

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	②	3	①	4	④	5	④
6	③	7	②	8	⑤	9	④	10	⑤
11	①	12	①	13	①	14	③	15	⑤
16	⑤	17	③	18	④	19	①	20	②
21	⑤	22	81	23	13	24	9	25	7
26	52	27	56	28	35	29	17	30	5

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$(3^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}} = 3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\frac{\log_4 64}{\log_4 8} = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2$$

3. [출제의도] 부채꼴의 넓이 계산하기

부채꼴의 넓이를 S , 중심각의 크기를 θ , 반지름의 길이를 r 라 하면 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{12}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

방정식 $2\sin x - 1 = 0$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 이므로

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $2\sin x - 1 = 0$ 의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 이다.

5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log 619 = \log(6.19 \times 10^2) = \log 6.19 + 2$
이고 상용로그표에서 $\log 6.19 = 0.7917$ 이므로 $\log 619 = 2.7917$ 이다.

수	...	7	8	9
5.97760	.7767	.7774
6.07832	.7839	.7846
6.17903	.7910	.7917

6. [출제의도] 코사인법칙 이해하기

코사인법칙에 의해 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A$
 $= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \frac{5}{9} = 25$
이므로 $\overline{BC} = 5$ 이다.

7. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y = 2^{x+a} + b$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y = 3$ 이므로 $b = 3$ 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(0, 5)$ 를 지나므로 $5 = 2^{0+a} + 3$ 에서 $a = 1$ 이다. 따라서 $a + b = 4$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \log_2 x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수는 $y = \log_2(x-a) + 1$ 이고
함수 $y = \log_2(x-a) + 1$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에

대하여 대칭이동한 그래프를 나타낸 함수는 $y = 2^{x-1} + a$ 이다. 따라서 $a = 5$

9. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 합숫값 계산하기

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이고 $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$
 이다.

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

$$\text{따라서 } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = a\sin bx + c$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$ 에서 $b = \frac{1}{2}$

함수 $y = a\sin \frac{x}{2} + c$ 의 그래프가 점 $(\pi, 5)$ 를 지나므로 $5 = a\sin \frac{\pi}{2} + c$ 에서 $5 = a + c$... ①

함수 $y = a\sin \frac{x}{2} + c$ 의 그래프가 점 $(3\pi, 1)$ 을

지나므로 $1 = a\sin \frac{3\pi}{2} + c$ 에서 $1 = -a + c$... ②

①과 ②를 연립하면 $a = 2, c = 3$ 이 되어

$$a \times b \times c = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 = 3$$
 이다.

11. [출제의도] 사인법칙 이해하기

삼각형의 세 각 A, B, C 에 대응하는 선분의 길이를 각각 a, b, c 라 하자. $A + B + C = \pi$ 이므로 $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$ 이다.

$$\text{사인법칙에 의해 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 8$$

$$\begin{aligned} \text{이므로} \\ \sin A + \sin B + \sin(A+B) \\ = \sin A + \sin B + \sin C \\ = \frac{a+b+c}{8} \\ = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

12. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = 3^{x-2} + a$ 의 역함수의 그래프가 점 $(a+5, a+2)$ 를 지나므로 $f(a+2) = a+5$ 이다. $3^{a+2-2} + a = a+5$ 에서 $3^a = 5$ 이다.

13. [출제의도] 지수부등식 이해하기

(i) $2^x - 8 \geq 0$ 이고 $3^{-x} - 9 \geq 0$ 일 때 $2^x \geq 8$ 에서 $x \geq 3$ 이고 $3^{-x} \geq 9$ 에서 $x \leq -2$ 이다. 이를 만족시키는 정수 x 는 존재하지 않는다.

(ii) $2^x - 8 \leq 0$ 이고 $3^{-x} - 9 \leq 0$ 일 때 $2^x \leq 8$ 에서 $x \leq 3$ 이고 $3^{-x} \leq 9$ 에서 $x \geq -2$ 이므로 $-2 \leq x \leq 3$ 이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 정수 x 의 개수는 6 이다.

14. [출제의도] 거듭제곱근의 성질 이해하기

$\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m \times n = 5^{\frac{m}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}} \times n = 5^2 \times 2^2$ 에서 $\frac{m}{6}$ 과 $\frac{m}{4}$ 이 자연수가 되어야 하므로 m 은 12의 배수이다.

(i) $m = 12$ 일 때 $5^{\frac{12}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}} \times n = 5^2 \times 2^2$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times n = 2^2$ 이므로 $n = 32$ 이다.

(ii) $m \geq 24$ 일 때

$$5^{\frac{m}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}} \times n = 5^2 \times 5^{\frac{m-12}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}} \times n = 5^2 \times 2^2$$

에서 $5^{\frac{m-12}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}} \times n = 2^2$ 이고

$5^{\frac{m-12}{6}} \times n = 2^{\frac{m+8}{4}}$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $m = 12, n = 32$ 이므로 $m+n = 44$ 이다.

15. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$f(0) = a\cos 0 + a = 2a$ 이므로 점 A의 좌표는

$(0, 2a)$ 이다. $-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 직선 $y = \frac{a}{2}$ 와

함수 $y = a\cos \frac{2}{3}x + a$ 의 그래프가 만나는 두 점의

x 좌표는 방정식 $a\cos \frac{2}{3}x + a = \frac{a}{2}$ 의 실근과 같다.

$$a\cos \frac{2}{3}x + a = \frac{a}{2}, \cos \frac{2}{3}x = -\frac{1}{2}$$
 에서

$x = -\pi$ 또는 $x = \pi$ 이므로 점 B와 C의 좌표는

각각 $(-\pi, \frac{a}{2}), (\pi, \frac{a}{2})$ 이다.

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$$\overline{AC} \times \sin \frac{\pi}{3} = 2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}a$$

$$\text{따라서 } a = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 추론하기

ㄱ. $t = 1$ 일 때, P(2, 1), Q(4, 1) 이므로

$$S(1) = \frac{1}{2} \times (4-2) \times 1 = 1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $t = 2$ 일 때, P(4, 2), Q(16, 2) 이므로

$$S(2) = \frac{1}{2} \times (16-4) \times 2 = 12$$

$t = -2$ 일 때, P($\frac{1}{4}, -2$), Q($\frac{1}{16}, -2$) 이므로

$$S(-2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \times 2 = \frac{3}{16}$$

따라서 $S(2) = 64 \times S(-2)$ (참)

ㄷ. 0이 아닌 모든 실수 t 에 대하여

P($2^t, t$), Q($4^t, t$) 이다. $t > 0$ 일 때 $2^t < 4^t$ 이므로

$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times (4^t - 2^t) = \frac{t}{2}(4^t - 2^t)$$

$$S(-t) = -\frac{t}{2}(4^{-t} - 2^{-t})$$

$$\text{따라서 } \frac{S(t)}{S(-t)} = \frac{4^t - 2^t}{2^{-t} - 4^{-t}} = \frac{2^t(2^t - 1)}{4^{-t}(2^t - 1)} = 8^t$$

이므로, t 의 값이 증가하면 $\frac{S(t)}{S(-t)}$ 의 값도 증가한다. (참)

17. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

점 P(t, \sqrt{t}) ($t > 0$)에 대하여 $\overline{OP} = \sqrt{t^2 + t}$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2 + t}}, \cos\theta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + t}}$$
 이다.

$$\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = \frac{t^2}{t^2 + t} - \frac{2t}{t^2 + t} = -1$$
 에서

$$t^2 - 2t = -t^2 - t, t(2t - 1) = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$ 이고 점 P는 P($\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$) 이다.

$$\text{따라서 } \overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

18. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

두 직선 $y=k$, $y=2k$ 와 곡선 $y=2^{x+1}$ 이 만나는 점을 각각 구하면 $2^{x+1}=k$ 에서 $x=\log_2 k-1$ 이고 $2^{x+1}=2k$ 에서 $x=\log_2 k$ 이므로 점 D, F의 좌표는 각각 $(\log_2 k-1, k)$, $(\log_2 k, 2k)$ 이다.
두 곡선 $y=2^{x+1}$ 과 $y=2^{-x+1}$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 점 E, G의 좌표는 각각 $(1-\log_2 k, k)$, $(-\log_2 k, 2k)$ 이다.
삼각형 CFG의 넓이는 $\frac{1}{2}\{\log_2 k - (-\log_2 k)\} \times (2k-2) = 2(k-1)\log_2 k$ 이고 사각형 ABED의 넓이는 $\frac{1}{2}\{[1-\log_2 k - (\log_2 k-1)]+2\} \times (k-1) = (2-\log_2 k)(k-1)$ 이다. $1 < k < 2$ 이고 삼각형 CFG의 넓이와 사각형 ABED의 넓이가 같으므로 $2(k-1)\log_2 k = (2-\log_2 k)(k-1)$
 $2\log_2 k = 2 - \log_2 k$
 $\log_2 k = \frac{2}{3}$ 이다. 따라서 $k=2^{\frac{2}{3}}$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 넓이 추론하기

$\angle CAB = \theta$ 이므로 $\angle COB = 2\theta$ 이다. 삼각형 POB가 이등변삼각형이고 $\angle OQB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 Q는 선분 PB의 중점이고 $\angle POQ = 2\theta$ 이다. 선분 PO와 선분 QD가 평행하므로 삼각형 POB와 삼각형 QDB는 닮음이다. 따라서 $\overline{QD} = \frac{1}{2}$ 이고 $\angle QDB = 4\theta$ 이므로 $S(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sin(4\theta)$ 이다. $\overline{CQ} = \overline{CO} - \overline{OQ}$ 이므로 $T(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CQ} = \sin 2\theta \times (2 - \sqrt{2}\cos 2\theta)$ 이다. $p=1$, $f(\theta)=4\theta$, $g(\theta)=2\cos 2\theta$ 이므로 $p \times f\left(\frac{\pi}{16}\right) \times g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \times \frac{\pi}{4} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 최댓값을 구하는 문제 해결하기

조건 (나)에서 $\log_a b = \frac{n}{m}$ (m 과 n 은 서로소인 자연수)라 하면 $b = a^{\frac{n}{m}}$ 이다.
 $\log a < \frac{3}{2}$ 에서 $a < 10^{\frac{3}{2}}$ 이고, 조건 (가)에서 $1 < a < a^{\frac{n}{m}} < a^2 < 1000$ 이다.
(i) $m=1$ 일 때, $1 < a < a^n < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.
(ii) $m=2$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{2}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 3이고, a, b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{3}{2}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(4, 8), (9, 27), (16, 64), (25, 125)$ 이다.
(iii) $m=3$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{3}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 4, 5이다.
① $m=3, n=4$ 일 때, a, b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{4}{3}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(8, 16), (27, 81)$ 이다.
② $m=3, n=5$ 일 때, a, b 는 자연수이므로 $1 < a < a^{\frac{5}{3}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(8, 32), (27, 243)$ 이다.

(iv) $m=4$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{4}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 은 5, 7이다.

① $m=4, n=5$ 일 때, a, b 는 자연수이므로

$1 < a < a^{\frac{5}{4}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(16, 32)$ 이다.

② $m=4, n=7$ 일 때, a, b 는 자연수이므로

$1 < a < a^{\frac{7}{4}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(16, 128)$ 이다.

(v) $m \geq 5$ 일 때, $1 < a < a^{\frac{n}{m}} < a^2 < 1000$ 에서

$a^{\frac{n}{m}}$ 이 자연수이므로 $a \geq 2^5$ 이고 $a^2 \geq 2^{10} = 1024$ 이다.

그러므로 $1 < a < a^{\frac{n}{m}} < a^2 < 1000$ 을 만족시키는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

따라서 (i)~(v)에서 $a+b$ 의 최댓값은 $27+243=270$ 이다.

[다른 풀이]

$\log a < \frac{3}{2}$ 에서 $a^2 < 10^3, 1 < a < b < a^2 < 10^3$

$\log_a b = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수), $a^n = b^m$ 에서 $a = c^m, b = c^n$ (c 는 2 이상의 자연수)라 하자.

$a^2 < 1000$ 이므로 $1 < c^m < c^n < c^{2m} < 1000, m=2, 3, 4$ 이다.

(i) $m=2$ 일 때, $n=3$ 이고 $c=2, 3, 4, 5$ 이므로 $a+b = c^m + c^n \leq 5^2 + 5^3 = 150$

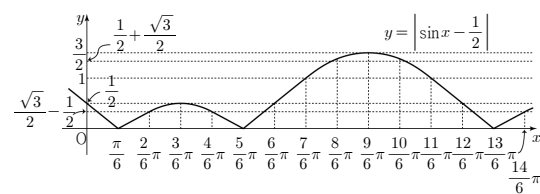
(ii) $m=3$ 일 때, $n=4, 5$ 이고 $c=2, 3$ 이므로 $a+b = c^m + c^n \leq 3^3 + 3^5 = 270$

(iii) $m=4$ 일 때, $n=5, 7$ 이고 $c=2$ 이므로 $a+b = c^m + c^n \leq 2^4 + 2^7 = 144$

(iv) $m \geq 5$ 일 때, $c^{2m} < 1000$ 인 자연수 c 가 존재하지 않으므로 (가)와 (나)를 만족시키는 자연수 a 와 b 는 존재하지 않는다.

따라서 (i)~(iv)에서 $a+b$ 의 최댓값은 270이다.

21. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 최댓값 추론하기



함수 $y=f(x)$ 의 주기는 2π 이다.

$n=1$ 일 때, $0 \leq x \leq \frac{3}{6}\pi$ 에서 $g(1) = \frac{1}{2}$ 이다.

$n=2$ 일 때, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{4}{6}\pi$ 에서 $g(2) = \frac{1}{2}$ 이다.

$n=3$ 일 때, $\frac{2}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 에서 $g(3) = \frac{1}{2}$ 이다.

$n=4$ 일 때, $\frac{3}{6}\pi \leq x \leq \frac{6}{6}\pi$ 에서 $g(4) = \frac{1}{2}$ 이다.

$n=5$ 일 때, $\frac{4}{6}\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi$ 에서 $g(5) = 1$ 이다.

$n=6$ 일 때, $\frac{5}{6}\pi \leq x \leq \frac{8}{6}\pi$ 에서

$g(6) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$n=7$ 일 때, $\frac{6}{6}\pi \leq x \leq \frac{9}{6}\pi$ 에서 $g(7) = \frac{3}{2}$ 이다.

$n=8$ 일 때, $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{10}{6}\pi$ 에서 $g(8) = \frac{3}{2}$ 이다.

$n=9$ 일 때, $\frac{8}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$ 에서 $g(9) = \frac{3}{2}$ 이다.

$n=10$ 일 때, $\frac{9}{6}\pi \leq x \leq \frac{12}{6}\pi$ 에서 $g(10) = \frac{3}{2}$ 이다.

$n=11$ 일 때, $\frac{10}{6}\pi \leq x \leq \frac{13}{6}\pi$ 에서

$g(11) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$n=12$ 일 때, $\frac{11}{6}\pi \leq x \leq \frac{14}{6}\pi$ 에서 $g(12) = 1$ 이다.

따라서 $1 \leq n \leq 12$ 에서 $g(n)$ 이 무리수인 n 은 6, 11이다. 함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이므로 자연수 m 에 대하여

$$\frac{n-1}{6}\pi \leq x \leq \frac{n+2}{6}\pi \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{n-1}{6}\pi + 2m\pi \leq x \leq \frac{n+2}{6}\pi + 2m\pi,$$

$$\frac{n+12m-1}{6}\pi \leq x \leq \frac{n+12m+2}{6}\pi \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $f(x)$ 의 최댓값은 서로 같다.

따라서 $g(n) = g(n+12m)$ 이다.

$g(6) = g(18) = g(30), g(11) = g(23) = g(35)$ 이므로 40 이하의 자연수 k 에 대하여 $g(k)$ 가 무리수가 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은 $6+11+18+23+30+35 = 123$ 이다.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$$\sqrt[3]{27^2} \times 3^2 = 27^{\frac{2}{3}} \times 3^2 = (3^3)^{\frac{2}{3}} \times 3^2 = 3^2 \times 3^2 = 81$$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

진수 조건에 의해 $x > -3$ 이고

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) = -4 \text{에서 } x+3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \text{이므로 } x = 13 \text{이다.}$$

24. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 주기 이해하기

함수 $y = \cos \frac{2}{3}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

함수 $y = \tan \frac{3}{a}x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{3}{a}} = \frac{a\pi}{3}$

두 함수의 주기가 같으므로 $3\pi = \frac{a\pi}{3}$

따라서 $a = 9$

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = 4\cos(x+\pi) + k$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 5\right)$ 를 지나므로

$$5 = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + k = 4 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) + k$$

이다. 따라서 $-2+k=5$ 이므로 $k=7$ 이다.

26. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 문제 해결하기

$3^a + 3^{-a} = t$ 라 하면

$$3^a + 3^{-a} \geq 2\sqrt{3^a \times 3^{-a}} = 2 \text{이므로 } t \geq 2 \text{이다.}$$

$t^2 = 2t+8$ 에서 $(t-4)(t+2) = 0$ 이고 $t \geq 2$ 이므로 $t = 4$ 이다.

$$27^a + 27^{-a} = (3^a + 3^{-a})^3 - 3(3^a + 3^{-a}) = t^3 - 3t = 64 - 12 = 52$$

27. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합 문제 해결하기

집합 B 의 원소는 모두 자연수이므로 a, b, c 는 모두 2^k (k 는 자연수)의 꼴이다.

$a+b=24$ 이므로 $\{a, b\} = \{8, 16\}$ 이고 $A = \{8, 16, c\}, B = \{3, 4, \log_2 c\}$ 이다.

집합 B 의 모든 원소의 합이 12이므로

$\log_2 c = 5$ 이고 $c = 2^5 = 32$ 이다.

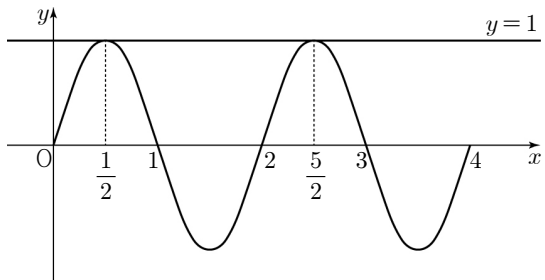
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
 $8 + 16 + 32 = 56$ 이다.

28. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

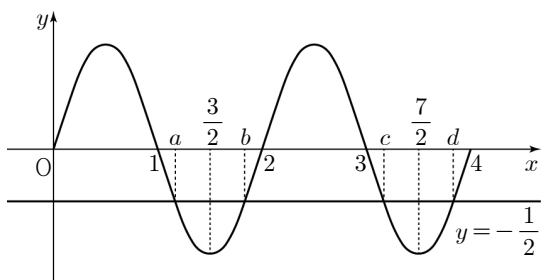
자연수 n 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, x 에 대한
 방정식 $\sin \pi x - \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$ 의 실근의 합은

함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 과
 만나는 점의 x 좌표의 합과 같다. 함수 $y = \sin \pi x$ 의
 주기는 2이다.

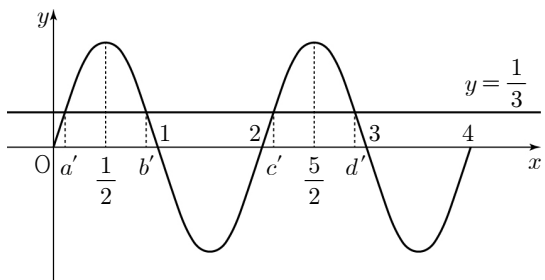
(i) $n=1$ 일 때, 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가
 직선 $y=1$ 과 만나는 점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ 이므로
 $f(1)=3$ 이다.



(ii) $n=2$ 일 때, 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가
 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 a, b, c, d
 라 하면 $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, \frac{c+d}{2} = \frac{7}{2}$ 에서 $f(2)=10$ 이다.



(iii) $n=3$ 일 때, 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가
 직선 $y = \frac{1}{3}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 a', b', c', d'
 이라 하면 $\frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{2}, \frac{c'+d'}{2} = \frac{5}{2}$ 에서
 $f(3)=6$ 이다.



(iv) $n \geq 4$ 일 때, (ii), (iii)과 같은 방법으로 n 이
 짝수일 때 $f(n)=10$, n 이 1이 아닌 홀수일 때
 $f(n)=6$ 이다. 따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
 $= 3+10+6+10+6 = 35$

29. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는
 문제 해결하기

$\overline{DF}=x, \angle CDF=\theta$ 라 하면 $\angle BDE = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이고
 $\overline{AE} = \overline{DE}$ 이므로 $\overline{BE} = 1 - \overline{AE} = 1 - \overline{DE}$ 이다.
 같은 방법으로
 $\overline{AF} = \overline{DF}$ 이므로 $\overline{CF} = 1 - \overline{AF} = 1 - \overline{DF}$ 이다.
 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의
 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 사인법칙에 의해
 삼각형 BDE에서 $\frac{1 - \overline{DE}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\overline{DE}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r_1 \dots \textcircled{1}$

삼각형 CDF에서 $\frac{1 - \overline{DF}}{\sin \theta} = \frac{\overline{DF}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r_2 \dots \textcircled{2}$

이 성립한다.
 $r_1 = 2r_2$ 이므로 $\overline{DE} = 2\overline{DF} = 2x$ 이고
 $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2x) = 2x \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2x \cos \theta$
 $\textcircled{2}$ 에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x) = x \sin \theta$ 이므로
 두 식의 양변을 제곱하여 연립하면
 $(1-2x)^2 + 4(1-x)^2 = 8x^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 8x^2$
 $x = \frac{5}{12}$

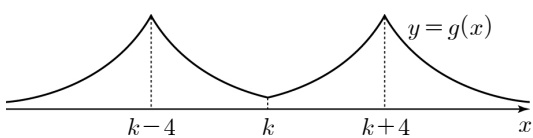
따라서 $p=12, q=5$ 이므로 $p+q=17$ 이다.
 [다른 풀이]
 $\angle AED = \theta$ 라 두면 $\angle AFD = \pi - \theta$ 이고
 $\angle BED = \pi - \theta, \angle CFD = \theta$ 이다.
 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의
 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 사인법칙에 의해
 삼각형 BDE에서 $\frac{\overline{BD}}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{BD}}{\sin \theta} = 2r_1$
 $\overline{BD} = 2r_1 \sin \theta \dots \textcircled{1}$
 삼각형 DCF에서 $\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = 2r_2$
 $\overline{CD} = 2r_2 \sin \theta \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의해 $\overline{BD} : \overline{CD} = r_1 : r_2 = 2 : 1$ 이다.
 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1, \angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{2}$ 이므로
 $\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이다.

$\overline{DF} = x$ 라 두면 $\overline{CF} = 1 - x$ 가 되어
 삼각형 DCF에서 코사인법칙에 의해
 $x^2 = (1-x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3})^2 - 2(1-x) \times \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \frac{\pi}{4}$
 $x = \frac{5}{12}$
 따라서 $p=12, q=5$ 이므로 $p+q=17$ 이다.

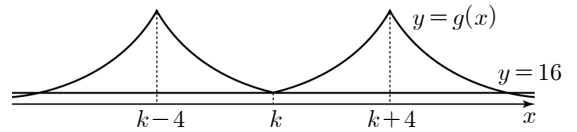
30. [출제의도] 지수함수의 그래프 추론하기

$f(x) = \begin{cases} -x+k-4 & (x < k) \\ x-k-4 & (x \geq k) \end{cases}$
 이며 $k-4 < x < k+4$ 일 때 $f(x) < 0$ 이고,
 $x \leq k-4$ 또는 $x \geq k+4$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이다.
 따라서 $g(x)$ 는
 $g(x) = \begin{cases} a^{-f(x)} & (k-4 < x < k+4) \\ a^{f(x)} & (x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+4) \end{cases}$
 $= \begin{cases} a^{-x+k-4} & (x \leq k-4) \\ a^{x-k-4} & (k-4 < x < k) \\ a^{-x+k+4} & (k \leq x < k+4) \\ a^{x-k-4} & (x \geq k+4) \end{cases}$
 이다.

(i) $0 < a < 1$ 일 때
 함수 $y = a^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소
 한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는
 $k-4 < x < k$ 또는 $x \geq k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
 증가하므로 $g(x)$ 의 값은 감소하고,
 $x \leq k-4$ 또는 $k \leq x < k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
 감소하므로 $g(x)$ 의 값은 증가한다.
 따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

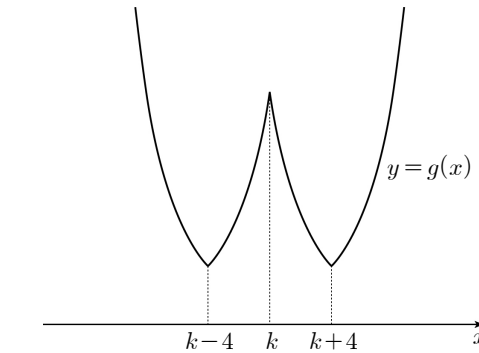


함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 의 교점의
 개수가 3이므로 $g(k) = 16$ 이다.

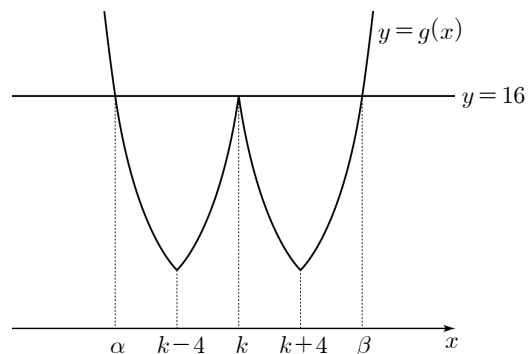


$g(k) = a^4 = 16$ 에서 $a = 2$ 가 되어 조건을 만족시키지
 않는다.

(ii) $a > 1$ 일 때
 함수 $y = a^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가
 한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는
 $k-4 < x < k$ 또는 $x \geq k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
 증가하므로 $g(x)$ 의 값도 증가하고,
 $x \leq k-4$ 또는 $k \leq x < k+4$ 일 때 $f(x)$ 의 값이
 감소하므로 $g(x)$ 의 값도 감소한다.
 따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 의 교점의 개
 수가 3이므로 $g(k) = 16$ 이다.



$g(k) = a^4 = 16$ 에서 $a = 2$ 이다.
 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 의 서로 다른
 세 교점의 x 좌표를 α, k, β 라 두면 ($\alpha < k < \beta$)
 $g(1) = 16$ 이므로 다음과 같은 세 가지 경우로 나눌
 수 있다.

$\textcircled{1} \alpha = 1$ 일 때, $g(1) = g(k) = g(\beta)$ 이므로
 $2^{-1+k-4} = 2^4 = 2^{\beta-k-4}$
 $-1+k-4 = 4$

따라서 $k = 9$ 이므로 $f(x) = |x-9|-4$ 이다.

$\textcircled{2} k = 1$ 일 때, $f(x) = |x-1|-4$ 이다.

$\textcircled{3} \beta = 1$ 일 때, $g(\alpha) = g(k) = g(1)$ 이므로
 $2^{-\alpha+k-4} = 2^4 = 2^{1-k-4}$
 $4 = 1-k-4$

따라서 $k = -7$ 이므로 $f(x) = |x+7|-4$ 이다.

(i), (ii)에 의해 $a = 2$ 이므로 $f(a-2) = f(0)$ 이고
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 모든 $f(0)$ 의 값의 합은 $5-3+3=5$
 이다.