한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

상 경 계	**논 술 예 시 답 안**	2번

두 점 P,Q의 시각에 따른 위치는 $p(t)=-\frac{t^4}{4}+\frac{4}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2,\ q(t)=\frac{b}{3}t^4+2t^3+at^2$ 이다.

두 점 P,Q의 속도는 $p'(t)=-t^3+4t^2+at,\ q'(t)=\frac{4b}{3}t^3+6t^2+2at$ 이다.

두 점 P,Q의 가속도는 $p''(t)=-3t^2+8t+a,\ q''(t)=4bt^2+12t+2a$ 이다.

1. $a=-\frac{7}{6}, b=-1$ 일 때 $p(t)=t^2(-\frac{t^2}{4}+\frac{4}{3}t-\frac{7}{12})$ 이고 $q(t)=t^2(-\frac{1}{3}t^2+2t-\frac{7}{6})$ 이므로 만나는 조건은

$(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4})t^2+\frac{2}{3}t-\frac{7}{12}=0$ 이고 $t^2-8t+7=0$ 이므로 그 시각은 $t=1, 7$ 이다.

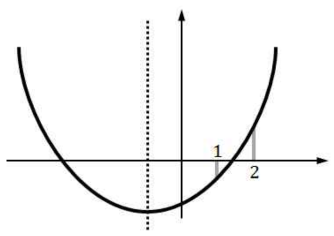
점 P,Q의 속도는 $p'(t)=-t^3+4t^2-\frac{7}{6}t,\ q'(t)=-\frac{4}{3}t^3+6t^2-\frac{7}{3}t$ 이므로

$t=1$ 일 때 점 P의 속도는 $p'(1)=-1+4-\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$ 이고 점 Q의 속도는 $q'(1)=-\frac{4}{3}+6-\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$ 이다.

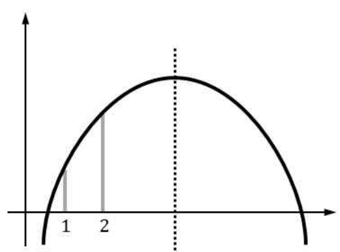
$t=7$ 일 때 점 P의 속도는 $p'(7)=-343+196-\frac{49}{6}=-\frac{931}{6}$ 이고 점 Q의 속도는 $q'(7)=-\frac{1372}{3}+294-\frac{49}{3}=-\frac{539}{3}$ 이다.

2. 구간 [1,2]에서 두 점 P, Q의 가속도의 차이가 2 미만이려면 $-2<4bt^2+12t+2a-(-3t^2+8t+a)<2$ 이어야한다.

$f(t)=(4b+3)t^2+4t+a$ 라 두자. $f(t)$ 의 그래프의 축은 $t=-\frac{2}{4b+3}$ 이다.



㉠ $4b+3>0$ 일 때 구간 [1,2]에서 $f(t)$ 는 증가함수이므로 $f(1)=4b+7+a>-2$ 이고 $f(2)=16b+20+a<2$ 이어야 한다.
$a>-4b-9,\ a<-16b-18$ 이므로 $-4b-9<-16b-18$ 에서 $12b+9<0$인데, $4b+3>0$ 을 만족하지 않으므로 a, b 는 존재하지 않는다.



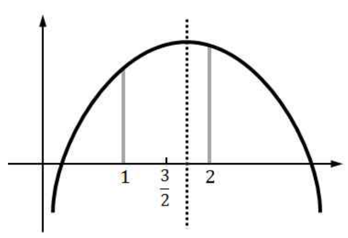
㉡ $4b+3<0$ 이고 $-\frac{2}{4b+3}\ge 2$ 일 때, 즉 $-1\le 4b+3<0$ 일 때

구간 [1,2]에서 $f(t)$ 는 증가함수이므로 $f(1)=4b+7+a>-2$ 이고

$f(2)=16b+20+a<2$ 이어야 한다.

따라서 $-1\le 4b+3<0,\ 4b+a>-9,\ 16b+a<-18$ 을 만족하는 a, b 이면

구간 [1,2]에서 P,Q의 가속도의 차이가 2 미만이다.



㉢ $4b+3<0$ 이고 $\frac{3}{2}<-\frac{2}{4b+3}<2$ 일 때, 즉 $-\frac{4}{3}<4b+3<-1$ 일 때 $f(1)<f(2)$이므로

$f(-\frac{2}{4b+3})=-\frac{4}{4b+3}+a<2$ 이고 $f(1)=4b+7+a>-2$ 이어야 한다.

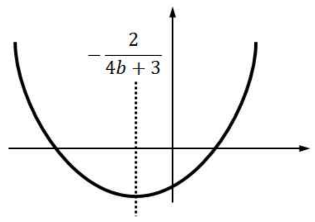
따라서 $-\frac{13}{12}<b<-1,\ -\frac{4}{4b+3}+a<2,\ 4b+a>-9$ 을 만족하는 a, b 이면

구간 [1,2]에서 P,Q의 가속도의 차이가 2 미만이다.

3. $p''(t) = -3t^2 + 8t + a$, $q''(t) = 4bt^2 + 12t + 2a$이므로 출발 후 두 점의 가속도가 같아지는 순간이 존재할 조건은 t에 대한 방정식 $(4b+3)t^2 + 4t + a = 0$의 양수해가 존재하기 위한 조건과 같다.

따라서 함수 $f(t) = (4b+3)t^2 + 4t + a$를 생각하자.

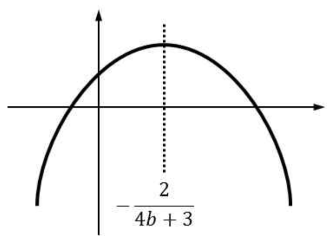
㉠ $4b+3 > 0$일 때 $y = f(t)$의 그래프의 중심축이 $t = -\dfrac{2}{4b+3} < 0$이므로



$f(0) < 0$이면 양수해가 존재한다.

$\therefore a < 0$이고 이때 양수해는 $t = \dfrac{-2 + \sqrt{4 - a(4b+3)}}{4b+3}$이다.

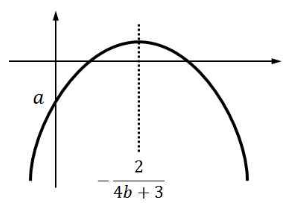
㉡ $4b+3 < 0$일 때 $y = f(t)$의 그래프의 중심축이 $t = -\dfrac{2}{4b+3} > 0$이므로



실근을 가지면 양수해가 존재한다.

$\therefore 4 - a(4b+3) \geq 0$ 이다. 즉 $\dfrac{4}{4b+3} \leq a$이다.

(i) $\dfrac{4}{4b+3} \leq a < 0$일 때 $t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - a(4b+3)}}{4b+3}$이다.



(ii) $0 \leq a$일 때 $t = \dfrac{-2 - \sqrt{4 - a(4b+3)}}{4b+3}$이다.