ 를 고르는 경우 이므로 $4! = 24$ 이다

마찬가지로 $\overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, \overline{A_4B_4}, \overline{A_5B_5}$ 에도 위를 유추하면 각각 $4!$ 가지 나온다.

∴ 600개의 은선 분 중 길이가 1 인 선분의 개수 $= 5 \times 4! = 120$ 이다.

(2) 나올 수 있는 선분 의 길이는 $1, \sqrt{1+d^2}, \sqrt{1+4d^2}, \sqrt{1+9d^2}, \sqrt{1+16d^2}$ 가 있다.

1 인 경우는 (1)에 의해 120개, $\sqrt{1+d^2}$ 인 경우는 $\overline{A_1B_2}, \overline{A_2B_1}, \overline{A_2B_3}, \overline{A_3B_2}, \overline{A_3B_4} \cdots, \overline{A_5B_4}$ 로 총 $1+2\times3+1 = 8$가지

각 경우에 다 $4!$ 개씩 존재하므로 $8 \times 4!$개, $\sqrt{1+4d^2}$ 인 경우는 $\overline{A_1B_3}, \overline{A_2B_4}, \overline{A_3B_5}, \overline{A_3B_1}, \overline{A_4B_2}, \overline{A_5B_3}$ 총 6가지

각 경우는 $4!$ 개씩 $6 \times 4!$개, $\sqrt{1+9d^2}$ 는 $4 \times 4!$, $\sqrt{1+16d^2} = 2 \times 4!$

$L = 120 + 192\sqrt{1+d^2} + 144\sqrt{1+4d^2} + 96\sqrt{1+9d^2} + 48\sqrt{1+16d^2}$

$\therefore \lim_{d\to\infty} \frac{L}{d} = \lim_{d\to\infty} \frac{120}{d} + 192\sqrt{\frac{1}{d^2}+1} + 144\sqrt{\frac{1}{d^2}+4} + 96\sqrt{\frac{1}{d^2}+9} + 48\sqrt{\frac{1}{d^2}+16} = 192 + 2\times144 + 3\times96 + 4\times48$

$= 960$ 이다.