한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	오후(2)-1번

1. 제시문 <나>에 의해 ${}_{n}C_{k}+{}_{n}C_{k+1}={}_{n+1}C_{k+1}$ 이다. 이를 이용하면

$$\begin{aligned}{}_{3n+3}C_{3k}&={}_{3n+2}C_{3k-1}+{}_{3n+2}C_{3k}\\&={}_{3n+1}C_{3k-2}+2\times{}_{3n+1}C_{3k-1}+{}_{3n+1}C_{3k}\\&={}_{3n}C_{3k-3}+3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}+{}_{3n}C_{3k}\end{aligned}$$

를 얻는다.

2. 1번의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}a_{n+1}+a_{n}&=2+\sum_{k=1}^{n}{}_{3n+3}C_{3k}+\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}\\&=2+\sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-3}+3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}+{}_{3n}C_{3k}\right)+\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}\\&=2+\sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-3}+3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}\right)+2\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}-1\\&=2+\sum_{k=1}^{n}\left(3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}\right)+3\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}-2\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}\right)+3\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}\\&=3\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}C_{k}\\&=3\times 2^{3n}\end{aligned}$$

를 얻는다.

3. 수열 $\left\{(-1)^{n+1}(a_{n}+a_{n+1})\right\}$이 등비수열이다.

$$\begin{aligned}a_{1}+a_{100}&=(a_{1}+a_{2})-(a_{2}+a_{3})+\cdots-(a_{98}+a_{99})+(a_{99}+a_{100})\\&=\sum_{k=1}^{99}(-1)^{k+1}(3\times 2^{3k})\\&=\frac{24(1-(-8)^{99})}{1-(-8)}=\frac{8}{3}(8^{99}+1)\end{aligned}$$

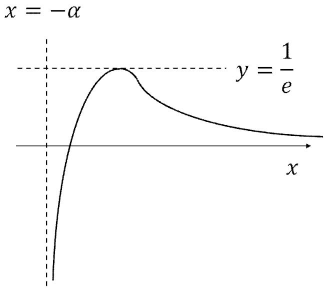
$a_{1}=2$ 이므로 $a_{100}=\frac{8}{3}(8^{99}+1)-2=\frac{1}{3}(8^{100}+2)$ 이다.

대칭성에 의해 $\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1}=\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-2}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1}=\frac{1}{2}(8^{100}-a_{100})=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}8^{100}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}(8^{100}-1)$ 이다.

답 : $\frac{1}{3}(8^{100}-1)$

한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번



1\. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$을 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1}{(x+\alpha)^2}(1-\ln(x+\alpha))$를 얻는다. 따라서 도함수 $f'(x)$는 $-\alpha<x<e-\alpha$ 범위에서 양수, $x>e-\alpha$ 범위에서 음수, $x=e-\alpha$에서는 0이 되며, $f(x)$는 $x=e-\alpha$에서 최댓값 $1/e$를 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x>-\alpha$ 범위에서만 정의되고 x가 $-\alpha$로 가까이 갈수록 음의 무한대로 발산하므로, 문제에 주어진 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$과 종합하여 $f(x)$의 개형을 그려 보면 오른쪽과 같은 그림을 얻는다.

그러므로 $(f\circ f)(x)=\dfrac{1}{e}$이라면 $f(x)=e-\alpha$인데, $f(x)=t$인 x가 정확히 두 개가 되는 것은 $0<t<\dfrac{1}{e}$에서만 가능하다. 그러므로 $0<e-\alpha<\dfrac{1}{e}$이고, 이것은 $e-\dfrac{1}{e}<\alpha<e$과 동치이다.

답 : $e-\dfrac{1}{e}<\alpha<e$

2\. $f'(-1)=a$, $f'(1)=-b$로 놓자. 그러면 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\mathrm{A}(-1,0)$과 $\mathrm{B}(1,0)$에서의 접선의 방정식은 각각 $y=a(x+1)$, $y=-b(x-1)$로 주어지는데, 이를 연립하면 교점의 좌표 $\left(\dfrac{b-a}{a+b},\dfrac{2ab}{a+b}\right)$를 얻는다. 따라서 $S=\dfrac{2ab}{a+b}$임을 알 수 있다. $f(x)$의 두 접선이 x축과 이루는 예각 $\angle\mathrm{PAB}$와 $\angle\mathrm{PBA}$를 각각 α와 β라 하면, $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$임을 알 수 있다. 이제 $\theta=\angle\mathrm{APB}$라 하면 $\theta=\pi-\alpha-\beta$이고, 따라서

$\tan\theta=\tan(\pi-\alpha-\beta)=-\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1}=\dfrac{a+b}{ab-1}$이다. 그러므로 $\cot\theta=\dfrac{ab}{a+b}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{23}$이 된다.

답 : $\cot\theta=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{23}$

3\. 원의 방정식은 $(x-t)^2+(y-1)^2=1$이고 직선 AB과 AC의 방정식은 각각 $y=\sqrt{3}x+1$, $y=-\sqrt{3}x+1$로 주어진다. 이를 연립하여 원과 직선 AB, AC가 각각 만나는 두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$를 구하려면 이차방정식 $(x-t)^2+(\sqrt{3}x)^2=1$을 풀어야 하며, 그 결과로 $x_1=\dfrac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})$, $x_2=\dfrac{1}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})$를 얻는다. 그러므로 $y_1=1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})$, $y_2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})$임을 알 수 있다. 이제 선분 PQ의 길이를 계산해 보면

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{4-3t^2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)^2}=1$이 되므로, 호 PQ와 현 PQ사이 영역의 넓이는 t와 관계없이 항상 상수 C로 일정하다. 삼각형 APQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\sin(\angle\mathrm{PAQ})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}$로 주어지는데,

$\overline{\mathrm{AP}}^2=x_1^2+(y_1-1)^2=\dfrac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})^2$, $\overline{\mathrm{AQ}}^2=x_2^2+(y_2-1)^2=\dfrac{1}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})^2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=-\dfrac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})(t+\sqrt{4-3t^2})=1-t^2$이 된다. 따라서 $f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)+C$이고, $f'(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$를 얻는다.

답 : $f'(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$