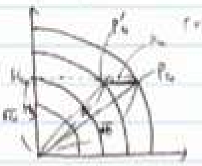
1번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

1-1-1. λ_4를 구하기 위해 그림을 그려보자.



(이때 P_n은 원과의 교점)

넓이 차이는 같이 $\lambda_4 = \overline{P_4P_4'} = \overline{P_4H_4} - \overline{P_4'H_4}$ 이다.

이때 피타고라스 정리에 의해 $\overline{P_4H_4}^2 = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{4})^2$, $\overline{P_4'H_4}^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{4})^2$ 이므로 $\lambda_4 = \sqrt{2} - 1$ 이다.

위의 방법과 동일하게 $\lambda_3 = \overline{P_3H_3} - \overline{P_3'H_3} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 이다.

따라서 이를 반복하면 $\lambda_2 = \sqrt{4} - \sqrt{3}$, $\lambda_1 = \sqrt{5} - \sqrt{4}$ 이므로 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \sqrt{5} - 1$ 이다.

1-1-2. 두 점 P_1, P_2에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, $\angle P_1OH_1 = \theta_1$, $\angle P_2OH_2 = \theta_2$라 하자.

이때 피타고라스 정리에 의해 ~~[illegible]~~ $\overline{H_1O} = \sqrt{3}$, $\overline{H_2O} = \sqrt{2}$ 이므로 $\tan\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta_2 = 1$ 이다.

$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$ 이므로 $\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2\tan\theta_1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \tan\alpha$ 이다.

또 P_3에서 y축에 내린 수선의 발을 H_3라 한다면, $\angle P_3OH_3 = \beta$ 이다.

따라서 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{P_3H_3} = 1$ 이므로 ~~[illegible]~~ $\sin\beta = \frac{1}{2}$ 이니 $\csc\beta = 2$ 이다.

1-1-3. 직선 l_n과 원 C_{n+1}이 만나는 점을 P_{n+1}, C_n과 만나는 점을 P_n이라 할 때 다음 그림과 같은 직각삼각형에 그려진다.

이때 피타고라스 정리에 의해 $y_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 이다.

따라서 $y_n + \frac{1}{y_n} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = 2\sqrt{n}$ 이므로

$2\sqrt{n} \le 20$ 인 $n \le 100$ 을 만족하는 자연수 중 최대 n은 100이다.

1-2-1. R_1이 정사각형이므로 R_1과 $y = 6x^2$이 만나는 한 점은 $(1, 4)$이라 할 수 있다.

이 $y = 6x^2$에 대칭이동 이므로 $f(x) = -x^2$이 된다.

이때 A의 넓이는 $2\int_0^1 f(x) - (-4)\,dx = 2\int_0^1 -x^2 + 4\,dx = \frac{4}{3}$ 이다.

~~[illegible]~~ R_2와 $y = -x^2$이 만나는 다른 한 점을 $(\alpha, -\alpha^2)$이라 하자 $(\alpha > 0)$

이때 B의 넓이를 α에 대해 나타내면 $B = 2\int_0^\alpha f(x) - (-\alpha^2)\,dx - A$

$= 2\int_0^\alpha -x^2 + \alpha^2\,dx - \frac{4}{3}$

$= \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3}$ 이다.

$A = B$ 이므로 $\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3}$ 즉 $\alpha = 2^{\frac{1}{3}}$. 따라서 ~~[illegible]~~ R_2는 가로가 $2 \times 2^{\frac{1}{3}}$, 세로가 ~~[illegible]~~ $2 \times 2^{\frac{2}{3}}$ 인 직사각형이므로

R_2의 넓이는 $4 \times 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 8$

1-2-2. $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ 이고, $f''(x) = -2\cos 2x$ 이다.

따라서 $f''(x) = 0$ 이 되는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서의 점에서 $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 를 갖는다.

따라서 $f(x)$의 변곡점은 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ 이다.

이때 A의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos^2 x + \frac{1}{2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2}\,dx$ (∵ 삼각함수의 반각공식에 의하여 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$)

$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2}\,dx = 2\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} = A$.

$B = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - (-1)\,dx - A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx - A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - A = 2\left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

$\therefore A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

1-2-3. 제시문 (나)에서 $g(a)$를 구하는 방식대로 $g(a)$를 구해보면 다음과 같다.

$g(a) = 2\left(|a f(a)| - \int_0^a |f(x)|\,dx\right)$. 이때 $f(x) \le 0$ 이고, a는 대칭성에 의해 같이 구하므로 $a > 0$ 이다.

따라서 $g(a) = 2\left(-a f(a) + \int_0^a f(x)\,dx\right)$ 이므로 양변을 a에 대해서 미분하면 $g'(a) = 2\left(-f(a) - a f'(a) + f(a)\right)$ 를 얻는다.

이때 $a > 0$ 이므로 양변을 a에 대해서 나누면 $\frac{g'(a)}{a} = -2f'(a)$ …①

$y = f(x)$는 이계도함수이므로 $\lim_{a\to 0} f'(a) = f'\left(\lim_{a\to 0} a\right)$ 가 성립하므로 ① 의 식에 양변에 극한을 취해주면 다음과 같다.

$\lim_{a\to 0} \frac{g'(a)}{a} = \lim_{a\to 0} -2f'(a) = -2f'\left(\lim_{a\to 0} a\right) = -2f'(0)$. 이때 $y = f(x)$는 원점을 지나고 y축 대칭이므로 $f'(0) = 0$. $\therefore \lim_{a\to 0} \frac{g'(a)}{a} = 0$

2번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

2-1-1. 아주가 점 D를 거치지 않기 위해서는 같은 색의 공을 연속하여 2번 뽑아야 한다.
이때 5번 시행했을 때 ~~[illegible]~~ 같은 색의 공을 연속으로 2번 뽑는 시행 후 아주는 점 A에 위치하므로 [illegible] 다음에 뽑아도 A에 위치할 수 없다.
따라서 $p=0$.
아주가 흰공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{5}$, 검은공을 뽑을 확률은 $\frac{3}{5}$ 이므로 흰색 2번 연속으로 뽑을 확률 $= \frac{4}{25}$, 검은색 연속 2번으로 뽑을 확률 $= \frac{9}{25}$ 이다.
~~[illegible]~~ 따라서 같은 연속으로 2번 뽑는 시행을 3번 했을 때 흰공을 m번 2번 연속 뽑는 확률은 ${}_3C_m \times \left(\frac{4}{25}\right)^m \times \left(\frac{9}{25}\right)^{3-m}$ 이므로
아주가 A점에 위치할 확률 $= \sum_{m=0}^{3} {}_3C_m \left(\frac{4}{25}\right)^m \left(\frac{9}{25}\right)^{3-m} = \left(\frac{4}{25}+\frac{9}{25}\right)^3 = \left(\frac{13}{25}\right)^3$

2-1-2. 2n번의 시행중 D를 안 지날 때 같은 색의 공을 2번 연속 뽑는 시행을 n번 해야 하므로 (2-1-1)과 비슷한 방법으로 k번 시행했을 때의 확률은 (흰-흰이 k번일) ${}_nC_k \left(\frac{4}{25}\right)^k \left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}$이다.
이때 점 C를 지나가기 위해 흰공 2개 연속으로 2번 뽑아야 하므로 ${}_nC_k \left(\frac{4}{25}\right)^k \left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}$이다.
따라서 ~~[illegible]~~ 이때의 기댓값은 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times 2^k \times \left(\frac{4}{25}\right)^k \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{8}{25}\right)^k \left(\frac{9}{25}\right)^{n-k} = \left(\frac{17}{25}\right)^n$.
2n번의 시행 중 D를 지날때의 확률 = 1-(D를 안지날때의 확률)이다.
따라서 D를 지날때 얻는 기댓값 $= 0 \times (1-(\text{D를 안지날때의 확률})) = 0$
따라서 아주가 얻을 수 있는 상금의 기댓값은 $\left(\frac{17}{25}\right)^n$ 이다.
이때 분산 $= E(X^2) - (E(X))^2$ 이므로
$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} 4^k \left(\frac{4}{25}\right)^k \left(\frac{9}{25}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{16}{25}\right)^k \left(\frac{9}{25}\right)^{n-k} = \left(\frac{25}{25}\right)^n = 1$
$(E(X))^2 = \left(\frac{17}{25}\right)^{2n}$ 이므로 분산 $= 1 - \left(\frac{17}{25}\right)^{2n}$ 이다.

2-2-1. 두리가 흰공을 뽑을 확률 $= \frac{1}{6}$, 검은 공 흰색 공 뽑을 확률 $= \frac{5}{6}$ 이다.
따라서 두리가 흰공을 n-4번 뽑을 확률 $= {}_nC_4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-4} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = {}_nC_4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 5^4$
n-3번 뽑을 확률 $=$ ~~[illegible]~~ ${}_nC_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 5^3$
n-2번 뽑을 확률 $= {}_nC_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 5^2$
n-1번 뽑을 확률 $= {}_nC_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 5$
n번 뽑을 확률 $= {}_nC_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 1$
따라서 P_n의 정의 ~~[illegible]~~ 구한 확률들의 합이므로 $\frac{1}{n^4}\left(6^n P_n\right) =$ ~~[illegible]~~ $\frac{1}{n^4}\left(\sum_{k=0}^{4} 5^k {}_nC_k\right)$ 이다.
따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(6^n P_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \times 5^4 \times {}_nC_4 + 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \times n(n-1)(n-2)(n-3) \times \frac{1}{4\times3\times2\times1} \times 5^4 = \frac{625}{24}$.

2-2-2. n번째에 처음 원점으로 이동할 확률은 n-1번째까지 검은공 또는 흰공을 뽑고 n번째에 흰공을 뽑을 확률과 같다.
~~[illegible]~~ 이때 흰공을 뽑을 확률 $= \frac{2}{6}$, 검은공 또는 [illegible] 뽑을 확률 $= \frac{4}{6}$ 이므로
$q_n = \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \times \frac{2}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$
$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=3}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \times \left(\frac{4}{27}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{m-2}\right)\right) = \frac{4}{9}$

2-2-3. k번째에 점 C에 ~~[illegible]~~ 위치할 경우의 수를 C_k
k번째에 점 B에 위치할 경우의 수를 B_k
k번째에 점 D에 위치할 확률은 D_k라 하면, ~~[illegible]~~ B, C, D 점에서 A로 이동하여 얻는 경우는 각각 2가지씩 있다.
따라서 [illegible] A에 위치하지 않을 경우의 수는 ~~[illegible]~~ $3\times2^{k-1}$가지이다.
이때 [illegible] 2번 이후 이동해야 하므로 ~~[illegible]~~