

제2교시

수학 영역(가형)



5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(3, -4)$, $\vec{b}=(-1, 5)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. $\cos \frac{13}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

- ① $-e$ ② -1 ③ $-\frac{1}{e}$ ④ $\frac{1}{e}$ ⑤ 1

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$$P(A)-P(B)=\frac{1}{3}, P(A \cup B)=\frac{3}{5}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

5. 한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 할 때, a 와 bc 가 모두 짝수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

7. 함수 $f(x) = \log_2(2x-4) + 3$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 의 점근선의 방정식은? [3점]

- ① $x=2$ ② $x=3$ ③ $y=2$
④ $y=3$ ⑤ $y=4$

6. $(x + \frac{1}{x})^{2n}$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 a_n 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^4 a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 76 ② 77 ③ 78 ④ 79 ⑤ 80

8. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x=t-\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{1}{t}$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

9. 함수 $f(x)=e^{-x}$ 과 함수 $g(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여 $(g \circ f)(x)=\sin \pi x$ 를 만족시킬 때, $g'\left(\frac{1}{e}\right)$ 의 값은? [3점]
- ① $-e\pi$ ② $-\frac{e}{\pi}$ ③ $\frac{e}{\pi}$ ④ $\frac{\pi}{e}$ ⑤ $e\pi$

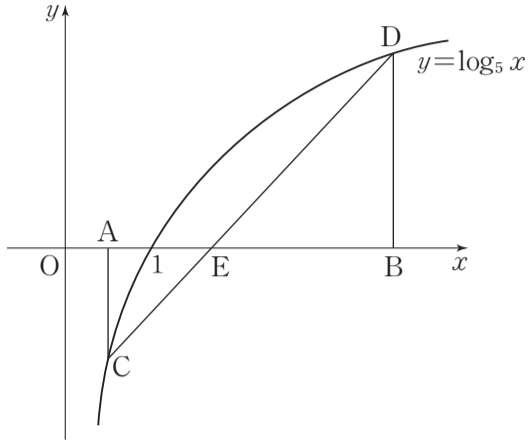
10. 함수 $f(x)$ 가 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \ln|x|$$

를 만족시킨다. $f(1)=e-1$ 일 때, $f(e)$ 의 값은? [3점]

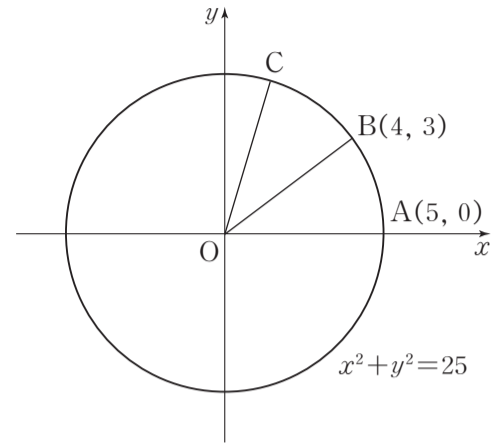
- ① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ 2 ④ e ⑤ e^2

11. 그림과 같이 두 점 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ 을 각각 지나고 x 축에 수직인 두 직선이 곡선 $y=\log_5 x$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 선분 CD와 x 축이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ACE의 넓이를 S_1 , 삼각형 BDE의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 : S_2 = 4 : 9$ 일 때, $\log_a b$ 의 값은? (단, $0 < a < 1 < b$) [3점]



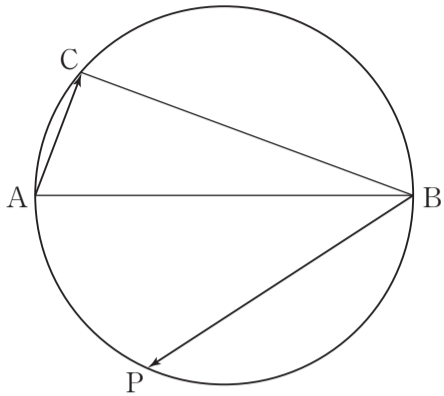
- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$

12. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 서로 다른 세 점 $A(5, 0)$, $B(4, 3)$, C가 있다. $\angle AOB = \angle BOC$ 일 때, 점 C의 x 좌표는? (단, O는 원점이다.) [3점]



- ① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

13. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 6인 원 위에 $\overline{AC}=2$ 가 되도록 점 C를 잡는다. 이 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP}$ 의 최댓값은? [3점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

14. 좌표평면 위에 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ 가 있다. 선분 OB 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 Q는 직선 AP 위의 점이다.

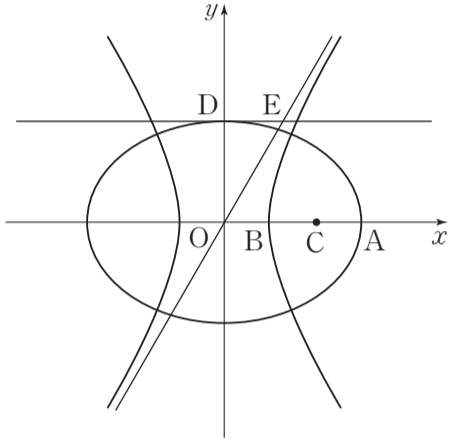
(나) $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$

점 Q가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

15. 그림과 같이 x 축 위의 한 점 A 에 대하여 선분 OA 의 삼등분 점을 점 O 에 가까운 점부터 차례로 B, C 라 하자. 점 A 를 한 꼭짓점으로 하는 타원과 점 B 를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 점 C 를 초점으로 공유한다. 타원의 y 축 위에 있는 한 꼭짓점 D 를 지나고 y 축에 수직인 직선이 쌍곡선의 한 점근선과 제1사분면에서 만나는 점을 E 라 하자. 삼각형 DOE 의 넓이가 $5\sqrt{3}$ 일 때, 타원의 장축의 길이는? (단, 타원과 쌍곡선의 중심은 원점 O 이고, 점 A 의 x 좌표는 양수이다.) [4점]

- ① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$



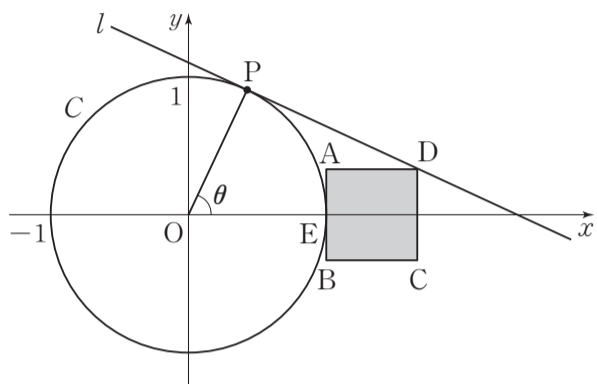
16. 그림과 같이 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 숫자를 확인하고 공을 다시 주머니에 넣는 시행을 3회 반복하였다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 세 수의 합이 3의 배수일 때, 이 세 수가 모두 다를 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



17. 좌표평면에서 원 $C: x^2 + y^2 = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하고, 점 P를 지나고 원 C에 접하는 직선을 l 이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 정사각형 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

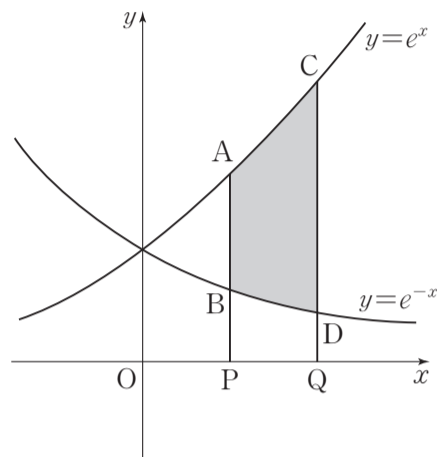
(가) 선분 AB는 원 C와 점 E(1, 0)에서 접하고, $\overline{AE} = \overline{BE}$ 이다.
 (나) 점 D는 제1사분면의 점이고 직선 l 위에 있다.



$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

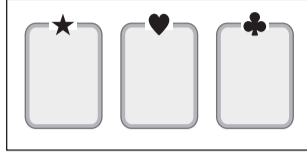
18. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 동시에 출발하여 x 축의 양의 방향으로 x 축 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q가 원점을 출발한 지 t 초 후의 속도는 각각 1, 2로 일정하다. 점 P를 지나고 x 축에 수직인 직선이 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 x 축에 수직인 직선이 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 과 두 선분 AB, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. $S(a)=4$ 가 되도록 하는 상수 a 에 대하여 $S'(a)$ 의 값은? [4점]



- ① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

19. 5 이상의 자연수 n 에 대하여

- ★ 모양의 스티커 $(n-2)$ 장,
- ♥ 모양의 스티커 $(n-1)$ 장,
- ♣ 모양의 스티커 n 장을



★, ♥, ♣가 표시된 세 종이에 남김없이 붙이려고 한다.
다음은 어느 종이에든 표시된 모양과 같은 모양의 스티커를 붙이지 않고 모든 종이에 적어도 2장 이상의 스티커가 붙어 있도록 $(3n-3)$ 장의 스티커를 남김없이 붙이는 경우의 수를 구하는 과정이다.

(i) ★ 모양의 스티커 $(n-2)$ 장을 ♥, ♣가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수는 $n-1$ 이다.
같은 방법으로 생각하면 ★ 모양의 스티커 $(n-2)$ 장, ♥ 모양의 스티커 $(n-1)$ 장, ♣ 모양의 스티커 n 장을 ★, ♥, ♣가 표시된 세 종이에 표시된 모양과 같은 모양의 스티커를 붙이지 않고 남김없이 붙이는 경우의 수는 (가) 이다.

(ii) 세 종이 중 어느 한 종이에만 한 장의 스티커도 붙여 있지 않은 경우의 수는 $3n$ 이다.

(iii) ★가 표시된 종이에 한 장의 스티커만 붙어 있는 경우의 수는 ♥, ♣ 모양의 스티커 중 하나를 ★가 표시된 종이에 붙이고 ★ 모양의 스티커를 ♥, ♣가 표시된 두 종이에 남김없이 붙이는 경우의 수와 같으므로 $2(n-1)$ 이다.
같은 방법으로 생각하면 세 종이 중 어느 한 종이에 한 장의 스티커만 붙어 있는 경우의 수는 (나) 이다.
따라서 구하는 경우의 수는 (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{g(8)h(10)}{f(5)}$ 의 값은? (단, 같은 모양의 스티커는 구분하지 않는다.) [4점]

- ① 180 ② 240 ③ 300 ④ 360 ⑤ 420

20. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.
- (나) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$
- (다) $0 \leq x < 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이고 $x > 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $f(1) = 1$ 이면 방정식 $f(x) = x$ 는 적어도 3개의 실근을 갖는다.
- ㄴ. $f(1) = -1$ 이면 방정식 $f'(x) = -1$ 은 적어도 2개의 실근을 갖는다.
- ㄷ. $f(-1) = -1$ 이면 방정식 $f'(x) = 1$ 은 적어도 1개의 실근을 갖는다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. n 이하의 자연수 k 에 대하여 $x_k = \frac{k}{n}$ 라 하자.

함수 $f(x) = e^{2x} - e^x + ex$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A_k(x_k, f(x_k))$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B_k 라 하고 점 A_k 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C_k 라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\{f(x_k)\}^4}{B_k C_k}$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{4}e^4$ ② $\frac{1}{2}e^4$ ③ e^4 ④ $\frac{1}{8}e^8$ ⑤ $\frac{1}{4}e^8$

단답형

22. ${}_7P_2 + {}_7\Pi_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

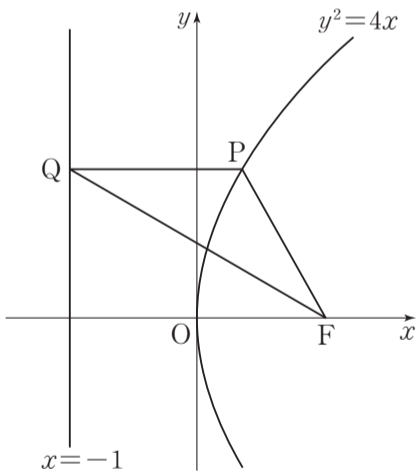
23. 함수 $f(x) = -2 \sin 2x + 10$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

24. 방정식 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 + 3 = 0$ 의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

26. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow B$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 함수 f 의 치역은 B 가 아니다.
- (나) 어떤 함수 $g: B \rightarrow C$ 에 대하여 함수 $g \circ f$ 의 치역은 C 이다.

25. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P 에서 직선 $x = -1$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F 에 대하여 $\cos(\angle PFO) = \frac{3}{5}$ 일 때, 삼각형 PQF 의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]



27. 좌표평면에서 양의 실수 k 에 대하여 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 곡선 $xy = k$ 가 만나는 점 중 제1사분면의 점을 P 라 할 때, 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점 P 에서의 접선과 곡선 $xy = k$ 위의 점 P 에서의 접선이 일치한다. 이 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 할 때, $S+k$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f: X \rightarrow X$ 중에서 임의로 하나를 선택할 때, f 가 일대일함수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다.

- (가) $f(1) < f(3) < f(5) < f(7)$
 (나) $f(2) > f(4) > f(6)$

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 좌표평면 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 사각형 ABCD는 정사각형이다.
 (나) 점 A의 y 좌표는 점 D의 y 좌표보다 작다.
 (다) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (6, 0)$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-4, 2)$

$|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|^2$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

30. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 4x^2$ 에 대하여 함수 $f(\ln x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 $a, b (a < b)$ 라 할 때, 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 함수 $g(x) = f(\ln x)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라 하자. 곡선 $y = h(x)$ 의 변곡점의 좌표가 (m, n) 일 때, $a \times b \times h'(m) = -\frac{e^{\frac{q}{p}}}{4}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

♣ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.