문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$f(x) = \int_0^x t(x-t)e^{x-t}\,dt$

$= \int_0^x (x-t)(x-(x-t))e^{x-(x-t)}\,dt$

$= \int_0^x t(x-t)e^{t}\,dt$

$= x\int_0^x te^t\,dt - \int_0^x t^2e^t\,dt$

$f'(x) = \int_0^x te^t\,dt \quad , \quad f''(x) = xe^x$

x	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$

이계도함수가 음수이면 위로볼록하고 양수이면 아래로 볼록이다.

$\therefore$ $x<0$ 에서 위로 볼록
$x>0$ 에서 아래로 볼록
변곡점 좌표: $(0,0)$

2.

$l_1: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0)=0,\ f(0)=0 \Rightarrow l_1: y=0$

$l_2: y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(2) = \int_0^2 xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^2 = e^2+1$

$f(2) = 2\int_0^2 xe^x\,dx - \int_0^2 x^2e^x\,dx = 2(e^2+1) - (2e^2-2)$

$= 4$

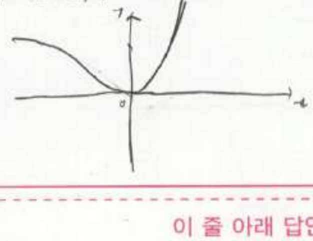
$\Rightarrow l_2: y = (e^2+1)(x-2)+4$

$f'(x) = \int_0^x te^t\,dt = (x-1)e^x + 1$

$f(x) = (x-2)e^x + x + 2$

1.의 증감표에 따라 $f'(x)$는 $(-\infty, 0)$에서 감소하고, $x=0$에서 극솟값을 가지며, $(0,\infty)$에서 증가한다.

$f'(0)=0$ 이므로 이를 그래프에 나타내면



$f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 양수이므로

$f(x)$는 $(-\infty, \infty)$에서 증가하고, 1.에 의해 $(0,0)$에서 변곡점을 가진다.

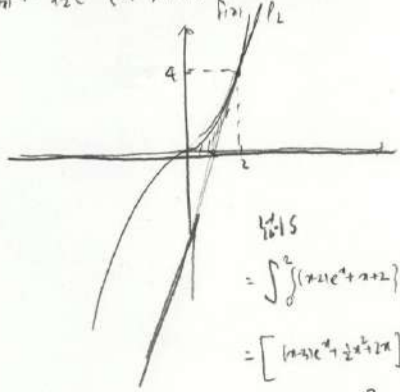
$f(x)$와 직선 l_2의 교점을 구하면

$(x-2)e^x + (x+2) - (e^2+1)(x-2) - 4$

$= (x-2)e^x + x + 2 - (e^2+1)x + 2e^2 - 2$

$= (x-2)e^x - e^2(x-2) = (x-2)(e^x - e^2)$

$f(x)$와 l_2는 $(2,4)$에서만 교점을 가지므로 그래프를 그리면



넓이 S

$= \int_0^2 \{(x-2)e^x + x + 2\}\,dx - \frac{1}{2}\times 4 \times \frac{4}{e^2+1}$

$= \left[(x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 - \frac{8}{e^2+1}$

$= 9 - e^2 - \frac{8}{e^2+1}$

$\boxed{\therefore 9 - e^2 - \frac{8}{e^2+1}}$

3.

(2)는 항등식이므로 양변을 미분하면

$e^{-x}g'(x) - e^{-x}\int_0^x g'(t)\,dt = e^{-x}g'(x) - \sin(2\pi x) - 2\pi x\cos(2\pi x)$

$e^{-x}\int_0^x g'(t)\,dt = \sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x) = e^{-x}\{g(x) - g(0)\} = e^{-x}\cdot g(x)$

$g(x) = e^x\{\sin(2\pi x) + 2\pi x\cdot\cos(2\pi x)\}$

$\int_0^{2023} g(x)\,dx = \int_0^{2023} e^x\cdot(x\sin(2\pi x))'\,dx$

$= \left[xe^x\sin(2\pi x)\right]_0^{2023} - \int_0^{2023} xe^x\sin(2\pi x)\,dx$

$= -\int_0^{2023} xe^x\sin(2\pi x)\,dx = 2\pi\int_0^{2023}(x-1)e^x\cos 2\pi x\,dx$

$2\pi\int_0^{2023}(x-1)e^x\cos(2\pi x)\,dx < 2\pi\int_0^{2023}(x+1)e^x\,dx$

$= 2\pi\left[xe^x\right]_0^{2023}$

$= 4046\pi e^{2023}$

$\therefore \int_0^{2023} g(x)\,dx < 4046\pi e^{2023}$

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

<1> $f(x)=\int_0^x (xt-t^2)e^{x-t}\,dt$

$= xe^x\int_0^x t\cdot e^{-t}dt - e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt$

$f'(x) = (x+1)e^x\int_0^x t\cdot e^{-t}dt + \cancel{xe^x}\cdot x\cdot \cancel{e^{-x}}$
$\quad - e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt - \cancel{e^x}\cdot x^2 \cancel{e^{-x}}$

$= (x+1)e^x\int_0^x t\cdot e^{-t}dt + \cancel{x^2} - e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt \cancel{-x^2}$

$= (x+1)e^x\int_0^x te^{-t}dt - e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt$.

$f''(x) = (x+2)e^x\int_0^x te^{-t}dt + (x+1)\cancel{e^x}\cdot x\cdot \cancel{e^{-x}}$
$\quad - e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt - \cancel{e^x}\cdot x^2\cdot \cancel{e^{-x}}$

$= (x+2)e^x\int_0^x te^{-t}dt - e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt + x(x+1) - x^2$

$= (x+2)e^x\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^x - e^x\left[-(t^2+2t+2)e^{-t}\right]_0^x + x$

$= (x+2)e^x\left(-(x+1)e^{-x}+1\right) - e^x\left(-(x^2+2x+2)e^{-x}+2\right) + x$

$= -(x+1)(x+2) + (x+2)e^x + x^2+2x+2 - 2e^x + x$

$= xe^x$.

$\therefore f''(x)=0$인 $x=0$ 이므로 변곡점의 좌표는 $(0,0)$임을 알 수 있다.

또한 $f''(x)=xe^x$는 $\begin{cases} (x\ge 0) & f''(x)\ge 0 \\ (x\le 0) & f''(x)\le 0 \end{cases}$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x\ge 0$일때는 아래로 볼록이고 $x\le 0$일때는 위로 볼록인 함수라는 것을 알 수 있다.

<2> $f(x)=xe^x\int_0^x te^{-t}dt - e^x\int_0^x t^2\cdot e^{-t}dt$

$= xe^x\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^x - e^x\left[-(t^2+2t+2)e^{-t}\right]_0^x$

$= xe^x\left(-(x+1)e^{-x}+1\right) - e^x\left(-(x^2+2x+2)e^{-x}+2\right)$

$= -x(x+1) + xe^x + x^2+2x+2 - 2e^x$.

$= (x-2)e^x + x + 2 \rightarrow f'(x)=(x-1)e^x+1$

$\therefore f(0)=0,\ f(2)=4$

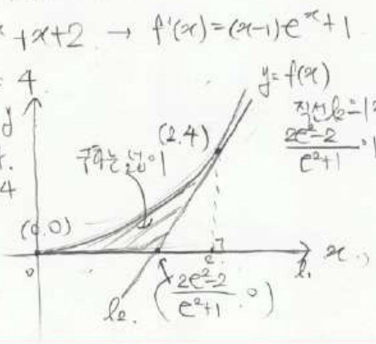
직선 l_1: $f'(0)=0, f(0)=0$

$\therefore$ 직선 l_1은 x축임을 알 수 있다.

직선 l_2: $f'(2)=e^2+1, f(2)=4$

$\therefore l_2$: $y=(e^2+1)(x-2)+4$

$y=(e^2+1)x-2e^2+2$



직선 l_2의 x절편은 $\frac{2e^2-2}{e^2+1}$이다.

$\therefore$ 구하는 넓이: $\int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{2e^2-2}{e^2+1}\right)\cdot 4$

$= \int_0^2\left((x-2)e^x+x+2\right)dx - \frac{8}{e^2+1}$

$= \left[(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2 - \frac{8}{e^2+1} = -e^2+3+2+4-\frac{8}{e^2+1}$

$= 9-e^2-\frac{8}{e^2+1}$

$\underline{9-e^2-\frac{8}{e^2+1}}$ //.

<3> $e^{-x}\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x e^{-t}g'(t)dt - x\sin(2\pi x)$.

양변을 x에 대해 미분하면

$-e^{-x}\int_0^x g'(t)dt + \cancel{e^{-x}g'(x)} = \cancel{e^{-x}g'(x)} - \sin(2\pi x) - 2\pi x\cos(2\pi x)$

$\therefore \int_0^x g'(t)dt = e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)$

$\int_0^x g'(t)dt = g(x)-g(0) = g(x)$ 이므로 ($\because$ 조건 <나>에서 $g(0)=0$ 이다)

$g(x)=e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)$ 임을 알 수 있다.

$\therefore \int_0^{2023} g(x)dx = \int_0^{2023} e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)dx$

$0\le x\le 2023$에서 $-1\le\sin(2\pi x)\le 1<2\pi$ 이고,
$-2\pi x\le 2\pi x\cos(2\pi x)\le 2\pi x$ 이므로

$e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right) < e^x(2\pi x+2\pi)$ 이다.

$\therefore \int_0^{2023} e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)dx$
$< \int_0^{2023} 2\pi e^x(x+1)dx = \left[2\pi xe^x\right]_0^{2023}$
$= 4046\pi e^{2023}$ 이다.

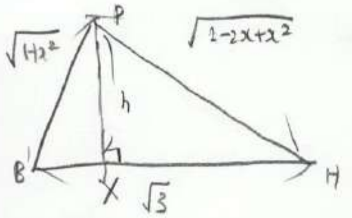
$\therefore \underline{\int_0^{2023} g(x)dx < 4046\pi e^{2023}}$ //.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$\overline{AP} = x$라 하면 $\overline{BH} = \sqrt{3}$, $\overline{BP} = \sqrt{1+x^2}$, $\overline{PH} = \sqrt{1+(1-x)^2}$ 이다.

이때, $\triangle PBH$의 넓이가 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 x에 대해서 다음을 성립한다.



$\triangle PBH = \sqrt{3}h \cdot \frac{1}{2}$ 이므로 h는 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ 이다

피타고라스의 정리에 의해 다음을 성립한다.

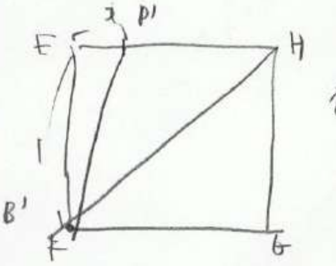
$\left(\overline{BX}^2 = -\overline{PX}^2 + \overline{PB}^2, \quad \overline{XH}^2 = \overline{PH}^2 - \overline{PX}^2 \right)$

$\overline{BX} + \overline{XH} = \sqrt{3}$ 이므로 x에 대해서 다음을 만족한다.

$$\sqrt{1+x^2 - \frac{n}{12}} + \sqrt{2-2x+x^2-\frac{n}{12}} = \sqrt{3}$$

따라서 식을 정리하면 $x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ 이다. $\overline{AP} \leq \overline{PD}$이므로

$x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ 임을 알 수 있고 $\triangle PPH$를 펼면 EF에 위로 정사영 시켰을 때의 모양은 다음과 같다.



삼각형 $B'P'H$가 정사영시킨 도형이므로 정사영의 넓이는 다음을 성립한다.

$$\triangle B'P'H = (1-x)\cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}}{8} \text{ 이다.}$$

2.

A_{n+1}는 A_n에서 $n+1$ 항을 적어도 하나 포함시키며 삼각부등식을 만족시키는 경우의 수 α_n를 더한 값으로 다음을 성립한다.

$$A_{n+1} = A_n + \alpha_n$$

i) $n=2k$ (k는 정수)일 때 (삼각부등식을 성립하는 a, b의 경우의 수)

$(n+1, \; a, \; b)$ $\quad (a,b) = (1, \; n+1)$

$(2, \; n+1), (2, n)$

$(3, \; n+1) \cdots (3, n-1)$

[삼각부등식은 어느 두변의 합도 나머지 한변의 길이보다 긴 것을 의미한다.]

$(a,b) = (4, \; n+1) \cdots (4, n-2)$

$\vdots$

$(k, \; n+1) \sim (k, \; k+2)$

$(k+1, \; n+1) \sim (k+1, \; k+1)$

$(k+2, \; n+1) \sim (k+2, \; k+2)$

$\vdots$

$(n+1, \; n+1)$

따라서 $\alpha_{2k} = 3n+1 + 3k + 3(2k)(k-1)$

$= 3n+1 + 6k^2 - 3k$

$= 3n+1 + 6\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}n$

$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ 을 성립한다.

$A_{n+1} - A_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ 이다.

3.

$f(x)$는 $x=\alpha\,(\alpha>1)$에서 1.9보다 작은 최솟값을 가지므로 $n=3m$ 일 때 다음을 성립한다.

$$\alpha^{-\frac{2}{3}}(\alpha+1) < 1.9, \quad \alpha^{-\frac{2}{3}\cdot 3m}(\alpha+1)^{3m} < (1.9)^{3m}$$

$$(1.9)^{3m} > \frac{(\alpha+1)^{3m}}{\alpha^{2m}} = \frac{\sum_{k=0}^{3m} {}_{3m}C_k \alpha^k}{\alpha^{2m}}$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} {}_{3m}C_k \alpha^{k-2m} + \sum_{k=2m}^{3m} {}_{3m}C_k \alpha^{k-2m}$$

$$> \sum_{k=2m}^{3m} {}_{3m}C_k \alpha^{k-2m}$$

$[k-2m=p]$ $$= \sum_{p=0}^{m} {}_{3m}C_{p+2m} \alpha^p$$

$[{}_{3m}C_{p+2m} = {}_{3m}C_{m-p}]$ $$= \sum_{p=0}^{m} {}_{3m}C_{m-p} \alpha^p \quad (\alpha>1)$$

$$> \sum_{p=0}^{m} {}_{3m}C_{m-p} = \sum_{p=0}^{m} {}_{3m}C_p$$

따라서 3의 배수인 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=0}^{\frac{n}{3}} {}_nC_k < (1.9)^n$를 성립한다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨