한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

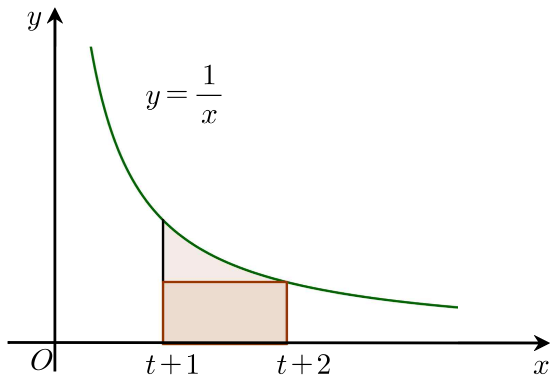
오후(2)-1번

1. 양의 실수 t에 대하여

$$\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)=\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx$$

이다. 이때 함수 $\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}$는 구간 $[t+1, t+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에

적분값은 0보다 작다. 즉 $\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx<0$ 이다.

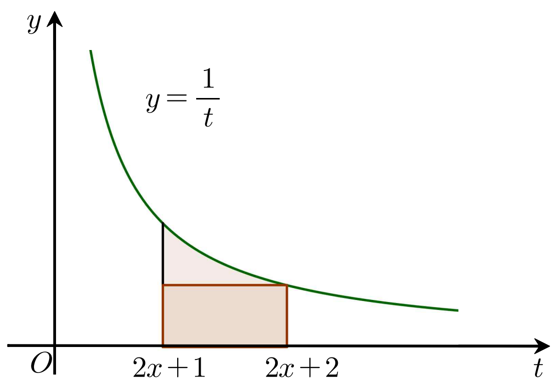


2. 함수 $f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$의 양변에 로그를 취하면,

$$\ln f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\}$$

이다. 양변을 미분하면,

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\\&=\frac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\\&=\int_{2x+1}^{2x+2}\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{t}\right)dt\end{aligned}$$



위의 식에서 피적분 함수 $h(t)=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{t}$는

구간 $[2x+1, 2x+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에,

$\frac{f'(x)}{f(x)}<0$을 얻는다. 그리고 실수 $x\ge 0$에 대하여 $f(x)>0$이므로,

$f'(x)<0$이다. 즉, $f(x)$는 감소함수이다.

따라서 $f(x)\le f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로, 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

3. $x\ge 0$에 대하여 $g(x)=\ln f(x)$라 하자. 양변을 x에 대하여 미분하면,

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2) \quad \text{-------} \quad ①$$

이다. 다시 ①의 양변을 미분하면,

$$g''(x)=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

이다. 이때, 실수 $x\ge 0$에 대하여 $f(x)>0$이므로,

$f''(x)f(x)>[f(x)]^2$이기 위한 필요충분조건은 $g''(x)>0$이다.

$$g''(x)=-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+1}\left(1+\frac{1}{2(x+1)}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+\frac{1}{2}} > \frac{1}{x+1}\left(1+\frac{1}{2(x+1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > (x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2}) \quad \text{-------} \ ②$$

모든 실수 $x \geq 0$에 대하여 부등식 ②가 성립하므로,
부등식 $f''(x)f(x) > \{f'(x)\}^2$ 이 성립한다.

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

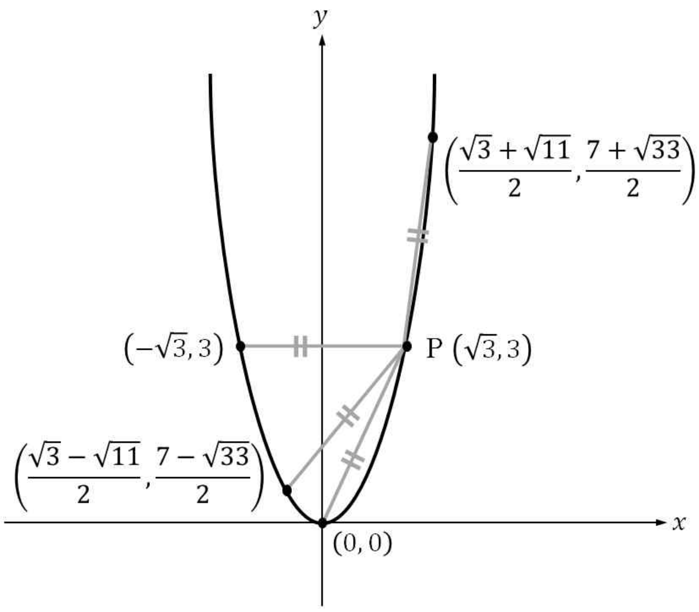
1.

포물선 A의 한 점을 $\mathrm{Q}\left(x,x^2\right)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(x^2-3)^2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$이면 $(x-\sqrt{3})^2+(x^2-3)^2=12$이고, 이를 정리하면 $x(x+\sqrt{3})\left(x-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}\right)=0$

이므로, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$인 A의 점 Q는 모두 4개이고 각각의 좌표는

$(0,0)$, $(-\sqrt{3},3)$, $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2},\frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2},\frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)$ 이다. (아래 그림 참조.)



2.

점 $\mathrm{P}\left(a,a^2\right)$와 포물선 A의 임의의 점 $\mathrm{Q}\left(x,x^2\right)$와의 거리는 $\sqrt{(x-a)^2+(x^2-a^2)^2}$ 이다.

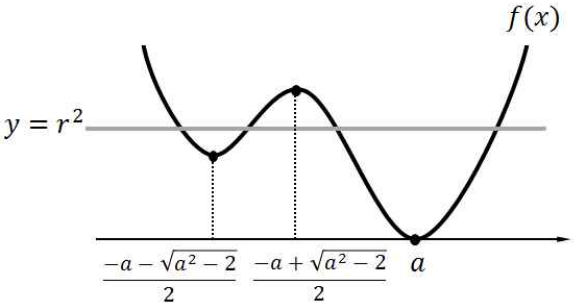
$f(x)=(x-a)^2+(x^2-a^2)^2$이라 하면, 양의 실수 r에 대해, 점 P와 거리 r인 A의 점들의 개수는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=r^2$의 교점의 개수와 일치한다.

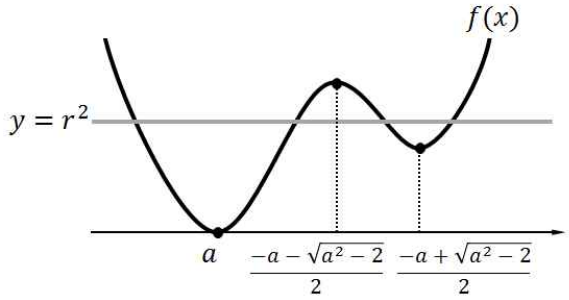
곡선 $y=f(x)$의 개형을 알아보기 위해 $f'(x)=0$의 실근의 개수를 구해보자.

$f'(x)=2(x-a)+2(x^2-a^2)2x=2(x-a)(2x^2+2ax+1)$이므로, $2x^2+2ax+1$의 판별식 $\mathrm{D}/4=a^2-2$에 대하여

① $\mathrm{D}/4>0$ (즉, $a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$) 이면, $f'(x)=0$의 실근은 $a, \frac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}, \frac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}$ 이다.

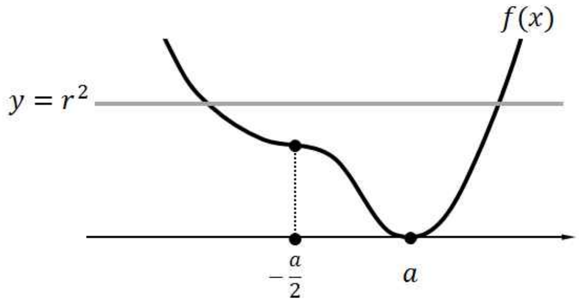
따라서 $f(x)$의 그래프는 다음 중 하나이다.

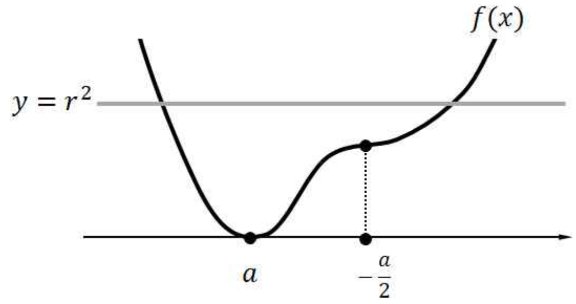




이고, 이 경우 양의 실수 r에 대해 $y=f(x)$와 $y=r^2$의 교점은 최대 4개 이므로 $N_{\mathrm{P}}=4$이다.

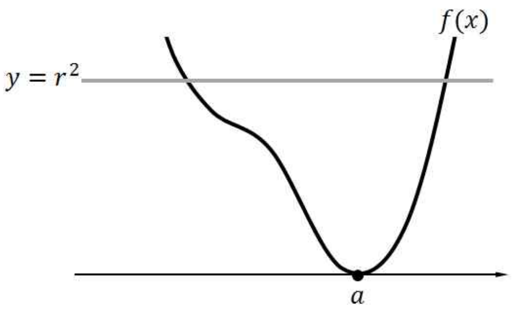
② D/4 $=0$ (즉, $a=\pm\sqrt{2}$) 이면, $f'(x)=0$의 실근은 $a, -\dfrac{a}{2}$이다. 따라서 $f(x)$의 그래프는 다음 중 하나이다

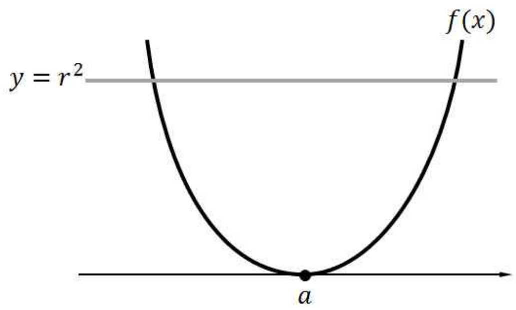


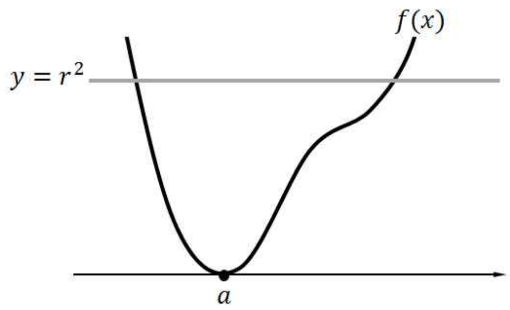


이고 이 경우 양의 실수 r에 대해 $y=f(x)$와 $y=r^2$의 교점은 항상 2개 이므로 $N_{\mathrm{P}}=2$이다.

③ D/4 <0 (즉, $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$)이면, $f'(x)=0$의 실근은 a 뿐이다. 따라서 $f(x)$의 그래프는 다음 중 하나이다.







이고 이 경우 역시 양의 실수 r에 대해 $y=f(x)$와 $y=r^2$의 교점은 항상 2개 이므로 $N_{\mathrm{P}}=2$이다.

②, ③의 경우에만 $N_{\mathrm{P}}=2$ 이므로, 구하는 a값의 범위는 $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$이다.

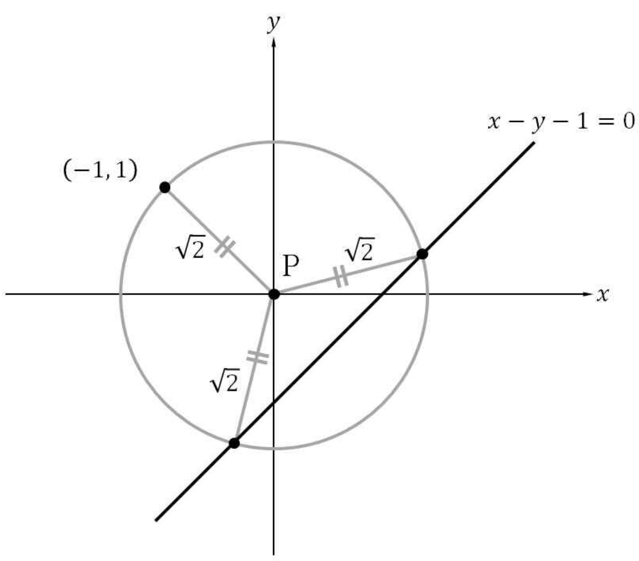
3.

$x^3-3xy-y^3-1 = x^3-y^3-3xy-1 = (x-y)^3+3xy(x-y)-3xy-1 = (x-y)^3-1+3xy(x-y-1)$

$=(x-y-1)\left((x-y)^2+(x-y)+1\right)+3xy(x-y-1) = (x-y-1)\left(x^2-2xy+y^2+x-y+1+3xy\right)$

$=\dfrac{1}{2}(x-y-1)\left(x^2+2xy+y^2+x^2+2x+1+y^2-2y+1\right) = \dfrac{1}{2}(x-y-1)\left((x+y)^2+(x+1)^2+(y-1)^2\right)$

이므로 집합 A는 직선 $x-y-1=0$과 한 점 $(-1,1)$로 이루어져 있다.



위 그림으로부터 점 P에 대한 집합 A의 N_{P}는 3이고 이때 반지름 r은 $\sqrt{2}$이다.