단국대학교 2025학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수의 연속성을 이해하고 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 평가

[논제 3] 삼각함수의 성질과 함수의 연속성을 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외(2022), 미적분, 천재교육, 138-159쪽
○ 고성은 외(2022), 미적분, 좋은책신사고, 155-171쪽
○ 홍성복 외(2020), 수학II, 지학사, 11-43쪽

[논제 1 평가기준]
- $h(x)$가 $x=\alpha$ 에서 극한값을 가져야 함을 제시 : 5점
- $f(x)=x^2\pm\pi x$ 임을 제시 : 4점
- 정답을 제시 : 6점

[논제 2 평가기준]
- $\displaystyle\int_0^{2t}(f(x)-g(x))dx=\frac{125}{6}$ 임을 제시 : 5점
- $t=\dfrac{5}{2}$ 임을 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 8점

[논제 3 평가기준]
- 함수 $v(x)$가 연속일 조건이 $\sin a_i=0$ 또는 $\sin a_i=\alpha$ 임을 제시 : 6점
- $s(a_1)=-5$, $s(a_2)=-3$, $s(a_3)=-1$ 임을 제시 : 6점
- $\sin a_1=\sin a_2=\sin a_3=-1$ 임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 3점

□ 예시 답안

[논제 1] 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $h(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 극한값이 존재한다. $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$ 이므로 $h(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극한값을 가지기 위해서는 $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=0$ 이어야 한다.

$\sin\alpha = \lim_{x\to\alpha}\sin x = 0$ 이므로 $\alpha = \pi$ 또는 $\alpha = -\pi$ 이다.

$\alpha = \pi$ 인 경우 : $f(x) = x^2 - \pi x$ 이고

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin x\, dx = \int_{-2\pi}^{2\pi}\left(x^2 - \pi x\right)\sin x\, dx = -\pi\int_{-2\pi}^{2\pi} x\sin x\, dx = 4\pi^2$$

$\alpha = -\pi$ 인 경우 : $f(x) = x^2 + \pi x$ 이고

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin x\, dx = \int_{-2\pi}^{2\pi}\left(x^2 + \pi x\right)\sin x\, dx = -4\pi^2$$

그러므로 구하려는 답은 $4\pi^2$, $-4\pi^2$

[논제 2] 조건 (1), (2), (3)으로부터

$$f(x) = x^2 - \alpha x, \quad g(x) = -x^2 + \beta x$$

이다.

$$A = \int_0^t (g(x) - f(x))dx, \quad B = \int_t^{2t}(f(x) - g(x))dx$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{125}{6} &= \int_t^{2t}(f(x)-g(x))dx - \int_0^t (g(x)-f(x))dx \\ &= \int_0^{2t}(f(x)-g(x))dx \\ &= \int_0^{2t}(2x^2 - (\alpha+\beta)x)dx = \frac{16}{3}t^3 - 2(\alpha+\beta)t^2\end{aligned}$$

이다. 한편 조건 (3)으로부터 $t^2 - \alpha t = -t^2 + \beta t$에서 $t = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$이다. 따라서

$$\frac{125}{6} = \frac{16}{3}\times\frac{(\alpha+\beta)^3}{8} - 2(\alpha+\beta)\times\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\alpha+\beta)^3}{6}$$

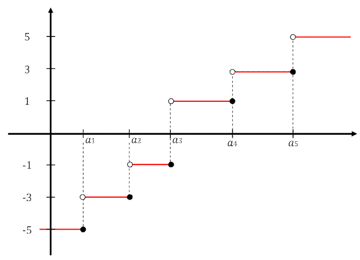
로부터 $\alpha+\beta = 5$ 이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^{n}(f(k)-g(k)) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - 5k) = 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\times\frac{n(n+1)}{2} \le 5n(n+1)$$

에서 $2(2n+1) - 15 \le 30$이므로 자연수 n의 최댓값은 10이다. 그러므로 구하려는 답은 10

[논제 3] 조건 (1)과 (2)로부터 $f(x) = x^2 - \alpha x$ 이다. $i = 1, 2, 3, 4, 5$에 대해

$$\lim_{x\to a_i -} s(x) = 2i - 7, \qquad s(a_i) = 2i - 7, \qquad \lim_{x\to a_i +} s(x) = 2i - 5$$



이다(그림 참조). 함수 $v(x) = f(\sin x)s(x)$가 $x = a_i$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a_i -} f(\sin x)\,s(x) &= \left((\sin a_i)^2 - \alpha\sin a_i\right)(2i-7) \\ &= \lim_{x\to a_i +} f(\sin x)\,s(x) = \left((\sin a_i)^2 - \alpha\sin a_i\right)(2i-5)\end{aligned}$$

이고 따라서

$$\sin a_i = 0 \quad \text{또는} \quad \sin a_i = \alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\star)$$

이다. $-1 \le \sin a_i \le 1$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{3} s(a_i)\sin a_i = -5\sin a_1 - 3\sin a_2 - \sin a_3 = 9$$

를 만족시키려면 $\sin a_1 = \sin a_2 = \sin a_3 = -1$이어야 한다. 따라서 $(\star)$로부터 구하려는 답은 -1

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 점과 선분 사이의 관계를 활용하고 미분가능성을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 연속성과 미분가능성을 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외(2020), 수학II, 천재교육, 53-72쪽
○ 박교식 외(2022), 미적분, 동아출판, 51-98쪽
○ 권오남 외(2022), 미적분, 교학사, 54-91쪽

[논제 1 평가기준]
- 함수 $m(x)$를 제시 : 12점
- 정답을 제시 : 8점

[논제 2 평가기준]
- $k=2$임을 제시 : 7점
- $a=-9e^2$임을 제시 : 8점
- $f(x)$의 일차항의 계수가 양수인 경우 또는 음수인 경우의 답을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 점 $\mathrm{P}(x,0)$으로부터 선분 AB, 선분 BC, 선분 CD 까지의 거리를 생각하여

$$m(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{\sqrt{2}} & (-2\le x<\sqrt{2}-2) \\ 1 & (\sqrt{2}-2\le x<2-\sqrt{2}) \\ \dfrac{2-x}{\sqrt{2}} & (2-\sqrt{2}\le x\le 2) \end{cases}$$

를 얻는다. 따라서

$$\lim_{x\to\sqrt{2}-2+}\frac{m(x)-m(\sqrt{2}-2)}{x-(\sqrt{2}-2)}=0,\qquad \lim_{x\to\sqrt{2}-2-}\frac{m(x)-m(\sqrt{2}-2)}{x-(\sqrt{2}-2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고

$$\lim_{x\to 2-\sqrt{2}+}\frac{m(x)-m(2-\sqrt{2})}{x-(2-\sqrt{2})}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \lim_{x\to 2-\sqrt{2}-}\frac{m(x)-m(2-\sqrt{2})}{x-(2-\sqrt{2})}=0$$

이다. 그러므로 구하려는 답은 $\sqrt{2}-2$와 $2-\sqrt{2}$

[논제 2] $f(x)=mx+n$이라 하면 $F(x)=(mx+2m+n)|x|e^{x}+|mx+n|e^{mx+n}h(x)$이다.

$$G(x)=(mx+2m+n)|x|e^{x},$$
$$H(x)=|mx+n|e^{mx+n}h(x)$$

라 하자. $F(x)$와 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $H(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그런데 $k\neq-\dfrac{n}{m}$이면 $H(x)$가 $x=k$에서 불연속이 되므로 $k=-\dfrac{n}{m}$이다.

$F(x)$와 $H(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $G(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{G(x)-G(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}(mx+2m+n)e^{x}=2m+n,$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{G(x)-G(0)}{x}=-\lim_{x\to 0-}(mx+2m+n)e^{x}=-(2m+n)$$

이므로 $2m+n=-(2m+n)$으로부터 $2m+n=0$이다.

$F(x)$와 $G(x)$가 $x=-\dfrac{n}{m}=2$에서 미분가능하므로 $H(x)=|mx-2m|e^{mx-2m}h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. $k=-\dfrac{n}{m}=2$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{H(x)-H(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}|m|e^{mx-2m}9e^{2}=9e^{2}|m|,$$
$$\lim_{x\to 2-}\frac{H(x)-H(2)}{x-2}=-\lim_{x\to 2-}|m|e^{mx-2m}a=-a|m|$$

이고, $9e^{2}|m|=-a|m|$으로부터 $a=-9e^{2}$이다.

$$F'(2)=G'(2)+H'(2)=8e^{2}m+9e^{2}|m|=17e^{2}$$

으로부터 $m=1$ 또는 $m=-17$이다.

(i) $m=1$인 경우

$f(x)=x-2$이고, $f(a+k)=f(-9e^{2}+2)=-9e^{2}$이다.

(ii) $m=-17$인 경우

$f(x)=-17x+34$이고, $f(a+k)=f(-9e^{2}+2)=153e^{2}$이다.

(i)과 (ii)로부터 구하려는 답은 $-9e^{2}$과 $153e^{2}$