2022학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-3교시)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지에 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

■ 현 수학 교과과정과 교과서에서 다룬 내용과 방법을 이용한 풀이를 정당한 풀이로 인정합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 수열

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 **등차수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공차**라고 한다.

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱해 만들어지는 수열을 **등비수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공비**라고 한다.

2. 이차함수

이차함수 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $a>0$이면 감소하다가 증가하고 $a<0$이면 증가하다가 감소한다. 이에 따라 이 이차함수의 최솟값은 $a>0$일 때 나타나고 최댓값은 $a<0$일 때 나타난다.

[1] n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$의 합은 2022이고 $a_2=92$이며 $a_{n-1}=245$라고 하자. 다음 값을 찾으시오.

(1) 항의 개수 n [4점]

(2) 공차 d [4점]

[2] 이차함수 $f(x)=a(x-c)^2+d$ $(a>0)$에 대해 다음 물음에 답하시오. (단, a, c, d는 상수)

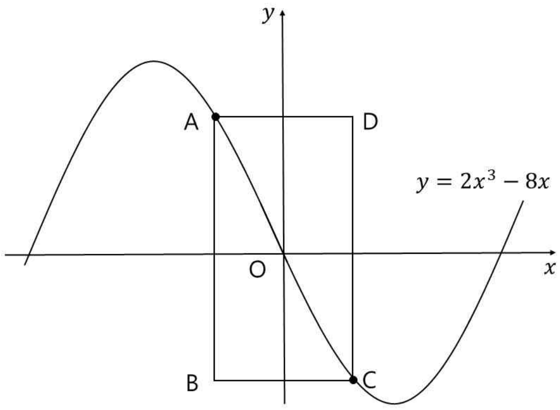
(1) $|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|=|f(4)|=10$일 때, 세 상수 a, c, d의 값을 각각 찾으시오. [7점]

(2) (1)에서 찾은 $f(x)$에 대해 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리고, 방정식 $|f(x)|=k$의 근의 개수가 다음과 같을 때 실수 k의 값 또는 그 범위를 각각 찾으시오. [7점]

① 근이 없음 ② 근이 2개 ③ 근이 3개 ④ 근이 4개

<다음 장 계속>

[3] 오른쪽 그림과 같이 두 점 A와 C는 곡선 $y=2x^3-8x$에 있고 도형 ABCD는 선분 AB가 y축과 평행한 직사각형이다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 점 A의 x좌표는 $a(-2<a<0)$이고 점 C의 x좌표는 $-a$라 할 때, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 a에 관한 함수로 나타내시오. [4점]

(2) (1)에서 얻은 함수의 최댓값을 찾고, 이때의 a의 값을 찾으시오. [6점]

[4] 구간 $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x+\sec 2x$에 대해 다음 물음에 답하시오.

(1) $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$일 때, $\sin x$의 값의 범위를 찾으시오. [4점]

(2) $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$일 때, 방정식 $f(x)=1$의 근의 개수를 찾으시오. [7점]

(3) (2)에서 찾은 근 중에서 가장 작은 값과 가장 큰 값을 각각 α와 β라고 하자. 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=\alpha-\frac{\pi}{2}$이고 $\angle \mathrm{B}=\beta-\pi$이며 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$이라고 하자. 이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R을 찾으시오. [7점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 정적분과 급수의 합

도형의 넓이를 구할 때, 주어진 도형을 잘게 나누어 간단한 도형의 넓이의 합으로 어림값을 구하고, 이 어림값의 극한값으로 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2. 중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 **중복조합**이라고 한다. 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같이 나타낸다.

3. 위치벡터

평면에서 정해진 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 점 O에 대한 점 P의 **위치벡터**라고 한다.

[1] 포물선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) S를 정적분으로 나타내고, 그 값을 찾으시오. [2점]

(2) (1)의 정적분을 급수의 합으로 나타내고, 극한을 이용하여 그 급수의 합을 찾으시오. [4점]

[2] '데시벨(dB)'은 소리의 세기를 표준음의 세기와 비교해서 나타내는데, 표준음은 정상적인 청각을 지닌 사람이 겨우 들을 수 있는 소리로 그 세기는 1제곱미터에 10^{-12}와트이다. 곧 $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$이다. 표준음의 세기를 $I_0\,\mathrm{W/m^2}$이라 하고 어떤 소리의 세기를 $I\,\mathrm{W/m^2}$이라고 할 때, 이 소리의 세기 $I\,\mathrm{W/m^2}$을 단위를 바꾸어 L데시벨(dB)이라고 하면 이 값 L은 상용로그를 이용해서 다음과 같이 계산한다.

$$L = 10\log\frac{I}{I_0}$$

L을 변수 I의 함수 $L(I)$라고 할 때, 다음 값을 찾으시오. [6점]

$$\lim_{h\to 0}\frac{L(10^5 I_0+h)-L(10^5 I_0-h)}{h}$$

<다음 장 계속>

[3] 방정식 $x+y+z+w=21$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)에 대하여 다음 값을 찾으시오. (단, 0은 모든 수의 배수이다. 이를테면 0은 2의 배수이므로 짝수이고, 0은 6의 배수이기도 하다.)

(1) 주어진 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍의 개수 [4점]

(2) 주어진 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 중에서 하나를 임의로 택할 때, x, y, z가 모두 짝수일 확률 [5점]

(3) 주어진 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 중에서 하나를 임의로 택할 때, x가 6의 배수이고 y와 z가 짝수일 확률 [5점]

(4) 주어진 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 중에서 하나를 임의로 택하는데 x, y, z가 모두 짝수일 때, x가 3의 배수일 확률 [5점]

[4] n이 자연수일 때, 좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하는 두 점의 위치벡터 $\overrightarrow{a_n}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n, 0\right)$과 $\overrightarrow{b_n}=\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{p_n}$을 다음과 같이 정의하자.

$$\overrightarrow{p_n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b_k}\right)$$

다음 물음에 답하시오.

(1) 원점 O를 시점으로 하는 위치벡터 $\overrightarrow{p_n}$의 종점을 점 P_n이라고 할 때, n의 값이 커짐에 따라 점 P_n이 한없이 가까워지는 점 P의 좌표를 찾으시오. [3점]

(2) $n \geq 2$일 때, 점 P_n이 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_{n+1}$을 $\alpha : \beta\ (\alpha>0, \beta>0)$로 내분한다고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 찾으시오. [5점]

(3) 점 $\mathrm{A}(1,0)$과 (1)에서 찾은 점 P에 대해 다음을 만족시키는 좌표평면의 점 Q가 나타내는 도형의 방정식을 찾으시오. [5점]

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=1$$

(4) 점 P_n을 x축에 관해 대칭이동하고 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 R_n이라 하고 원점 O를 시점으로 하는 두 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_n}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_{n+1}}$이 이루는 예각의 크기를 θ_n이라 할 때, $\cos\theta_n$의 최솟값을 찾으시오. [6점]

<끝>

2022학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-3교시-문제 1]

출제 의도

[1] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있는지 판단한다.
[2] 이차함수의 절대값의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 방정식 $|f(x)|=k$의 실근과 같음을 아는지 판단한다.
[3] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지 판단한다.
[4] 삼각함수를 포함한 방정식을 삼각함수의 그래프를 이용하여 풀 수 있는지 판단한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	수학Ⅰ-(3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
	성취기준	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	수학-(1) 문자와 식-$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.
문항 [1](1)	교육과정	수학Ⅰ-(3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
	성취기준	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	수학Ⅰ-(3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
	성취기준	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	수학-(1) 문자와 식-$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.
문항 [2](2)	교육과정	수학-(1) 문자와 식-$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.
문항 [3](1)	교육과정	수학-(2) 기하$\boxed{1}$ 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅱ]-(2) 미분-3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅰ](2) 삼각함수-1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[수학Ⅰ]-(2) 삼각함수-1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문항 [4](3)	교육과정	[수학Ⅰ]-(2) 삼각함수-1 삼각함수
	성취기준	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복외	(주)지학사	2021	77
	수학 Ⅰ	이준열 외	㈜천재교육	2021	99,128
	수학 Ⅱ	류희찬 외	㈜천재교과서	2021	87,91
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 등차수열의 합을 첫째항과 마지막 항의 합으로 표현하면 문제를 해결할 수 있다.
(2) 등차수열의 일반항을 초항과 공차를 이용해 표현하면 해결할 수 있다.
[2] (1) 이차함수는 축에서 거리가 같으면 함숫값도 같음을 이용하면 문제를 해결할 수 있다.
(2) 절대값이 있는 이차방정식의 실근은 이차함수와 직선과의 교점을 이용하여 해결할 수 있다.
[3] (1) 좌표평면의 두 점 사이의 거리를 구하면 문제를 해결할 수 있다.
(2) 도함수를 활용하여 함수의 최댓값을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	항의 개수 n을 찾기 위한 관계식을 올바로 세웠으면	2
	항의 개수 n을 올바로 찾았으면	2
[1](2)	공차 d를 찾기 위한 관계식을 올바로 세웠으면	2
	공차 d를 올바로 찾았으면	2
[2](1)	그래프의 대칭성을 이용해 축 $c=\frac{5}{2}$를 찾았으면	3
	a와 d를 찾기 위한 관계식을 올바로 세웠으면	2
	a와 d를 올바로 찾았으면	2
[2](2)	$y=\lvert f(x)\rvert$의 그래프를 올바로 그렸으면	3
	①②③④에 대해 올바로 답했으면 각 1점	4
[3](1)	두 변의 길이를 찾았으면	2
	둘레의 길이를 a의 함수로 올바로 나타냈으면	2
[3](2)	둘레의 길이를 나타내는 함수의 도함수를 올바로 얻었으면	2
	$f'(a)=0$인 $a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$을 올바로 찾았으면	2
	최댓값 $12\sqrt{6}$을 찾았으면	2
[4](1)	$\sin x$는 감소하는 연속함수라는 언급이 있으면	2
	$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$을 찾았으면	2
[4](2)	$\sin x\,(2\sin^2 x-2\sin x-1)=0$을 얻었으면	2
	근이 될 수 있고 없음을 올바로 판정했으면	3
	근의 개수를 올바로 찾았으면	2
[4](3)	$\alpha=\pi,\quad \sin\beta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$임을 올바로 얻었으면 각 2점	`4
	$R=\sqrt[4]{3}$을 올바로 찾았으면	3

[문제 1] 예시 답안

[1]

(1) 주어진 수열은 등차수열이므로 $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n = 92 + 245 = 337$이고 다음을 얻는다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 2022, \quad n \times 337 = 4044, \quad n = 12$$

따라서 찾는 항의 개수 n은 12이다.

(2) $a_2 = 92$이고 $a_{n-1} = a_{11} = 245$이므로 다음을 얻는다.

$$a_2 + 9d = a_{11}, \quad 92 + 9d = 245, \quad 9d = 153, \; d = 17$$

따라서 찾는 공차 d는 17이다.

[2]

(1) 최고차항의 계수가 $a > 0$이므로 $|f(x)|$의 값이 서로 다른 네 점에서 같은 값을 가지려면 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림 B와 같을 수 없고 그림 A와 같은 경우뿐이다.

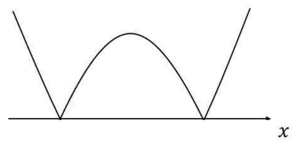


그림 A

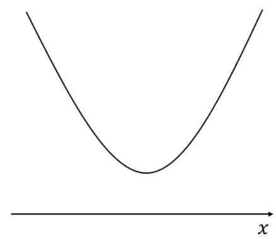


그림 B

$|f(x)| = |a(x-c)^2 + d|$으로부터 축 $x = c$에서 거리가 같으면 함숫값이 같다. 그러므로

$$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(4)| = 10$$

이기 위해서는 $c = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$이다.

곧, $f(x) = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + d$이다.

이차방정식 $f(x) = k$의 근은 최대 2개 이므로 그림 A에서 $f(1) = f(4) = 10$이고 $f(2) = f(3) = -10$이다.

곧 $f(1) = f(4) = \frac{9}{4}a + d = 10$이고 $f(2) = f(3) = \frac{1}{4}a + d = -10$이다.

$\begin{cases} 9a + 4d = 40 \\ a + 4d = -40 \end{cases}$으로부터 $a = 10$이고 $d = -\frac{25}{2}$이다.

따라서 $f(x) = 10\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$이므로 찾는 값은 $a = 10,\ c = \frac{5}{2},\ d = -\frac{25}{2}$이다.

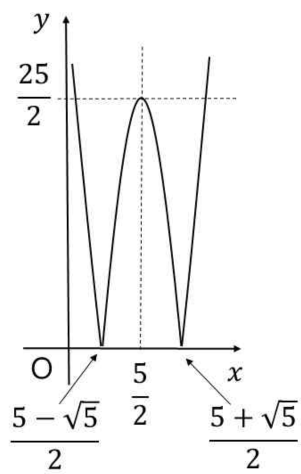
(2) (1)의 결과와 오른쪽 그림에서

① 근이 없음 : $k < 0$이면 근이 없다.

② 근의 개수가 2개 : $k > \frac{25}{2}$ 또는 $k = 0$이면 근이 2개

③ 근의 개수가 3개 : $k = \frac{25}{2}$이면 근이 3개

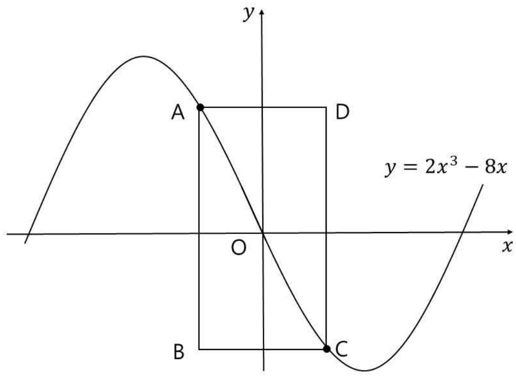
④ 근의 개수가 4개 : $0 < k < \frac{25}{2}$이면 근이 4개



[3]

(1) 점 A의 좌표는 $(a, 2a^3-8a)$, 점 C의 좌표는 $(-a, -2a^3+8a)$, 점 B의 좌표는 $(a, -2a^3+8a)$, 점 D의 좌표는 $(-a, 2a^3-8a)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=4a^3-16a$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=-2a$이다. 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는 다음과 같다.

$$2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=2(4a^3-16a-2a)=8a^3-36a$$



(2) 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)=8a^3-36a$라 하자. $f'(a)=24a^2-36=12(2a^2-3)$이고 a의 범위가 $-2<a<0$이므로 $f'(a)=0$의 근은 $a=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다. 그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$	$+$	0	$-$
$f(a)$	↗	$12\sqrt{6}$	↘

따라서 $-2<a<0$에서 함수 $f(a)$의 최댓값은 $12\sqrt{6}$이고 이때 $a=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다.

[4]

(1) $\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 $\sin\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이며 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{5}{4}\pi\right)$에서 $\sin x$는 감소하는 연속함수이므로

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(2) $f(x)=\sin x+\sec 2x=1$의 양변에 $\cos 2x$를 곱하면 $\sin x\cos 2x+1=\cos 2x$이다.

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$를 대입하면 $\sin x(1-2\sin^2 x)+1=(1-2\sin^2 x)$이다.

정리하면 $\sin x(2\sin^2 x-2\sin x-1)=0$이다.

$\sin x=t$라 하면 $t(2t^2-2t-1)=0$이므로, $t=0$ 또는 $t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$이다.

구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{5}{4}\pi\right)$에서 $\sin x$는 감소하는 연속함수이고 (1)에서 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$t=0$인 경우에 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sin x=0$을 만족시키는 x가 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{5}{4}\pi\right)$에 하나 있다.

$t=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$인 경우에 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}>1$이므로 $\sin x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 x는 없다.

$t=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$인 경우에 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}>0$이므로

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$이다.

그러므로 $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 x가 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$에 하나 있다.

따라서 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$에 있는 $f(x)=1$의 근의 개수는 2개이다.

(3) 구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$에서 $\sin x$는 감소하므로 (2)로부터 $\alpha=\pi$이고 $\sin\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

$\triangle \mathrm{ABC}$는 $\angle \mathrm{A} = \alpha - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 사인법칙을 사용하면 $2R = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin C}$이고 $\cos\beta < 0$이므로 다음을 얻는다.

$$2R = \frac{\sqrt{6}}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right)} = \frac{\sqrt{6}}{-\cos\beta} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}} = \sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} = 2\sqrt[4]{3}$$

따라서 $R = \sqrt[4]{3}$이다.

[다른 풀이]

구간 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$에서 $\sin x$는 감소하므로 (2)로부터 $\alpha=\pi$이고 $\sin\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

$\triangle \mathrm{ABC}$는 $\angle \mathrm{A} = \alpha - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 그러므로 R은 빗변의 길이의 $\dfrac{1}{2}$이고 $\cos\beta < 0$이므로

(빗변의 길이)

$$= \overline{\mathrm{BC}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\cos B} = \frac{\sqrt{6}}{\cos(\beta-\pi)} = -\frac{\sqrt{6}}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}} = \sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} = 2\sqrt[4]{3}$$

따라서 $R = \sqrt[4]{3}$이다.

2022학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-3교시-문제 2]

출제 의도

[1] 정적분과 급수의 합의 관계를 알고 계산을 할 수 있는지 판단한다.
[2] 상용로그함수의 미분을 할 수 있는지 판단한다.
[3] 조건부 확률을 이해하고 중복조합을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 판단한다.
[4] 선분의 내분을 이해하고 두 평면벡터간의 각의 크기를 구할 수 있는지 판단한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	`미적분]-(3) 적분법-2 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
제시문2	교육과정	[확률과 통계]-(1) 경우의 수-1 순열과 조합
	성취기준	[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[기하]-(2) 평면벡터-2 평면벡터의 성분과 내적
	성취기준	[12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학Ⅱ]-(3) 적분-2 정적분
	성취기준	[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법-2 정적분의 활용
	성취기준	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문항 [2]	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-1 여러 가지 함수의 미분
	성취기준	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[확률과 통계]-(1) 경우의 수-1 순열과 조합
	성취기준	[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[확률과 통계]-(2) 확률-1 확률의 뜻과 활용
	성취기준	[12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.
문항 [3](3)	교육과정	[확률과 통계]-(2) 확률-1 확률의 뜻과 활용
	성취기준	[12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.
문항 [3](4)	교육과정	[확률과 통계]-(2) 확률-2 조건부확률
	성취기준	[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

문항 [4](1)	교육과정	미적분-(1) 수열의 극한-1 수열의 극한
	성취기준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	수학-(2) 기하-1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
문항 [4](3)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식
	성취기준	[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
문항 [4](4)	교육과정	[기하]-(2) 평면벡터-2 평면벡터의 성분과 내적
	성취기준	[12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	류희찬외	㈜천재교과서	2021	90
	미적분	홍성복외	㈜지학사	2021	92,107,163
	확률과 통계	이준열외	㈜천재교육	2021	39
기타					

5. 문항 해설

[1] (1) 다항함수의 정적분을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
(2) 정적분을 급수의 합으로 나타내고 극한을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
[2] 로그함수의 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
[3] (1) 중복조합을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
(2) 중복조합을 연속으로 사용하여 문제에서 제시하는 확률을 계산할 수 있다.
(3) 중복조합을 연속으로 사용하여 문제에서 제시하는 확률을 계산할 수 있다.
(4) 연관된 두 사건을 구체적으로 명시하고 조건부 확률의 공식을 활용하면 문제를 해결할 수 있다.
[4] (1) 급수의 합을 찾아 극한을 계산하면 문제를 해결할 수 있다.
(2) 내분점의 좌표를 주어진 조건을 활용하여 표현하면 문제를 해결할 수 있다.
(3) 좌표평면에서 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 조건을 기술하면 문제를 해결할 수 있다.
(4) 두 점 사이의 거리가 가장 먼 경우가 두 점의 위치벡터 간 이루는 각의 크기가 가장 크다는 사실을 활용하면 문제를 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	S를 정적분으로 올바로 나타냈으면	1
	그 값을 올바로 찾았으면	1
[1](2)	정적분을 급수의 합으로 올바로 표현했으면	2
	극한 $\frac{8}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$을 이용하여 급수의 합을 올바로 찾았으면	2
[2]	주어진 극한값이 $2L'(10^5 I_0)$임을 보였으면	3
	$L'(I)=\frac{10}{\ln 10}\left(\frac{1}{I}\right)$을 올바로 찾았으면	2
	$2L'(10^5 I_0)=\frac{20}{\ln 10}\left(\frac{1}{10^5 I_0}\right)=\frac{2\times 10^8}{\ln 10}$을 올바로 얻었으면	1
[3](1)	순서쌍의 개수가 ${}_4\mathrm{H}_{21}(={}_{24}\mathrm{C}_{21}={}_{24}\mathrm{C}_3)$임을 기술했으면	2
	${}_4\mathrm{H}_{21}=2024$임을 얻었으면	2
[3](2)	순서쌍의 개수가 ${}_4\mathrm{H}_{10}(={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3)$임을 기술했으면	2
	확률값을 올바로 얻었으면	3
[3](3)	찾는 순서쌍의 개수와 $3a+b+c+d=10$을 만족시키는 순서쌍의 개수가 같음을 기술했으면	2
	$a=0,\ 1,\ 2,\ 3$인 경우를 나누어 순서쌍의 개수를 올바로 얻었으면	2
	확률값을 올바로 얻었으면	1
[3](4)	사건을 명시하고 구하는 확률이 조건부 확률 $\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$임을 제시하면	3
	확률값을 올바로 얻었으면	2
[4](1)	$\overrightarrow{p_n}=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n, 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$을 얻었으면	2
	$\mathrm{P}\ (1,2)$을 얻었으면	1
[4](2)	관계식 $x_n=\frac{\alpha x_{n+1}+\beta x_{n-1}}{\alpha+\beta}$ (또는 다른 풀이의 대등한 부분)을 올바로 기술했으면	1
	x_n(또는 y_n) 값들을 대입하여 식들을 정리하는 과정이 있으면	1
	$\frac{\alpha}{\beta}=2$을 얻었으면	3
[4](3)	$\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(2-2x, 2-2y)$을 얻었으면	1
	$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right\rvert=\sqrt{(2-2x)^2+(2-2y)^2}=1$을 올바로 기술했으면	2

하위 문항	채점 기준	배점
	$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ 을 얻었으면	2
[4](4)	$\mathrm{R}_n=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ -1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ 을 올바로 얻었으면	2
	그림이나 근거를 제시하고 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}$ 가 이루는 예각이 가장 크다는 사실을 기술하면	2
	$\cos\theta_n$ 의 최솟값 $\cos\theta_1=\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 을 얻었으면	2

[문제 2] 예시 답안

[1]

(1) $S=\int_0^2 x^2\,dx$, $\qquad S=\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$

(2) $\int_0^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Delta x$ (단, $x_k=0+k\Delta x$, $\Delta x=\frac{2-0}{n}$),

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\cdot\frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{n^3}=\frac{8}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{8}{3}\cdot 1=\frac{8}{3}$$

[다른 풀이]

$\int_0^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2\Delta x$ (단, $x_k=0+k\Delta x$, $\Delta x=\frac{2-0}{n}$),

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\cdot\frac{(n-1)n(n-\frac{1}{2})}{n^3}=\frac{8}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{8}{3}\cdot 1=\frac{8}{3}$$

[참고] 그밖에도 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ (단, $x_k=a+k\Delta x$, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$)에서

$f(x_k)$는 구간 $[x_{k-1},x_k]$의 다른 점에서의 함숫값, 이를테면 $f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$ 따위로 바꿀 수 있다.

[2] 분자에 $L(10^5 I_0)$를 더하고 빼어서 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{L(10^5I_0+h)-L(10^5I_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{L(10^5I_0+h)-L(10^5I_0)+L(10^5I_0)-L(10^5I_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{L(10^5I_0+h)-L(10^5I_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{L(10^5I_0-h)-L(10^5I_0)}{-h}$$
$$=L'(10^5I_0)+L'(10^5I_0)=2L'(10^5I_0)$$

$L(I)=10\log\frac{I}{I_0}$ 이므로 $L'(I)=\frac{10}{\ln 10}\frac{I_0}{I}\frac{1}{I_0}=\frac{10}{\ln 10}\left(\frac{1}{I}\right)$이다.

따라서 찾는 값은 $2L'(10^5I_0)=\frac{20}{\ln 10}\left(\frac{1}{10^5I_0}\right)$이다. (또는 $2L'(10^5I_0)=\frac{20}{\ln 10}\left(\frac{1}{10^{-7}}\right)=\frac{2\times 10^8}{\ln 10}$)

[3]

(1) 방정식 $x+y+z+w=21$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x,y,z,w)의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 21개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 다음과 같다.

$${}_4\mathrm{H}_{21}={}_{4+21-1}\mathrm{C}_{21}={}_{24}\mathrm{C}_{21}={}_{24}\mathrm{C}_{24-21}={}_{24}\mathrm{C}_3=\frac{24\times23\times22}{3!}=2024$$ 이다.

(2) x와 y와 z가 짝수이면 w는 홀수이다. $x=2a, y=2b, z=2c, w=2d+1$이라고 하자. 이를 대입하서 얻은 방정식 $a+b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 구하면 다음과 같다.

${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=286$이다. 따라서 찾는 확률은 $\dfrac{286}{2024}=\dfrac{143}{1012}=\dfrac{13}{92}$이다.

(3) x가 6의 배수이고 y와 z가 짝수이면 w는 홀수이다. 이 경우의 수를 찾기 위해 $x=6a$, $y=2b$, $z=2c$, $w=2d+1$이라고 하자. 이를 대입해서 얻은 방정식 $3a+b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 a의 값에 따라 찾으면 다음과 같다.

$a=0$인 경우: $b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b,c,d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$(개)

$a=1$인 경우: $b+c+d=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b,c,d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$(개)

$a=2$인 경우: $b+c+d=4$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b,c,d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$(개)

$a=3$인 경우: $b+c+d=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b,c,d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$(개)

따라서 조건을 만족시키는 해는 모두 $66+36+15+3=120$(개)이므로 찾는 확률은 $\dfrac{120}{2024}=\dfrac{15}{253}$이다.

(4) x,y,z가 모두 짝수일 사건을 A, x가 3의 배수일 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다. 이때 $A\cap B$은 x가 6의 배수이고 y와 z가 짝수이며 w가 홀수일 사건이다.

그러므로 (2)에서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{286}{2024}$이고 (3)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{120}{2024}$이다.

따라서 찾는 값은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{120}{2024}}{\frac{286}{2024}}=\dfrac{60}{143}$이다.

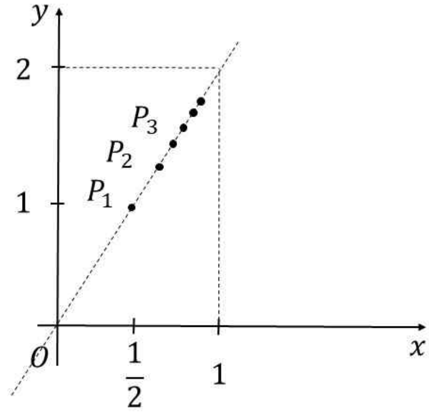
[4]

(1) $k=1,2,3,\cdots$일 때, $\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b_k}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)$이므로,

$\overrightarrow{p_n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{b_k}\right)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n, 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1$ 이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=2$이므로

점 P_n은 점 $\mathrm{P}(1,2)$에 한없이 가까워진다.



(2) (1)에서 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n, 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이다. 점 P_n이 선분

$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_{n+1}$ 을 $\alpha:\beta\ (\alpha>0,\ \beta>0)$로 내분하면 점 P_n의 x좌표 x_n은 x축의 구간 $[x_{n-1}, x_{n+1}]$을 $\alpha:\beta$로 내분하므로 다음이 성립한다.

$$x_n = \frac{\alpha x_{n+1}+\beta x_{n-1}}{\alpha+\beta}, \qquad \frac{\alpha\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}+\beta\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\alpha+\beta}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

$$\alpha-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\beta-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\alpha-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\beta-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \quad \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\beta$이므로 찾는 값은 $\frac{\alpha}{\beta}=2$이다.

[다른 풀이 1]

$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이고

점 P_n이 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_{n+1}$ 을 $\alpha:\beta\ (\alpha>0,\ \beta>0)$로 내분하면 점 P_n의 x좌표 x_n은 x축의 구간 $[x_{n-1}, x_{n+1}]$을 $\alpha:\beta$로 내분하므로 다음을 얻는다.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=2$$

[다른 풀이 2]

$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이고

점 P_n이 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_{n+1}$ 을 $\alpha:\beta\ (\alpha>0,\ \beta>0)$로 내분하면 점 P_n의 y좌표 y_n은 y축의 구간 $[y_{n-1}, y_{n+1}]$을 $\alpha:\beta$로 내분하므로 다음을 얻는다.

$$y_n = \frac{\alpha y_{n+1}+\beta y_{n-1}}{\alpha+\beta}, \qquad \frac{\alpha\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+\beta\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}}{\alpha+\beta}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$2\alpha-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+2\beta-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=2\alpha-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\beta-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\beta$이므로 찾는 값은 $\frac{\alpha}{\beta}=2$이다.

[다른 풀이 3]

$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이고

점 P_n이 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_{n+1}$ 을 $\alpha:\beta\ (\alpha>0,\ \beta>0)$로 내분하면 점 P_n의 y좌표 y_n은 y축의 구간 $[y_{n-1}, y_{n+1}]$을 $\alpha:\beta$로 내분하므로 다음을 얻는다.

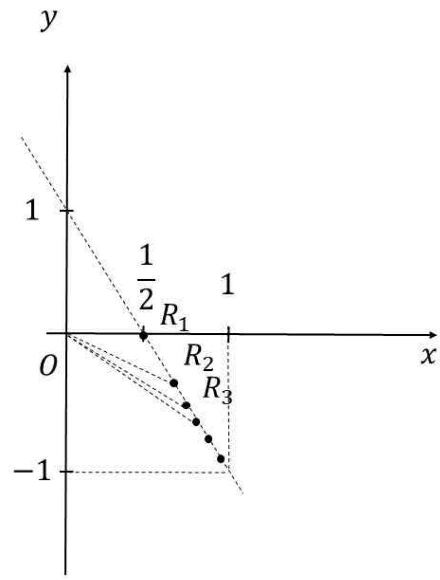
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{y_n-y_{n-1}}{y_{n+1}-y_n}=\frac{\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}}{\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}=2$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x, y)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(1-x,-y)+(1-x, 2-y)=(2-2x, 2-2y)$이다. 이에 따라 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\sqrt{(2-2x)^2+(2-2y)^2}=1$이므로 다음을 얻는다.

$$(2-2x)^2+(2-2y)^2=1, \quad (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$$

따라서 조건을 만족시키는 도형은 중심이 $(1,1)$이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$이므로, 찾는 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$이다.



(4) 점 R_n의 좌표는 $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n, -1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이므로 n이 커짐에 따라 두 점 R_n과 R_{n+1}사이의 거리가 가까워지므로 오른쪽 그림과 같이 두 위치 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_n}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_{n+1}}$이 이루는 예각 중에서 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}$가 이루는 예각이 가장 크다.

$\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}=\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}=\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$이므로 $\cos\theta_n$의 최솟값은 다음과 같다.

$$\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}||\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}|}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

[참고]

$\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_2}$가 이루는 예각의 크기가 가장 크다는 사실의 증명:

$\overrightarrow{\mathrm{OR}_n}$과 x축이 이루는 예각의 크기를 ϕ_n이라하면 다음을 얻는다.

$$\tan\phi_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{2^n-2}{2^n-1}=1-\frac{1}{2^n-1} \quad (n\text{이 커짐에 따라 }\tan\phi_n\text{도 증가})$$

그러면 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_n}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OR}_{n+1}}$이 이루는 예각의 크기 θ_n의 탄젠트 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\tan\theta_n&=\tan(\phi_{n+1}-\phi_n)\\&=\frac{\tan\phi_{n+1}-\tan\phi_n}{1+\tan\phi_{n+1}\cdot\tan\phi_n}\\&=\frac{\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}-\frac{2^n-2}{2^n-1}}{1+\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}\cdot\frac{2^n-2}{2^n-1}} \quad (2^n=t\text{라 하자.})\\&=\frac{\frac{2t-2}{2t-1}-\frac{t-2}{t-1}}{1+\frac{2t-2}{2t-1}\cdot\frac{t-2}{t-1}}=\frac{(2t-2)(t-1)-(t-2)(2t-1)}{(2t-1)(t-1)+(2t-2)(t-2)}\\&=\frac{(2t^2-4t+2)-(2t^2-5t+2)}{(2t^2-3t+1)+(2t^2-6t+4)}=\frac{t}{4t^2-9t+5}=\frac{1}{4t+\frac{5}{t}-9}\end{aligned}$$

$h(t)=4t+\dfrac{5}{t}-9\ \ (t\geq 2)$ 라 하면, $t\geq 2$일 때 $h'(t)=4-\dfrac{5}{t^2}>0$이므로 $h(t)$는 증가함수이다.

따라서 $\tan\theta_n$ 은 감소함수이므로, $\tan\theta_1$이 최대이고 이에 따라 θ_1 이 최대이다.