수학 가이드 답안지 [자연계열] Ⓐ 형 (문항별 5점)

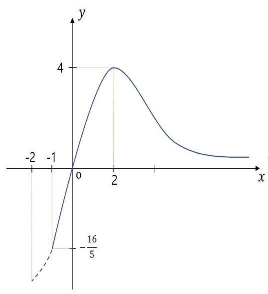
31. L 'Hospital의 정리를 이용하면,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\tan x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{6x}$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x\tan x}{x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan^2 x+\sec^4 x}{1}=-\frac{1}{3}$$

32. $f'(x)=\dfrac{64-16x^2}{(4+x^2)^2}=\dfrac{16(4-x^2)}{(4+x^2)^2}=0$이므로 $f'(2)=0$이다. 또한 $f(2)=4$는 극댓값이다.

한편 $f(-1)=-\dfrac{16}{5}$이고 $f(3)=\dfrac{48}{13}$이다.

그러므로 $M=4,\ m=-\dfrac{16}{5}$이고 $m+M=\dfrac{4}{5}$



33. 두 곡선의 교점은 $(1,-1)$, $(4,2)$이므로 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

34. ㄱ. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1-x}dx=\lim_{t\to 1-}\int_0^t\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx=\lim_{t\to 1-}[-\ln|1-x|-x]_0^t=\lim_{t\to 1-}[-\ln|1-t|-t]$: 발산

ㄴ. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{s\to 0-}\int_{-1}^{s}x^{-2}dx+\lim_{t\to 0+}\int_t^1 x^{-2}dx$

$$=\lim_{s\to 0-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{s}+\lim_{t\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_t^1=\lim_{s\to 0-}\left[-\frac{1}{s}-1\right]+\lim_{t\to 0+}\left[-1+\frac{1}{t}\right]$$: 발산

ㄷ. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\lim_{t\to 2-}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$$=2\lim_{t\to 2-}\int_0^t\frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}dx=2\lim_{t\to 2-}\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^t=2\lim_{t\to 2-}sin^{-1}\frac{t}{2}=\pi$$:수렴

ㄹ. $x=\tan\theta$라 하면 $x^2=\tan^2\theta$이고 $dx=\sec^2\theta d\theta$이다. 따라서

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{\sec^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}d\theta=\int\cos^2\theta d\theta$$
$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}sin2\theta+C=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}sin\theta\cos\theta+C$$
$$=\frac{1}{2}tan^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+C$$ 이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=2\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=2\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}\right]_0^t=\frac{\pi}{2}$$: 수렴

35. $u_n = \dfrac{(x+1)^n \ln n}{n\,3^n}$ 이라 하면

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}\ln(n+1)}{(n+1)3^{n+1}}\,\frac{n3^n}{(x+1)^n\ln n}\right| = \frac{|x+1|}{3} < 1$$

에서 $|x+1| < 3$, 즉 $-4 < x < 2$에서 주어진 멱급수는 수렴한다. 한편

$x = -4$일 때 $u_n = \dfrac{(-3)^n \ln n}{n3^n} = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ 이고 교대급수 판정법에 의하여 수렴한다.

$x = 2$일 때 $u_n = \dfrac{3^n \ln n}{n3^n} = \dfrac{\ln n}{n}$ 이고 비교판정법에 의하여 발산한다.

따라서 수렴집합은 $-4 \le x < 2$이므로 정수의 개수는 6개

36. 전체의 길이는 매개변수의 구간 $0 \le \theta \le \pi$에서 얻으므로,

$$L \equiv \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^\pi \sqrt{e^{4\theta} + 4e^{4\theta}}\,d\theta = \sqrt{5}\int_0^\pi e^{2\theta}d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{2\pi} - 1)$$

37. 구하는 평면의 법선 벡터는 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = <-14, 24, 6>$

이고 점 $(1, -2, 3)$를 지나므로 평면의 식은

$$-14(x-1) + 24(y+2) + 6(z-3) = 0, \qquad 7x - 12y - 3x - 22 = 0$$

이 평면과 점 $(-1, 1, 1)$사이의 거리는

$$\frac{|7\cdot(-1) + (-12)\cdot 1 + (-3)\cdot 1 - 22|}{\sqrt{7^2 + (-12)^2 + (-3)^2}} = \frac{22\sqrt{202}}{101}$$

38. $$D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} = (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y)$$

이다. $D_{\vec{u}} f(a,b) = \dfrac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$ 이고 a, b는 양의 유리수이므로 $\begin{cases} -3a + 8b = 13 \\ a^2 - b = -1 \end{cases}$ 에서 연립방정식을 풀면 $a = 1,\ b = 2$이고 $a + b = 3$

39. 입체 E의 xy-평면 위로의 사영 D는 $D = \{(x,y) \mid a \le x^2 + y^2 \le 9\}$이다. D를 극좌표로 표현하면 $\{(r,\theta) \mid \sqrt{a} \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

이므로

$$\begin{aligned}
\iiint_E x\,dV &= \iint_D \left[\int_0^{x+y+5} x\,dz\right] dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{a}}^3 (r^3\cos^2\theta + r^3\sin\theta\cos\theta + 5r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{a}}^3 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= \frac{81 - a^2}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{81 - a^2}{8}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{81 - a^2}{4}\pi
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $81 - a^2 = 17$ 이므로 $a^2 = 64$ 에서 $a = 8$

40. $f_x = 2y\sin x$, $f_y = 2y - 2\cos x$이므로 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0,1)$, $(\pi, -1)$, $(-\pi, -1)$이 임계점이다. 한편,

$$f_{xx} = 2y\cos x,\ f_{xy} = f_{yx} = 2\sin x,\ f_{yy} = 2$$

이다. 여기서 $D(x,y) \equiv f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$라 하자.

(1) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$: $D(-\frac{\pi}{2}, 0) = -4 < 0$ 이므로 극값이 아니다.

(2) $(\frac{\pi}{2}, 0)$: $D(\frac{\pi}{2}, 0) = -4 < 0$ 이므로 극값이 아니다.

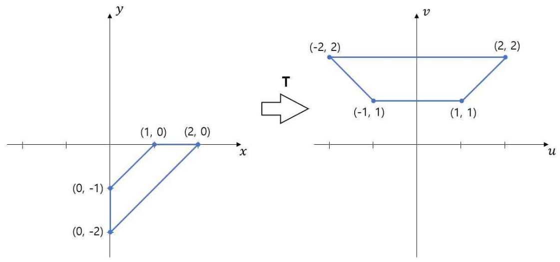
(3) $(0,1)$: $D(0,1) = 4 > 0$이고 $f_{xx}(0,1) = 2 > 0$ 이므로 $f(0,1) = -1$은 극솟값

(4) $(\pi, -1)$: $D(\pi, -1) = 4 > 0$이고 $f_{xx}(\pi, -1) = 2 > 0$ 이므로 $f(\pi, -1) = -1$은 극솟값

(5) $(-\pi, -1)$: $D(-\pi, -1) = 4 > 0$이고 $f_{xx}(-\pi, -1) = 2 > 0$ 이므로 $f(-\pi, -1) = -1$은 극솟값

41. 변수변환을 사용하여 $u = x + y$, $v = x - y$라 하자. 그러면 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$이고 야코비안 행렬식은

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$



이다. 한편 R에 대응하는 uv-평면의 도형을 S라고 하자.
그러면 영역 R은 네 직선

$$y = 0,\ x - y = 2,\ x = 0,\ x - y = 1$$

로 이루어져 있으므로 도형 S는 네 직선

$$u = v,\ v = 2,\ u = -v,\ v = 1$$

로 이루어지고 네 꼭짓점이
$(1,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-1,1)$인 사다리꼴이다. 즉,

$$S = \{(u,v) | 1 \le v \le 2,\ -v \le u \le v\}$$

이므로

$$\iint_R (x+y)e^{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)} dA = \iint_S u e^{\left(\frac{u}{v}\right)} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} u e^{\left(\frac{u}{v}\right)} du\, dv = \int_1^2 e^{-1} v^2\, dv = \frac{7}{3e}$$

42. 곡선 C_1에 대한 방정식은 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$ 이므로

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{6}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

이다. 한편 곡선 C_2에 대한 방정식은 $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \end{cases}$, $1 \le t \le 2$이므로

$$\int_{C_2} 2x ds = \int_1^2 2(2t-1)\sqrt{4+1}\, dt = 2\sqrt{5}\int_1^2 (2t-1) dt = 4\sqrt{5}$$

이다. 그러므로

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 4\sqrt{5} = \frac{29\sqrt{5}-1}{6}$$

43. 벡터장 $\mathrm{F}(x,y,z) = < xy^2, x^2y, y >$에 대하여, $\mathrm{divF} = x^2 + y^2$이다. 곡면 S로 이루어진 입체를 W라고 하면 다이버전스 정리(divergence theorem)에 의하여

$$\iint_S \mathrm{F} \cdot \mathrm{dS} = \iiint_W (x^2+y^2) dV = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \int_{-1}^{1} (x^2+y^2) dz dA = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr d\theta = \pi$$

44. $curl$ 이므로 적당한 삼변수함수(포텐셜 함수) f가 존재하여

$\nabla f = \mathrm{F}$를 만족한다. 그러므로

$$f_x = y^2,\ f_y = 2xy + e^{3z},\ f_z = 3ye^{3z}$$

에서 $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + A$ (단, A는 적분상수)이므로

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = f(3,2,3) - f(0,3,0) = 12 + 2e^9 - 3 = 9 + 2e^9$$

45. 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$의 고윳값을 λ라 하면 특성방정식 $\det(A - \lambda I) = 0$에서

$\lambda^3 - 13\lambda + 12 = 0$이다. 이 방정식의 해는 $\lambda = 1, 3, -4$이다. $\lambda_1 = 1$에 대응하는 고유벡터를 구하면

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ 또는 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

에서 $x = -2c$, $y = c$, $z = 4c$이고 고유벡터는 $<-2, 1, 4>$이다, 같은 방법으로 $<-2, -1, 2>$, $<1, -3, 13>$

46. R^2의 임의의 벡터 $<x, y>$에 대하여

$$T(<x,y>) = xT(<1,0>) + yT(<0,1>) = x<1,1> + y<-1,1> = <x-y, x+y>$$

이므로 $T(<x,y>) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} <x,y>^T$

따라서 T의 행렬표현은 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이고 T^{-1}의 행렬표현은 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

47. 가우스소거법을 이용하면 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 9 \\ 9 & 5 & 6 & 16 \end{pmatrix}$의 기약행렬은 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로 계수는 3이다.

48. 다음과 같이 방정식의 형태를 바꾸면 $\frac{dx}{dy} - x = y^2$이고 x에 대한 선형미분방정식이다.

적분인자는 $\mu(y) = e^{-y}$이고 양변에 곱하여 풀면

$$\begin{aligned} e^{-y}\frac{dx}{dy} - e^{-y}x &= e^{-y}y^2 \\ xe^{-y} &= \int e^{-y}y^2 dy \\ xe^{-y} &= -y^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y} + C \end{aligned}$$

에서 $x = -y^2 - 2y - 2 + Ce^y$ 이다.

49. 주어진 방정식의 일반해는 $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + 2x + 1$이다.

$$y' = (C_2 - C_1)e^{-x}\cos x - (C_1 + C_2)e^{-x}\sin x + 2$$

이고 초기조건에서 $y(0) = C_1 + 1 = 0$ 이고 $y'(0) = C_2 - C_1 + 2 = 0$ 따라서 $C_1 = -1$, $C_2 = -3$

이고 $y' = -2e^{-x}\cos x + 4e^{-x}\sin x + 2$ 이므로 $y'(\pi) = 2e^{-\pi} + 2 = 2(e^{-\pi} + 1)$이다.

50. $\lim_{t \to 0+} \frac{e^t - e^{-t}}{t} = \lim_{t \to 0+} (e^t + e^{-t}) = 2$ 극한이 존재하므로 $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)du$, 여기서 $F(u) = \mathcal{L}(f(t))$이다.

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \lim_{t \to \infty}\left[\ln|u-1| - \ln|u+1|\right]_s^t = -\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right| = \ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$$