1 함수의 극한

개념 Check 9쪽 ~ 12쪽

1

답 (1) 1 (2) 1 (3) 1

2

(1) $\lim_{x \to -1+} g(x)=0$ (2) $\lim_{x \to -1-} g(x)=1$

(3) $x=-1$에서 $g(x)$의 우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

답 (1) 0 (2) 1 (3) 극한이 존재하지 않는다.

3

답 (1) 0 (2) 0 (3) ∞로 발산 (4) ∞로 발산

4

(1) $\lim_{x \to 2} f(x)=f(2)=2^2+2\times2-1=7$

(2) $\lim_{x \to 2} g(x)=g(2)=2\times2-1=3$

(3) $\lim_{x \to 2} f(x)g(x)=f(2)g(2)=21$

(4) $g(2)\neq0$이므로 $\lim_{x \to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{7}{3}$

답 (1) 7 (2) 3 (3) 21 (4) $\frac{7}{3}$

대표Q 13쪽 ~ 18쪽

대표 Q1

(1) $\lim_{x \to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
$=\lim_{x \to 2}(x^2+2x+4)$
$=2^2+2\times2+4=12$

(2) $\lim_{x \to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-2)}$
$=\lim_{x \to -1}\frac{x+1}{x-2}=\frac{0}{-3}=0$

(3) $\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{2}x}=\lim_{x \to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{\sqrt{2}x(\sqrt{x+4}+2)}$
$=\lim_{x \to 0}\frac{(x+4)-4}{\sqrt{2}x(\sqrt{x+4}+2)}$
$=\lim_{x \to 0}\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{x+4}+2)}$
$=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{4}+2)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

답 (1) 12 (2) 0 (3) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

1-1

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{(x-1)^3+1}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{(x^3-3x^2+3x-1)+1}{x}$
$=\lim_{x \to 0}(x^2-3x+3)=3$

(2) $\lim_{x \to -1}\frac{x^3-x^2-3x-1}{x^3+1}$
$=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x^2-2x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$
$=\lim_{x \to -1}\frac{x^2-2x-1}{x^2-x+1}=\frac{2}{3}$

답 (1) 3 (2) $\frac{2}{3}$

1-2

(1) $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x \to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$
$=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$
$=\lim_{x \to 1}\{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)\}$
$=2\times4=8$

(2) $\lim_{x \to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$
$=\lim_{x \to 2}\frac{(x^2-3)-1}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$
$=\lim_{x \to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$
$=\lim_{x \to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}=\frac{4}{2}=2$

답 (1) 8 (2) 2

대표 Q2

(1) 분모의 최고차항 x^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x \to \infty}\frac{2x^2+4x}{3x^2+1}=\lim_{x \to \infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

(2) 분모의 최고차항 x^3으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

(3) 분모의 최고차항 x^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

(4) 분모의 최고차항 x로 분모, 분자를 나누면

$x>0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}+2}=\frac{1}{3}$$

(5) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이고

$t>0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}+2t}{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+2}{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{1}+2}{-1}=-3$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 0 (3) ∞로 발산 (4) $\frac{1}{3}$ (5) -3

2-1

(1) 분모의 최고차항 x^3으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+3}{5x^3+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{2}{5}$$

(2) 분모의 최고차항 x^3으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-4}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

(3) 분모의 최고차항 x^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{2}=\infty$$

(4) 분모의 최고차항 x로 분모, 분자를 나누면

$x>0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5}+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}+1}{1}=\sqrt{2}+1$$

(5) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이고

$t>0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2+3x}+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{2t^2-3t}-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2-\frac{3}{t}}-1}=\frac{-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=-\sqrt{2}-1$$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) 0 (3) ∞로 발산 (4) $\sqrt{2}+1$ (5) $-\sqrt{2}-1$

대표 Q3

(1) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\frac{1}{x}\times\frac{1+x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=-1$$

(2) x^3으로 묶어내면

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-4x^2+1)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=\infty$$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

답 (1) -1 (2) ∞로 발산 (3) 1

3-1

(1) $\frac{1}{x+2}\left(2+\frac{4}{x}\right)=\frac{1}{x+2}\times\frac{2x+4}{x}=\frac{2}{x}$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}\left(2+\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{2}{x}=-1$$

(2) $\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\frac{1}{x^2}\times\frac{1+x-1}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)}$이고,

$x\to0+$이면 $x(x-1)$의 값은 음수이고 절댓값이 한없이 작아지므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x(x-1)}$$
$$=-\infty$$

답 (1) -1 (2) $-\infty$로 발산

3-2

(1) x^3으로 묶어내면

$$\lim_{x\to -\infty}(x^3-4x^2+1)=\lim_{x\to -\infty}x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=-\infty$$

(2) $\dfrac{\sqrt{x^2+4x+2}-\sqrt{x^2-2x-1}}{1}$로 생각하고

분모, 분자에 $\sqrt{x^2+4x+2}+\sqrt{x^2-2x-1}$을 곱하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+2}-\sqrt{x^2-2x-1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x+2)-(x^2-2x-1)}{\sqrt{x^2+4x+2}+\sqrt{x^2-2x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+4x+2}+\sqrt{x^2-2x-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{6}{1+1}=3$$

답 (1) $-\infty$로 발산 (2) 3

대표 Q4

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\{-(x+1)\}=-2$$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

(2) $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$$\lim_{x\to 1+}[x]=\lim_{x\to 1+}1=1$$

$0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$$\lim_{x\to 1-}[x]=\lim_{x\to 1-}0=0$$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

답 (1) 극한이 존재하지 않는다.
(2) 극한이 존재하지 않는다.

4-1

(1) $x \longrightarrow 0$일 때 $|x|$의 값은 양수이고 절댓값이 한없이 작아지므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=\infty$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+}1=1$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-1)=-1$$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

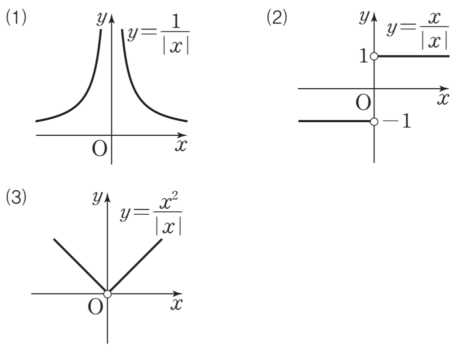
(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}=0$$

답 (1) ∞로 발산 (2) 극한이 존재하지 않는다. (3) 0

참고 그래프는 각각 다음과 같다.



4-2

(1) $2<x<3$일 때, $[x-2]=0$이므로

$$\lim_{x\to 2+}[x-2]=0$$

$1<x<2$일 때, $[x-2]=-1$이므로

$$\lim_{x\to 2-}[x-2]=-1$$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}[x-2](x-2)=0\times 0=0$

$$\lim_{x\to 2-}[x-2](x-2)=(-1)\times 0=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}[x-2](x-2)=0$$

답 (1) 극한이 존재하지 않는다. (2) 0

4-3

(1) $x^2=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 1+$,

$x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x^2)=\lim\limits_{t\to 1+} f(t)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x^2)=\lim\limits_{t\to 1-} f(t)=1$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

(2) $-x^2=t$로 놓으면

$x\to -1+$일 때 $t\to -1+$,

$x\to -1-$일 때 $t\to -1-$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+} f(-x^2)=\lim\limits_{t\to -1+} f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to -1-} f(-x^2)=\lim\limits_{t\to -1-} f(t)=-1$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

답 (1) 극한이 존재하지 않는다.
(2) 극한이 존재하지 않는다.

대표 05

(1) $\lim\limits_{x\to 1+} (x-1)f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} (x-1)\times\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$

$=0\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to 1-} (x-1)f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} (x-1)\times\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$

$=0\times(-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} (x-1)f(x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 1+} x^2f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} x^2\times\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$

$=1\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to 1-} x^2f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} x^2\times\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$

$=1\times(-1)=-1$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

(3) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)\times\lim\limits_{x\to 1+} g(x)$

$=0\times(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)\times\lim\limits_{x\to 1-} g(x)$

$=(-1)\times 0=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)=0$

답 (1) 0 (2) 극한이 존재하지 않는다. (3) 0

5-1

(1) $\lim\limits_{x\to -1+} (x+1)f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} (x+1)\times\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$

$=0\times 1=0$

$\lim\limits_{x\to -1-} (x+1)f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} (x+1)\times\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$

$=0\times(-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} (x+1)f(x)=0$

(2) $x+1=t$로 놓으면

$x\to 0+$일 때 $t\to 1+$, $x\to 0-$일 때 $t\to 1-$

$\lim\limits_{x\to 0+} x^2f(x+1)=\lim\limits_{x\to 0+} x^2\times\lim\limits_{x\to 0+} f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to 0+} x^2\times\lim\limits_{t\to 1+} f(t)$

$=0\times(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 0-} x^2f(x+1)=\lim\limits_{x\to 0-} x^2\times\lim\limits_{x\to 0-} f(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to 0-} x^2\times\lim\limits_{t\to 1-} f(t)$

$=0\times 1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x^2f(x+1)=0$

답 (1) 0 (2) 0

5-2

(1) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\times\lim\limits_{x\to 0+} g(x)$

$=0\times 1=0$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)\times\lim\limits_{x\to 0-} g(x)$

$=1\times 0=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)\times\lim\limits_{x\to 1+} g(x)$

$=(-1)\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)\times\lim\limits_{x\to 1-} g(x)$

$=1\times 1=1$

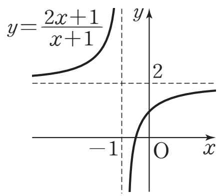
우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

답 (1) 0 (2) 극한이 존재하지 않는다.

날선 06

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$이므로

그래프는 그림과 같다.



(1) $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$

(2) $\dfrac{2x+1}{x+1}=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때, $t\to 2-$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)=\lim\limits_{t\to 2-} f(t)=0$

(3) $\dfrac{2x+1}{x+1}=t$로 놓으면 $x\to -\infty$일 때, $t\to 2+$이므로

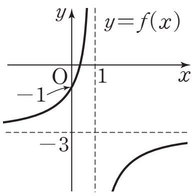
$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)=\lim\limits_{t\to 2+} f(t)=1$

답 (1) $-\infty$로 발산 (2) 0 (3) 1

6-1

$f(x)=\frac{3x-1}{1-x}=-3+\frac{2}{1-x}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(1) $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=-1$

(2) $\lim_{x\to 1+}f(x)=-\infty$

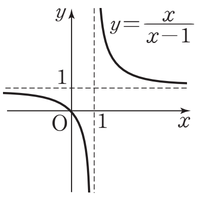
(3) $\lim_{x\to 1-}f(x)=\infty$

(4) $\lim_{x\to \infty}f(x)=-3$

답 (1) -1 (2) $-\infty$로 발산 (3) ∞로 발산 (4) -3

6-2

(1) $y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$이므로 그래프는 그림과 같다.

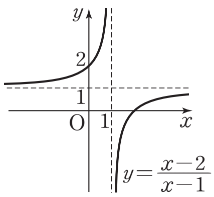


$\frac{x}{x-1}=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때, $t\to 1+$이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\lim_{t\to 1+}f(t)=0$

(2) $y=\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}$이므로 그래프는 그림과 같다.



$\frac{x-2}{x-1}=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때, $t\to 1-$

이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\lim_{t\to 1-}f(t)=1$

답 (1) 0 (2) 1

개념 Check

19쪽~20쪽

5

$x\to 2$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다. 곧,

$\lim_{x\to 2}(x^3+a)=0$에서 $8+a=0$ $\quad\therefore a=-8$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3+a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

$\therefore b=12$

답 $a=-8$, $b=12$

6

$x\to -1$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to$ 0이므로 (분모) $\to$ 0이다. 곧,

$\lim_{x\to -1}(x+a)=0$에서 $-1+a=0$ $\quad\therefore a=1$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+a}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2$$

$\therefore b=-2$

답 $a=1$, $b=-2$

7

$\frac{1}{x-1}<f(x)<\frac{1}{x-2}$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

답 0

대표Q

21쪽~24쪽

대표 Q7

(1) $x\to 1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다. 곧,

$1+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-1$

이때

$x^2+ax+b=x^2+ax-a-1=(x-1)(x+a+1)$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+a+1}{x+1}=\frac{a+2}{2}$$

곧, $\frac{a+2}{2}=3$ $\quad\therefore a=4$, $b=-5$

(2) $x\to -1$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to$ 0이므로 (분모) $\to$ 0이다. 곧,

$\sqrt{-1+2+a}=0$ $\quad\therefore a=-1$

이때

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+a}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+2)-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+2}+1)=2$$

$\therefore b=2$

답 (1) $a=4,\ b=-5$ (2) $a=-1,\ b=2$

7-1

(1) $x\to-2$일 때, 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,

$(-2)^2+a=0 \qquad \therefore a=-4$

이때

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+a}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4}{3}$$

$\therefore b=\frac{4}{3}$

(2) $x\to0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,

$\sqrt{a}+b=0 \qquad \therefore b=-\sqrt{a}$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+a}+b}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x+a-a}{2x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}=\frac{1}{4\sqrt{a}}$$

곧, $\frac{1}{4\sqrt{a}}=\frac{3}{4}$, $\sqrt{a}=\frac{1}{3} \qquad \therefore a=\frac{1}{9},\ b=-\frac{1}{3}$

답 (1) $a=-4,\ b=\frac{4}{3}$ (2) $a=\frac{1}{9},\ b=-\frac{1}{3}$

7-2

$x\to2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이다. 곧,

$2^2+2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a-4$

이때

$x^2+ax+b=x^2+ax-2a-4=(x-2)(x+a+2)$

이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2}{x+a+2}=\frac{4}{a+4}$$

곧, $\frac{4}{a+4}=2$, $a+4=2 \qquad \therefore a=-2,\ b=0$

답 $a=-2,\ b=0$

대표 08

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$이므로 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=a$$

$\therefore a=3$

이때 $f(x)=3x^2+bx+c$이고

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $x\to-1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧, $f(-1)=0$이므로

$3-b+c=0 \qquad \therefore c=b-3$

이때 $f(x)=3x^2+bx+b-3=(x+1)(3x+b-3)$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x+b-3)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{3x+b-3}{x-1}=\frac{b-6}{-2}$$

곧, $\frac{b-6}{-2}=3$이므로 $b=0,\ c=-3$

$\therefore f(x)=3x^2-3$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2 \quad \cdots ㉠, \quad \lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=6 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. $\quad \therefore f(1)=0$

㉡에서 $x\to3$일 때, 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. $\quad \therefore f(3)=0$

곧, $f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

㉠에 대입하면 $\lim_{x\to1}(x-3)Q(x)=-2$이므로

$-2Q(1)=-2 \qquad \therefore Q(1)=1$

㉡에 대입하면 $\lim_{x\to3}(x-1)Q(x)=6$이므로

$2Q(3)=6 \quad \therefore Q(3)=3$

$Q(1)=1$, $Q(3)=3$이고 차수가 가장 낮은 다항식 $Q(x)$는 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$라 하자.

$Q(1)=1$이므로 $a+b=1$

$Q(3)=3$이므로 $3a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

따라서 $Q(x)=x$이므로 $f(x)=x(x-1)(x-3)$

답 (1) $f(x)=3x^2-3$
(2) $f(x)=x(x-1)(x-3)$

8-1

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=2 \quad \cdots ㉠, \quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 $f(x)-3x^3$은 이차함수이므로

$f(x)=3x^3+ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1}=a$$

$\therefore a=2$

㉡에서 $x\to0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다. 곧, $f(0)=0$이므로 $c=0$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2+bx}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(3x^2+2x+b)=b$$

곧, $b=2$이므로 $f(x)=3x^3+2x^2+2x$

답 $f(x)=3x^3+2x^2+2x$

8-2

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2 \quad \cdots ㉠, \quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=1 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 $x\to0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다. $\quad \therefore f(0)=0$

㉡에서 $x\to-1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다. $\quad \therefore f(-1)=0$

곧, $f(x)=x(x+1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

㉠에 대입하면 $\lim_{x\to0}(x+1)Q(x)=2 \quad \therefore Q(0)=2$

㉡에 대입하면 $\lim_{x\to-1}xQ(x)=1 \quad \therefore Q(-1)=-1$

$Q(0)=2$, $Q(-1)=-1$이고 차수가 가장 낮은 다항식 $Q(x)$는 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$라 하자.

$Q(0)=2$이므로 $b=2 \quad \therefore Q(x)=ax+2$

$Q(-1)=-1$이므로 $-a+2=-1 \quad \therefore a=3$

따라서 $Q(x)=3x+2$이므로 $f(x)=x(x+1)(3x+2)$

답 $f(x)=x(x+1)(3x+2)$

대표 Q9

(1) $x^2-2x<f(x)<x^2+3x$에서 각 변을 $2x^2+1$로 나누면 $\frac{x^2-2x}{2x^2+1}<\frac{f(x)}{2x^2+1}<\frac{x^2+3x}{2x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)+g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2\{f(x)-h(x)\}}{f(x)+\{f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-f(x)+2h(x)}{2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{2h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)+g(x)}=-\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$

9-1

$2x^2-1<xf(x)<2x^2+1$에서 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{2x^2-1}{x^2}<\frac{f(x)}{x}<\frac{2x^2+1}{x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

답 2

9-2

$\dfrac{f(x)+g(x)}{1-g(x)}=h(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=h(x)\{1-g(x)\}$

$\{1+h(x)\}g(x)=h(x)-f(x)$

$\therefore g(x)=\dfrac{h(x)-f(x)}{1+h(x)}$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to3}h(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to3}g(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{h(x)-f(x)}{1+h(x)}=\dfrac{2-3}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$

답 $-\dfrac{1}{3}$

참고 $x=3$에서 $g(x)$의 극한이 존재함을 알 수 있으면 $\lim\limits_{x\to3}g(x)=a$로 놓고 다음과 같이 풀 수 있다.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+g(x)}{1-g(x)}=\dfrac{3+a}{1-a}=2$

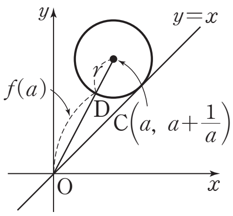
$\therefore a=-\dfrac{1}{3}$

대표 Q10

원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 하자.

r는 점 $\mathrm{C}\left(a,\ a+\dfrac{1}{a}\right)$과 직선 $y=x$, 곧 $x-y=0$ 사이의 거리이므로

$r=\dfrac{\left|a-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{a}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2a}\ (\because a>0)$



그림에서 원점 O와 원 위의 점 사이 거리의 최솟값 $f(a)$는 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OC}}-r$이므로

$f(a)=\overline{\mathrm{OC}}-r$

$=\sqrt{a^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2a}$

$=\sqrt{2a^2+2+\dfrac{1}{a^2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2a}$

$\therefore \lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{f(a)}{a}=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\sqrt{2a^2+2+\dfrac{1}{a^2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2a}}{a}$

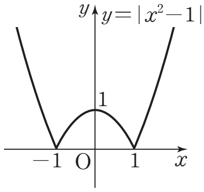
$=\lim\limits_{a\to\infty}\left(\sqrt{2+\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2a^2}\right)$

$=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

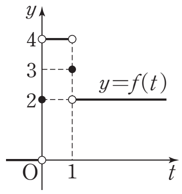
10-1

$y=|x^2-1|$의 그래프가 그림과 같으므로



$f(t)=\begin{cases}0\ (t<0)\\2\ (t=0,\ t>1)\\3\ (t=1)\\4\ (0<t<1)\end{cases}$

곧, $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



(1) $\lim\limits_{t\to1-}f(t)=4$

(2) $\lim\limits_{t\to0+}f(t)=4$

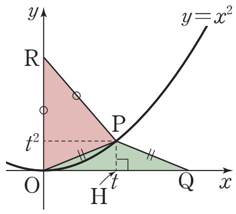
$\lim\limits_{t\to0-}f(t)=0$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

답 (1) 4 (2) 극한이 존재하지 않는다.

10-2

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 OQ를 수직이등분한다.



이때 점 H의 좌표는 $(t,\ 0)$이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$이다.

곧, 삼각형 POQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$

점 R의 좌표를 $(0,\ a)\ (a>0)$라 하면

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$이고 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$이므로

$a=\sqrt{t^2+(a-t^2)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2=t^2+t^4-2at^2+a^2$

$2at^2=t^2(1+t^2)$

$\therefore a=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

곧, 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$이므로 삼각형 PRO의 넓이 $T(t)$는

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\times t=\dfrac{t^3}{4}+\dfrac{t}{4}$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{t^3}{4}+\frac{t}{4}-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

연습과 실전 1 함수의 극한 25쪽~28쪽

01 ④ **02** ㄱ, ㄹ

03 (1) 11 (2) 1 (3) $-\frac{1}{16}$ (4) -2 (5) 0 (6) 2

04 ⑤ **05** $\frac{3}{2}$ **06** (1) 1 (2) -6

07 (1) 극한이 존재하지 않는다.
(2) 극한이 존재하지 않는다. (3) 0

08 ⑤ **09** ③ **10** ③ **11** (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{30}$

12 ④ **13** $f(x)=x^3-2x^2-11x+24$

14 ①, ④ **15** ④ **16** 4 **17** -11 **18** 2

19 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0

01

$\lim_{x\to -1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)=2-1=1$

답 ④

02

ㄱ. $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x(x-1)}=\infty$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty$ (거짓)

ㄹ. $\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

03

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x-18}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+9)(x-2)}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2}(x+9)=11$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

(3) $\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{x-3}\times\frac{4-x-1}{4(x+1)}$
$=-\frac{1}{4(x+1)}$

이므로

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to 3}\left\{-\frac{1}{4(x+1)}\right\}$
$=-\frac{1}{16}$

(4) 분모의 최고차항 x^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2+3x-1}{2x^2+5x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}=-2$$

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)-(2x-1)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}$
$=0$

(6) $x=-t$로 놓으면
$x\to -\infty$일 때 $t\to\infty$이고 $t>0$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}}=2$$

다른 풀이

$x\to -\infty$이면 $x<0$이므로

$\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}=-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

곧, 분모의 최고차항 x로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

답 (1) 11 (2) 1 (3) $-\frac{1}{16}$ (4) -2 (5) 0 (6) 2

04

$\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$

$1-x=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(1-x)=\lim_{t\to 0+} f(t)=-2$

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)f(1-x)=(-1)\times(-2)=2$

답 ⑤

05

$\lim_{x\to 1}(x+1)\times\lim_{x\to 1} f(x)=2f(1)=1$

$\therefore f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to 1}(2x^2+1)\times\lim_{x\to 1} f(x)=3f(1)$

$=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

06 전략 가우스 기호, 절댓값 기호가 있으면 우극한, 좌극한을 나누어 생각한다.

(1) $2<x<3$일 때, $[x]=2$, $[x+2]=4$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{[x]^2+[x]-2}{[x+2]}=\frac{4+2-2}{4}=1$$

(2) $$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+2x-8}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x+4)(x-2)}{-(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\{-(x+4)\}=-6$$

답 (1) 1 (2) -6

참고 (1) $x\to 2-$이면 $[x]=1$, $[x+2]=3$이므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{[x]^2+[x]-2}{[x+2]}=\frac{1+1-2}{3}=0$$

07 전략 우극한, 좌극한을 나누어 생각한다.

(1) $\lim_{x\to 1+} xf(x)=1\times 1=1$

$\lim_{x\to 1-} xf(x)=1\times 2=2$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

(2) $\lim_{x\to -1+} xf(x)=(-1)\times(-2)=2$

$\lim_{x\to -1-} xf(x)=(-1)\times(-1)=1$

우극한과 좌극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.

(3) $\lim_{x\to 0+} xf(x)=0\times 1=0$

$\lim_{x\to 0-} xf(x)=0\times(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} xf(x)=0$

답 (1) 극한이 존재하지 않는다.
(2) 극한이 존재하지 않는다.
(3) 0

08 전략 $\frac{t-1}{t+1}$, $\frac{4t-1}{t+1}$을 각각 치환하여 $t\to\infty$일 때, 극한을 조사한다.

$m=\frac{t-1}{t+1}$로 놓으면 $m=1-\frac{2}{t+1}$

$t\to\infty$일 때 $m\to 1-$이므로

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{m\to 1-} f(m)=2$$

또 $n=\frac{4t-1}{t+1}$로 놓으면 $n=4-\frac{5}{t+1}$

$t\to\infty$일 때 $n\to 4-$이므로

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{n\to 4-} f(n)=5$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+5=7$$

답 ⑤

09 전략 $x\to 1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

$x\to 1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 곧,

$a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$

이때

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{x+1-2}$$

$$=\lim_{x\to 1} a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})$$

$$=2\sqrt{2}a$$

곧, $2\sqrt{2}a=2\sqrt{2}$ $\quad\therefore a=1,\ b=-1$

$\therefore ab=-1$

답 ③

10 전략 무리식 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$는 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$를 곱한다.

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+ax)-(x^2-ax)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2a}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{a}{x}}}$

$=\dfrac{2a}{2}=a$

$\therefore a=4$

답 ③

11 전략 (1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한이 아니다.

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$를 이용할 수 있는 꼴로 변형한다.

$x\to2$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

$\therefore f(2)=3$

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x+2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x+2)}{x^2-4}=-\dfrac{3}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{x-2}{f(x)-3}\times\dfrac{1}{f(x)+3}\right\}$

$=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{30}$

답 (1) $-\dfrac{3}{4}$ (2) $\dfrac{1}{30}$

12 전략 이차항의 계수가 1이고 두 근이 α, β이므로 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

$x=a$를 $f(x)-(x-a)$ 또는 $f(x)+(x-a)$에 대입하면 값이 0이므로 $f(a)=0$

따라서 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-a)(x-b)$라 하면

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\{(x-b)-1\}}{(x-a)\{(x-b)+1\}}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-b)-1}{(x-b)+1}$

$=\dfrac{a-b-1}{a-b+1}$

곧, $\dfrac{a-b-1}{a-b+1}=\dfrac{3}{5}$이므로 $5a-5b-5=3a-3b+3$

$\therefore b=a-4$

$(x-a)(x-b)=(x-a)(x-a+4)$이므로

$f(x)=0$의 두 근은 a와 $a-4$이다.

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

답 ④

13 전략 $f(x)-x^3$의 차수와 최고차항의 계수부터 정한다.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2+2x}=-2$ $\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x^2-2x-3}=1$ $\cdots$ ㉡

㉠에서 $f(x)-x^3$은 이차함수이다.

$f(x)-x^3=-2x^2+ax+b$로 놓으면

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$

㉡에서 $x\to3$일 때, 극한값이 존재하고

(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다. 곧, $f(3)=0$이므로

$f(3)=27-18+3a+b=0$

$\therefore b=-3a-9$

$f(x)=x^3-2x^2+ax-3a-9$

$=(x-3)(x^2+x+a+3)$

이므로

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x^2+x+a+3)}{(x+1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x+a+3}{x+1}=\dfrac{a+15}{4}$

곧, $\dfrac{a+15}{4}=1$이므로 $a=-11$, $b=24$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-11x+24$

답 $f(x)=x^3-2x^2-11x+24$

14 전략 함수의 극한의 성질을 이용한다.

① 극한의 성질에서

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}+\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to a}\{2f(x)\}=2\lim\limits_{x\to a}f(x)$

이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

또

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$

$=2\lim\limits_{x\to a}g(x)$

이므로 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재한다. (참)

② [반례] $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\times\frac{1}{x}\right)=1$이지만

$\lim_{x\to 0} g(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

③ [반례] $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0} x^2=0$이지만

$\lim_{x\to 0} g(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

④ 극한의 성질에서

$$\lim_{x\to a} g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)$$

이므로 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. (참)

⑤ [반례] $f(x)=1$, $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\neq 0) \\ 2 & (x=0)\end{cases}$라 하면

$f(x)<g(x)$이지만

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

15 전략 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+ax+b$로 놓는다.

$f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}+b$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}+b$

이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{2a}{x}$

$\lim_{x\to 0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2a|x|}{x}$

의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{2a|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2ax}{x}=\lim_{x\to 0+}2a=2a$

$\lim_{x\to 0-}\frac{2a|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-2ax}{x}=\lim_{x\to 0-}(-2a)=-2a$

에서 $2a=-2a$ $\quad\therefore a=0$

$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+b\right)=b$

에서 $b=3$이므로 $f(x)=x^2+3$

$\therefore f(2)=7$

답 ④

16 전략 $f(x)\le g(x)$ ➡ $\lim_{x\to\triangle} f(x)\le\lim_{x\to\triangle} g(x)$

$3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$

$5x^2-16x+12=(5x-6)(x-2)$

(i) $x>2$일 때, 부등식의 각 변을 $x-2$로 나누면

$3x-2\le\frac{f(x)}{x-2}\le 5x-6$

이때 $\lim_{x\to 2+}(3x-2)=4$, $\lim_{x\to 2+}(5x-6)=4$이므로

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)}{x-2}=4$

(ii) $x<2$일 때, 부등식의 각 변을 $x-2$로 나누면

$3x-2\ge\frac{f(x)}{x-2}\ge 5x-6$

이때

$\lim_{x\to 2-}(3x-2)=4$, $\lim_{x\to 2-}(5x-6)=4$이므로

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{x-2}=4$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

답 4

17 전략 $\lim_{x\to 2} f(x)=\infty$이므로 분모, 분자를 $f(x)$로 나눈다.

$\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-3g(x)}{f(x)}=0$에서 분모, 분자를 $f(x)$로 나누면

$\lim_{x\to 2}\left\{2-3\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$2-3\times\frac{g(x)}{f(x)}=h(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to 2} h(x)=0$이고 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2-h(x)}{3}$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{2-h(x)}{3}=\frac{2}{3}$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4g(x)}{f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1+4\times\frac{g(x)}{f(x)}}{1-2\times\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{1+4\times\frac{2}{3}}{1-2\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{11}{3}}{-\frac{1}{3}}$$
$$=-11$$

답 -11

18 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

직선 PQ는 직선 $y=x+1$과 수직이므로 기울기는 -1이

고 점 $P(t, t+1)$을 지난다.
따라서 직선 PQ의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t) \qquad \therefore y=-x+2t+1$

곧, $Q(0, 2t+1)$이므로

$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$

$\overline{AQ}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

답 2

19 전략 $f(f(x))$의 극한

➡ $f(x)=t$로 놓고 우극한, 좌극한에 주의한다.

(1) $x \to 2+$일 때, $f(x) \to 1+$이므로
$f(x)=t$로 놓으면
$\lim_{x\to 2+} f(f(x))=\lim_{t\to 1+} f(t)=0$

(2) $x \to 2-$일 때, $f(x) \to 1-$이므로
$f(x)=t$로 놓으면
$\lim_{x\to 2-} f(f(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=1$

(3) $x \to 1+$일 때, $f(x) \to 0+$이므로
$f(x)=t$로 놓으면
$\lim_{x\to 1+} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=1$

(4) $x \to 1-$일 때, $f(x)=1$이므로
$\lim_{x\to 1-} f(f(x))=\lim_{x\to 1-} f(1)=f(1)=0$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0

2 함수의 연속

개념 Check

30쪽 ~ 32쪽

1

② $\lim_{x\to b} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

④ $f(x)$가 $x=d$에서 정의되지 않는다.

따라서 x의 값에서 연속인 것은 ①, ⑤이다.

답 ①, ⑤

2

답 (1) $(-3, 5)$ (2) $[4, 10]$ (3) $(-\infty, 3)$

3

(1) 다항함수는 모든 실수에서 연속이므로
$(-\infty, \infty)$

(2) 유리함수는 분모가 0이 아닌 모든 실수에서 연속이다.
곧, $x\neq -2$이므로
$(-\infty, -2), (-2, \infty)$

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, -2), (-2, \infty)$

대표Q

33쪽 ~ 36쪽

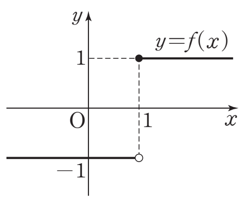
대표 Q1

(1) $x>1$일 때, $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$x<1$일 때, $f(x)=\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$x=1$일 때, $f(1)=1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



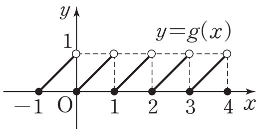
다른 풀이

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(2) $-1\le x<0$일 때, $[x]=-1$이므로 $g(x)=x+1$
$0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로 $g(x)=x$
$1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로 $g(x)=x-1$
$2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $g(x)=x-2$
$3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로 $g(x)=x-3$
$x=4$일 때, $[x]=4$이므로 $g(4)=0$
따라서 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 $-1\le x\le4$에서 $g(x)$가 불연속인 x의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

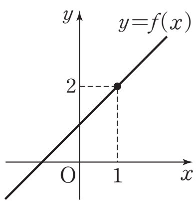


답 (1) 불연속 (2) 0, 1, 2, 3, 4

1-1

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

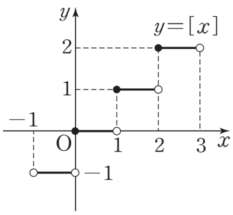
$f(1)=2$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.



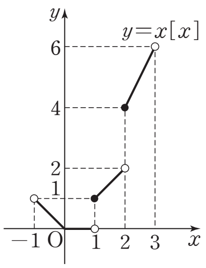
답 연속

1-2

(1) $-1<x<0$일 때, $y=-1$
$0\le x<1$일 때, $y=0$
$1\le x<2$일 때, $y=1$
$2\le x<3$일 때, $y=2$
따라서 구간 $(-1, 3)$에서 $y=[x]$가 불연속인 x의 값은 0, 1, 2이다.



(2) $-1<x<0$일 때, $y=-x$
$0\le x<1$일 때, $y=0$
$1\le x<2$일 때, $y=x$
$2\le x<3$일 때, $y=2x$
따라서 구간 $(-1, 3)$에서 $y=x[x]$가 불연속인 x의 값은 1, 2이다.



답 (1) 0, 1, 2 (2) 1, 2

대표 Q2

(1) $f(x)$는 $x\ne2$에서 연속이다.
그런데 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=f(2)=3 \quad \cdots ㉠$$

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,
$4+2a+b=0 \qquad \therefore b=-2(a+2)$
㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4=3$$

$\therefore a=-1,\ b=-2$

(2) $x\ne-1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+5x+a}{x+1}$
곧, $f(x)$는 $x\ne-1$에서 연속이다.
그런데 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+a}{x+1}=f(-1) \quad \cdots ㉠$$

$x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,
$1-5+a=0 \qquad \therefore a=4$
㉠에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+4)=3$$

답 (1) $a=-1$, $b=-2$ (2) $a=4$, $f(-1)=3$

2-1

$f(x)$는 $x\ne1$에서 연속이다.
그런데 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+a}{x-1}=f(1)=b \quad \cdots ㉠$$

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,
$1+a=0 \qquad \therefore a=-1$
㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

답 $a=-1$, $b=2$

2-2

$x\geq 0$에서 $x\neq 2$일 때,

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+a}{x-2}$이고 $f(x)$는 연속이다.

그런데 $f(x)$는 $x\geq 0$인 모든 실수에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}+a}{x-2}=f(2)$ $\cdots$ ㉠

$x\to 2$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 곧,

$\sqrt{2}+a=0$ $\therefore a=-\sqrt{2}$

㉠에 대입하면

$$f(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $a=-\sqrt{2}$, $f(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

대표 03

(1) $f(x)$와 $g(x)$는 $x\neq -1$, $x\neq 1$에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 $x\neq -1$, $x\neq 1$에서 연속이다.

(i) $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)g(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=1\times 1=1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=1$

한편 $f(1)g(1)=1\times(-1)=-1$이므로

$f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 1 이다.

(2) $f(x)$는 $x\neq -1$, $x\neq 1$에서 연속이므로 $\{f(x)\}^2$도 $x\neq -1$, $x\neq 1$에서 연속이다.

(i) $\lim\limits_{x\to -1+}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to -1-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to -1}\{f(x)\}^2=1$

한편 $\{f(-1)\}^2=1^2=1$이므로

$\{f(x)\}^2$은 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1+}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)\}^2=1$

한편 $\{f(1)\}^2=1^2=1$이므로

$\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 $\{f(x)\}^2$이 불연속인 x의 값은 없다.

답 (1) -1, 1 (2) 없다.

3-1

(1) $f(x)$와 $g(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq 1$에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 $x\neq 0$, $x\neq 1$에서 연속이다.

(i) $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)g(x)=0\times 1=0$

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)g(x)=1\times 0=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$

한편 $f(0)g(0)=0\times 1=0$이므로

$f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=1\times 1=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)$가 불연속인 x의 값은 1이다.

(2) $f(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq 1$에서 연속이므로 $\{f(x)\}^2$도 $x\neq 0$, $x\neq 1$에서 연속이다.

(i) $\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=0^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)\}^2$이 존재하지 않는다.

따라서 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1+}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)\}^2=1$

한편 $\{f(1)\}^2=1^2=1$이므로

$\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 $\{f(x)\}^2$이 불연속인 x의 값은 0이다.

답 (1) 1 (2) 0

날선 Q4

$f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이고, $g(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 불연속이다. 따라서 $f(x)g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이면 $f(-1)=0$, $f(1)=0$이다.
이때 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이므로
$f(x)=(x+1)(x-1)$

답 $f(x)=(x+1)(x-1)$

4-1

$f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이고, $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 불연속이다. 따라서 $f(x)g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이면 $f(0)=0$, $f(2)=0$이다.
이때 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이므로
$f(x)=x(x-2)$

답 $f(x)=x(x-2)$

4-2

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때,
$g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로
$f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $f(x)g(x)$도 연속이다.
곧, $a+3=a^2-a$이므로
$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(ii) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,
$f(x)$가 $x=a$에서 불연속이어도
$g(a)=0$이면 $f(x)g(x)$는 연속이다.
곧, $g(a)=-a-7=0$ $\quad\therefore a=-7$

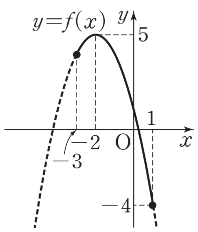
(i), (ii)에서 a의 값은 -7, -1, 3

답 -7, -1, 3

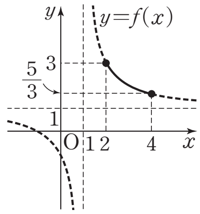
개념 Check 37쪽~38쪽

4

(1) $f(x)=-x^2-4x+1$
$\quad=-(x+2)^2+5$
라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 $f(x)$의
최댓값은 $f(-2)=5$,
최솟값은 $f(1)=-4$



(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$
라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 $f(x)$의
최댓값은 $f(2)=3$,
최솟값은 $f(4)=\dfrac{5}{3}$



답 (1) 최댓값 : 5, 최솟값 : -4
(2) 최댓값 : 3, 최솟값 : $\dfrac{5}{3}$

5

$f(-1)=-1-2-3=-6$, $f(1)=1+2-3=0$
이므로 $f(-1)<-3<f(1)$
또 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.
따라서 사잇값 정리에 의해 $f(c)=-3$인 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

답 풀이 참조

대표Q 39쪽

대표 Q5

ㄱ. $f(x)=2x^3+x^2-5$라 하면 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-2<0$, $f(2)=15>0$이다.
곧, 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)$가 구간 $[-2, 3]$에서 연속이라는 조건이 없으므로 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2, 3)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $f(x)$는 구간 $[1, 5]$에서 연속이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$와 구간 $(3, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 곧, 구간 $(1, 5)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

5-1

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=(x^5+x^3+2x^2+k)-(x^3+5x^2+3)$
$\quad=x^5-3x^2+k-3$

$h(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 사잇값 정리에 의해 $h(1)h(2)<0$이면 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 곧,

$h(1)h(2)=(k-5)(k+17)<0$

$\therefore\ -17<k<5$

따라서 정수 k는 $-16, -15, \cdots, 4$로 21개이다.

답 21

5-2

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty, f(-2)<0, f(-1)>0, f(1)>0,$

$f(2)<0, f(4)>0$

곧, 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

답 4개

연습과 실전 2 함수의 연속

40쪽 ~ 42쪽

01 ②, ⑤		02 $a=-2$, $b=\frac{1}{4}$			03 10
04 ⑤	05 5	06 $\frac{3}{5}$	07 ④	08 0	09 3
10 -2	11 $g(x)=2x^2+8x+8$		12 ④		13 5개
14 ④					

01

① $\lim_{x\to1} f(x)=2$ (거짓)

② $f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$

따라서 $x=1$에서 불연속이다. (참)

③ $\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=0\times2=0$ (거짓)

④ $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$g(1)=0$, $\lim_{x\to1} g(x)=0$

이므로 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (거짓)

⑤ $h(x)=x^2f(x)$라 하면

$h(1)=1$, $\lim_{x\to1} h(x)=1\times2=2$

이므로 $x^2f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

02

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}+a}{x^2}=f(0)=b \qquad \cdots ㉠$$

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,

$\sqrt{0+4}+a=0 \qquad \therefore a=-2$

㉠에 대입하면

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

답 $a=-2$, $b=\frac{1}{4}$

03

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^3+4x^2-x-4}{x-1}$

곧, $f(x)$는 $x\neq1$에서 연속이다. 그런데 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2-x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+4)(x+1)=10$$

이므로 $f(1)=10$

답 10

04

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 더하거나 곱해도 연속함수이다.

곧, ①, ②, ③은 연속함수이다.

④ $g(x)=x^2+1\geq1$이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 연속함수이다.

⑤ $x=-1$일 때 분모가 0이므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 연속함수가 아니다.

따라서 모든 실수에서 연속함수가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

05

$g(x)=f(x)-2$라 하면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

방정식 $f(x)-2=0$, 곧 $g(x)=0$이 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지면 사잇값 정리에 의해

$g(1)g(2)<0$이므로

$g(1)=f(1)-2=k$, $g(2)=f(2)-2=k-6$에서

$g(1)g(2)=k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다.

답 5

06 전략 $x=3$에서 극한값을 구한다.

$x=3$에서 연속이면 $x=3$에서 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3-} f(x)$

$\lim_{x\to 3+} [x]=3$, $\lim_{x\to 3-} [x]=2$이므로

$\lim_{x\to 3+} f(x)=9a-7$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=4a-4$

$9a-7=4a-4$이므로 $5a=3$ $\qquad \therefore\ a=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

07 전략 $x=2$에서 극한값과 함숫값을 구한다.

$g(x)=(3x-a)f(x)$라 하면

$g(2)=(6-a)f(2)=(6-a)\times 1=6-a$ $\qquad$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2+} (3x-a)f(x)$

$=(6-a)\times 1=6-a$ $\qquad$ ⋯ ㉡

$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2-} (3x-a)f(x)$

$=(6-a)\times 3=18-3a$ $\qquad$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢이 같아야 하므로

$6-a=18-3a$, $2a=12$ $\qquad \therefore\ a=6$

답 ④

08 전략 $x=1$에서 연속임을 확인하고, 구간 $[0, 4]$에서의 함수가 반복됨을 이용한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=1+a+b$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (x^2+ax+b)=1+a+b$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} 3x=3$

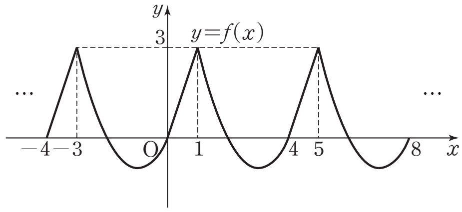
곧, $3=1+a+b$ $\qquad \therefore\ a+b=2$ $\qquad$ ⋯ ㉠

(ii) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고,

$f(x+4)=f(x)$이므로 $f(0)=f(4)$

곧, $0=16+4a+b$ $\qquad \therefore\ 4a+b=-16$ $\qquad$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=8$



$f(x)=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ x^2-6x+8 & (1\le x\le 4) \end{cases}$이므로

$f(10)=f(2)=2^2-6\times 2+8=0$

답 0

09 전략 $x=0$에서 함수 $f(x)$가 연속임을 이용한다.

$x<0$일 때 $f(x)=x^2+4-g(x)$,

$x>0$일 때 $f(x)=x^2+2x+8+g(x)$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=4-\lim_{x\to 0-} g(x)$ $\qquad$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to 0+} f(x)=8+\lim_{x\to 0+} g(x)$ $\qquad$ ⋯ ㉡

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

㉠, ㉡을 변변 더하면

$2f(0)=12-\lim_{x\to 0-} g(x)+\lim_{x\to 0+} g(x)$

$\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$이므로

$2f(0)=12-6=6$ $\qquad \therefore\ f(0)=3$

답 3

10 전략 $x=1$에서 함수 $g(x)$의 우극한과 좌극한을 이용한다.

함수 $g(x)=f(x)f(x-1)$이 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이다.

$x-1=t$로 놓으면

$x\to 1+$일 때 $t\to 0+$, $x\to 1-$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x-1)=\lim_{t\to 0+} f(t)=a$

$\lim_{x\to 1-} f(x-1)=\lim_{t\to 0-} f(t)=-1$

곧,

$\lim_{x\to 1+} f(x)f(x-1)=(2+a)\times a=2a+a^2$

$\lim_{x\to 1-} f(x)f(x-1)=(2+a)\times(-1)=-2-a$

극한값이 존재하므로

$2a+a^2=-2-a$, $a^2+3a+2=0$

$(a+1)(a+2)=0$

$a\neq-1$이므로 $a=-2$

답 -2

11 전략 $x=-2$에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이다.

$g(x)$가 이차함수이므로

$g(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2+bx+c}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(a-1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a-1$$

$a-1=1$이므로 $a=2$

함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=-2$에서도 연속이다.

$$\therefore \lim_{x\to-2}f(x)g(x)=\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+c}{x+2}$$
$$=f(-2)g(-2) \quad \cdots ㉠$$

$x\to-2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 곧,

$8-2b+c=0 \qquad \therefore c=2b-8$

㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}f(x)g(x)=\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+bx+2b-8}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x-4+b)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(2x-4+b)$$
$$=b-8$$

$f(-2)g(-2)=1\times0=0$이므로 $b=8$, $c=8$

$\therefore g(x)=2x^2+8x+8$

답 $g(x)=2x^2+8x+8$

12 전략 $x=2$에서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 연속이면 $x=2$에서 극한값이 존재하고 $x=2$에서 함숫값과 같다.

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$$\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{2a+1}{1}=2a+1$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2a+1}{1}=2a+1$$
$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2a+1}{2}=a+\frac{1}{2}$$

극한값이 존재하므로

$2a+1=a+\dfrac{1}{2} \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

답 ④

13 전략 함수가 연속일 때, 방정식의 실근의 개수의 최솟값
➡ 사잇값 정리를 이용한다.

$f(-x)=-f(x)$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 원점에 대칭이고 원점을 지난다.

또 $f(1)f(2)<0$이므로 $f(-1)f(-2)<0$이고
$f(3)f(4)<0$이므로 $f(-3)f(-4)<0$이다.

곧, 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$, $(-2, -1)$, $(3, 4)$, $(-4, -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=0$을 포함하여 적어도 5개이다.

답 5개

14 전략 최대 · 최소 정리나 사잇값 정리는 연속함수에서 성립한다.

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-2+}f(x)g(x)=2\times2=4$

$\displaystyle\lim_{x\to-2-}f(x)g(x)=(-2)\times(-2)=4$

$f(-2)g(-2)=2\times2=4$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=-2$에서 연속이다. (거짓)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $f(x)g(x)$는 구간 $[-4, 1]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다. (참)

ㄷ. $f(x)g(x)$는 구간 $[-4, 1]$에서 연속이고
$f(-4)g(-4)>0$, $f(1)g(1)<0$이다.
곧, 방정식 $f(x)g(x)=0$은 구간 $(-4, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

3 미분계수와 도함수

개념 Check

44쪽~47쪽

1

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$

$=\dfrac{7-(-1)}{2}=4$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$

$=\dfrac{30-(-2)}{4}=8$

답 (1) 4 (2) 8

2

(1) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2(1+\Delta x)+3-5}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2=2$

다른 풀이

$f'(1)=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{(2x+3)-5}{x-1}$

$=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{2(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x \to 1} 2=2$

(2) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-(1+\Delta x)^2-(-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(-2-\Delta x)=-2$

다른 풀이

$f'(1)=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{-x^2-(-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x \to 1}(-x-1)=-2$

답 (1) 2 (2) -2

3

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$

그런데

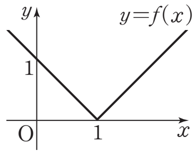
$\lim\limits_{\Delta x \to 0+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0+} 1=1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0-}(-1)=-1$

곧, 극한값이 존재하지 않으므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

다른 풀이

그래프가 $x=1$에서 뾰족하므로 미분가능하지 않다.



답 미분가능하지 않다.

4

$f(x)=2x^2$이라 하면 점 $(2, 8)$에서 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2(2+\Delta x)^2-8}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(8+2\Delta x)=8$

답 8

5

(1) $x=2$

(2) $x=2$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.
$x=4$에서 연속이지만 그래프가 뾰족하므로 미분가능하지 않다.

답 (1) 2 (2) 2, 4

참고 **함수의 연속**

다음 세 조건을 모두 만족시키면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

대표Q 48쪽~51쪽

대표 Q1

(1) x가 -1에서 2까지 변할 때, 함수 $f(x)=x^2-1$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{3-0}{3}=1$$

$x=a$에서 함수 $f(x)$의 순간변화율은

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^2-1\}-(a^2-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

평균변화율과 순간변화율이 같으므로

$2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$라 하면 $x=2$에서 미분계수는 $f'(2)$이므로

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

1-1

x가 0에서 3까지 변할 때, 함수 $f(x)=x^3$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3^3-0}{3}=9$$

$x=a$에서 함수 $f(x)$의 순간변화율은

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2)=3a^2$$

평균변화율과 순간변화율이 같으므로

$3a^2=9 \qquad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because 0<a<3)$

답 $\sqrt{3}$

1-2

$f(x)=\frac{1}{x}$이라 하면 점 $(1,\ 1)$에서 접선의 기울기는

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{1+h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{1+h}\right)=-1$$

답 -1

대표 Q2

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}$$
$$=2f'(1)$$
$$=2\times 2=4$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}\times h\right\}$$
$$=f'(1)\times 0$$
$$=2\times 0=0$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)\right\}$$
$$=f'(1)-\{-3f'(1)\}=4f'(1)$$
$$=4\times 2=8$$

답 (1) 4 (2) 0 (3) 8

2-1

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)\right\}$$
$$=-2f'(a)$$
$$=-2\times 3=-6$$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times\frac{2}{3}\right\}$

$=\frac{2}{3}f'(a)=\frac{2}{3}\times3=2$

(3) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h^3)-f(a)}{h^2}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h^3)-f(a)}{2h^3}\times2h\right\}$

$=f'(a)\times0$

$=3\times0=0$

(4) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2\right.$

$\left.-\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)\right\}$

$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$

$=3\times3=9$

답 (1) -6 (2) 2 (3) 0 (4) 9

대표 03

(1) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\frac{1}{2}$

$=2\times\frac{1}{2}=1$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=f'(1)\times2$

$=2\times2=4$

(3) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{f(x)-f(1)}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times(x^2+x+1)\right\}$

$=\frac{1}{f'(1)}\times3$

$=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$

(4) $f(x^2)-x^2f(1)=f(x^2)-f(1)-\{x^2f(1)-f(1)\}$

$=f(x^2)-f(1)-(x^2-1)f(1)$

이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-x^2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}-\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)-(x+1)f(1)\right\}$

$=f'(1)\times2-2\times f(1)=2\times2-2\times3=-2$

답 (1) 1 (2) 4 (3) $\frac{3}{2}$ (4) -2

3-1

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x^3-a^3}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{x^2+ax+a^2}\right\}$

$=f'(a)\times\frac{1}{3a^2}=-\frac{1}{3a^2}$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^3-a^3}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\times\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}\right\}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\times\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}\right\}$

$=f'(a^2)\times\frac{2a}{3a^2}=3\times\frac{2}{3a}=\frac{2}{a}$

(3) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{f(x)-f(a)}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{x-a}{f(x)-f(a)}\times(x+a)\right\}$

$=\frac{1}{f'(a)}\times2a=-2a$

(4) $af(x)-xf(a)$

$=af(x)-af(a)-\{xf(a)-af(a)\}$

$=af(x)-af(a)-(x-a)f(a)$

이므로

$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{af(x)-af(a)}{x-a}-\frac{(x-a)f(a)}{x-a}\right\}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times a-f(a)\right\}$

$=af'(a)-f(a)=-a-2$

답 (1) $-\frac{1}{3a^2}$ (2) $\frac{2}{a}$ (3) $-2a$ (4) $-a-2$

대표 Q4

(1) $f(x)=(x-1)|x-1|$이라 하자.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to0}|h|$$

에서 $\lim_{h\to0+}|h|=\lim_{h\to0-}|h|=0$

따라서 $f'(1)$이 존재하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

다른 풀이

$f(x)=(x-1)|x-1|$이라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)|x-1|-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}|x-1|$$

에서 $\lim_{x\to1+}|x-1|=\lim_{x\to1-}|x-1|=0$

따라서 $f'(1)$이 존재하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=[x]$라 하자.

$1<x<2$일 때 $[x]=1$,

$0<x<1$일 때 $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}[x]=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}[x]=0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

다른 풀이

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{1-1}{h}=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-1}{h}=\infty$$

따라서 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 (1) 미분가능하다. (2) 미분가능하지 않다.

4-1

(1) $f(x)=|x^2-1|$이라 하자.

$x>1$일 때, $f(x)=x^2-1$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$

$-1<x<1$일 때, $f(x)=-(x^2-1)$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$$

따라서 $f'(1)$이 존재하지 않으므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2) $f(x)=|x-1|^3$이라 하자.

$x>1$일 때, $f(x)=(x-1)^3$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)^3-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-1)^2=0$$

$x<1$일 때, $f(x)=-(x-1)^3$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)^3-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-(x-1)^2\}=0$$

따라서 $f'(1)$이 존재하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

답 (1) 미분가능하지 않다. (2) 미분가능하다.

4-2

$f(x)=[x]$라 하자.

(1) $f(1.5)=1$

또 h의 절댓값이 충분히 작을 때 $f(1.5+h)=1$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1.5+h)-f(1.5)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$$

따라서 $f'(1.5)$가 존재하므로 $x=1.5$에서 미분가능하다.

(2) $\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}[x]=-2$

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}[x]=-3$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

답 (1) 미분가능하다. (2) 미분가능하지 않다.

개념 Check

52쪽~54쪽

6

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{4(x+h)-4x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}4=4$$

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

답 (1) $f'(x)=4$ (2) $f'(x)=3x^2$

7

(1) $y'=0$

(2) $y'=2\times5x^4=10x^4$

답 (1) $y'=0$ (2) $y'=10x^4$

8

(1) $y'=3(x^2)'+2(x)'-(1)'$

$=3\times2x+2=6x+2$

또 $x=1$일 때 $y'=6+2=8$

따라서 $x=1$에서 미분계수는 8이다.

(2) $y'=(x^4)'-2(x^3)'-5(x)'+(2)'$

$=4x^3-2\times3x^2-5=4x^3-6x^2-5$

또 $x=1$일 때 $y'=4-6-5=-7$

따라서 $x=1$에서 미분계수는 -7이다.

답 (1) $y'=6x+2$, 8 (2) $y'=4x^3-6x^2-5$, -7

대표Q 55쪽 ~ 60쪽

대표 Q5

(1) $y'=5-4\times2x+2\times3x^2=6x^2-8x+5$

(2) $y'=(x^2+x+1)'(2x-1)+(x^2+x+1)(2x-1)'$

$=(2x+1)(2x-1)+(x^2+x+1)\times2$

$=4x^2-1+2x^2+2x+2=6x^2+2x+1$

(3) $y'=(x+1)'(x-2)(x^2-x)$

$+(x+1)(x-2)'(x^2-x)$

$+(x+1)(x-2)(x^2-x)'$

$=(x-2)(x^2-x)+(x+1)(x^2-x)$

$+(x+1)(x-2)(2x-1)$

$=x^3-3x^2+2x+x^3-x+2x^3-3x^2-3x+2$

$=4x^3-6x^2-2x+2$

(4) $y'=2(x^2-2x+3)(x^2-2x+3)'$

$=2(x^2-2x+3)(2x-2)$

$=4(x-1)(x^2-2x+3)$

답 (1) $y'=6x^2-8x+5$ (2) $y'=6x^2+2x+1$

(3) $y'=4x^3-6x^2-2x+2$

(4) $y'=4(x-1)(x^2-2x+3)$

5-1

(1) $y'=\dfrac{1}{5}\times5x^4-\dfrac{3}{4}\times4x^3-2$

$=x^4-3x^3-2$

(2) $y'=(x^3+2)'(1-2x)+(x^3+2)(1-2x)'$

$=3x^2(1-2x)+(x^3+2)\times(-2)$

$=3x^2-6x^3-2x^3-4$

$=-8x^3+3x^2-4$

(3) $y'=(x^2-3x+1)'(x^3-2x)$

$+(x^2-3x+1)(x^3-2x)'$

$=(2x-3)(x^3-2x)+(x^2-3x+1)(3x^2-2)$

$=2x^4-4x^2-3x^3+6x+3x^4-2x^2-9x^3+6x$

$+3x^2-2$

$=5x^4-12x^3-3x^2+12x-2$

(4) $y'=(x-1)'(2x+1)(5x-2)$

$+(x-1)(2x+1)'(5x-2)$

$+(x-1)(2x+1)(5x-2)'$

$=(2x+1)(5x-2)+(x-1)\times2\times(5x-2)$

$+(x-1)(2x+1)\times5$

$=10x^2+x-2+10x^2-14x+4+10x^2-5x-5$

$=30x^2-18x-3$

답 (1) $y'=x^4-3x^3-2$

(2) $y'=-8x^3+3x^2-4$

(3) $y'=5x^4-12x^3-3x^2+12x-2$

(4) $y'=30x^2-18x-3$

5-2

(1) $y'=3(2x+3)^2(2x+3)'$

$=3(2x+3)^2\times2$

$=6(2x+3)^2$

(2) $y'=\{(x+1)^3\}'(1-3x)^2+(x+1)^3\{(1-3x)^2\}'$

$=\{3(x+1)^2(x+1)'\}(1-3x)^2$

$+(x+1)^3\{2(1-3x)(1-3x)'\}$

$=3(x+1)^2(1-3x)^2$

$+(x+1)^3\{2(1-3x)\times(-3)\}$

$=3(x+1)^2(1-3x)^2-6(x+1)^3(1-3x)$

$=3(x+1)^2(1-3x)(1-3x-2x-2)$

$=3(x+1)^2(3x-1)(5x+1)$

답 (1) $y'=6(2x+3)^2$

(2) $y'=3(x+1)^2(3x-1)(5x+1)$

대표 Q6

(1) $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(2)=3,\ f'(1)=1,\ f'(0)=-3$이므로

$4a+2b+c=3,\ 2a+b=1,\ b=-3$

연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3,\ c=1$

$\therefore f(x)=2x^2-3x+1$

(2) $f(x)+f'(x)$가 삼차함수이므로 $f(x)$는 삼차함수이고 삼차항은 $2x^3$이다.

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고

$f(x)+f'(x)=2x^3+(a+6)x^2+(2a+b)x+b+c$

이므로

$a+6=6,\ 2a+b=3,\ b+c=4$

연립하여 풀면 $a=0,\ b=3,\ c=1$

$\therefore f(x)=2x^3+3x+1$

답 (1) $f(x)=2x^2-3x+1$
(2) $f(x)=2x^3+3x+1$

6-1

$f(x)=x^3+a^2x^2+ax+b$에서 $f(-1)=-1$이므로

$-1+a^2-a+b=-1$ $\cdots$ ㉠

$f'(x)=3x^2+2a^2x+a$이고, $f'(-1)=3$이므로

$3-2a^2+a=3,\ 2a^2-a=0,\ a(2a-1)=0$

$a\neq 0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{4}$

답 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$

6-2

$(x+1)f'(x)-2f(x)-1=0,\ f(0)=0$이므로

$x=0$을 대입하면

$f'(0)-2f(0)-1=0$ $\quad\therefore f'(0)=1$

$x=-1$을 대입하면

$-2f(-1)-1=0$ $\quad\therefore f(-1)=-\frac{1}{2}$

또 $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx\,(a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$이고

$f'(0)=1$이므로 $b=1$

$f(-1)=-\frac{1}{2}$이므로 $a-b=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$

답 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$

6-3

$f(x)$가 n차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로

$f(x)f'(x)$는 $(n+n-1)$차함수이다.

$f(x)f'(x)$는 삼차함수이므로

$2n-1=3$ $\quad\therefore n=2$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$이고

$f(x)f'(x)=(x^2+ax+b)(2x+a)$

$=2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab$

이므로

$3a=-9,\ a^2+2b=5,\ ab=c$

연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-2,\ c=6$

$\therefore f(x)=x^2-3x-2$

답 $c=6,\ f(x)=x^2-3x-2$

대표 Q7

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}$

$=2f'(1)$

$f(x)=x^4+2x^2-1$에서 $f'(x)=4x^3+4x$이므로

$2f'(1)=2\times(4+4)=16$

(2) 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이다.

곧, $1-4+a=0$에서 $a=3$

$f(x)=x^n-4x^2+3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-4x^2+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=nx^{n-1}-8x$이고 조건에서 $f'(1)=-3$

이므로

$n-8=-3$ $\quad\therefore n=5$

답 (1) 16 (2) $a=3,\ n=5$

7-1

$f'(x)=5x^4-4x$이고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형해 보자.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2-\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)\right\}$

$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)$

$=3\times 1=3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x-1)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to -1}(x-1)$

$\displaystyle=\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times(-2)=-2f'(1)$

$=-2\times 1=-2$

답 (1) 3 (2) -2

7-2

$f(x)=x^6+3x+2$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^6+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

$f'(x)=6x^5+3$이므로 $f'(-1)=-3$

답 -3

7-3

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$이므로

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 곧, $f(2)=0$

$f(2)=8+4a+2b+c=0$ … ㉠

이때 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$이므로 $f'(2)=5$

$f'(2)=12+4a+b=5$ … ㉡

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$\displaystyle=f'(1)\times\frac{1}{2}$

$\displaystyle\frac{1}{2}f'(1)=-1$이므로 $f'(1)=-2$

$f'(1)=3+2a+b=-2$ … ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

㉠에 대입하면 $c=2$

$\therefore f(x)=x^3-x^2-3x+2$

답 $f(x)=x^3-x^2-3x+2$

대표 Q8

(1) $x^{10}+px+q$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}+px+q=(x-1)^2Q(x)$ … ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면 $1+p+q=0$ … ㉡

㉠은 x에 대한 항등식이고 $Q(x)$는 다항식이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+p=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면 $10+p=0$ $\therefore p=-10$

㉡에 대입하면 $q=9$

(2) $x^{10}+px+q$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}+px+q=(x+1)^2Q(x)+5x-2$ … ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-p+q=-7$ … ㉡

㉠은 x에 대한 항등식이고 $Q(x)$는 다항식이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+p=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+5$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+p=5$ $\therefore p=15$

㉡에 대입하면 $q=7$

답 (1) $p=-10$, $q=9$ (2) $p=15$, $q=7$

8-1

x^5+ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^5+ax^2+b=(x+1)^2Q(x)$ … ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a+b=0$ … ㉡

㉠은 x에 대한 항등식이고 $Q(x)$는 다항식이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$5-2a=0 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$

ⓛ에 대입하면 $b=-\frac{3}{2}$

답 $a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{3}{2}$

8-2

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉠

$f(2)=5$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2a+b=5$ ⋯ ㉡

㉠은 x에 대한 항등식이고 $Q(x)$는 다항식이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$ ⋯ ㉢

$f'(2)=-2$이므로 ㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a=-2$

㉡에 대입하면 $b=9$이므로 구하는 나머지는 $-2x+9$

답 $-2x+9$

대표 09

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

$f_1(x)=x^3+ax+b\ (x\geq 1)$, $f_2(x)=-x^2+1\ (x<1)$이라 하자.

(i) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to 1+} f_1(x)=\lim_{x\to 1-} f_2(x)$, 곧

$f_1(1)=f_2(1)$에서

$1+a+b=-1+1 \quad \therefore a+b+1=0$ ⋯ ㉠

(ii) $f(x)$는 $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$$f_1'(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}$$

$$f_2'(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1}$$

에서 $f_1'(1)=f_2'(1)$

$f_1'(x)=3x^2+a,\ f_2'(x)=-2x$이므로

$3+a=-2 \quad \therefore a=-5$

㉠에 대입하면 $b=4$

다른 풀이

$x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to 1+}(x^3+ax+b)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+1)=f(1)$

$1+a+b=0$ ⋯ ㉠

$x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^3+ax+b-(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x^2+x+1+a)=a+3$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-x^2+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(-x-1)=-2$$

$a+3=-2$에서 $a=-5$

㉠에 대입하면 $b=4$

답 $a=-5,\ b=4$

9-1

$f_1(x)=x^4+ax+1\ (x\geq -1)$,

$f_2(x)=bx^2+x\ (x<-1)$라 하자.

(i) $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$f_1(-1)=f_2(-1)$에서

$1-a+1=b-1 \quad \therefore a+b=3$ ⋯ ㉠

(ii) $f(x)$는 $x=-1$에서 미분계수가 존재하므로

$f_1'(-1)=f_2'(-1)$

$f_1'(x)=4x^3+a,\ f_2'(x)=2bx+1$이므로

$-4+a=-2b+1 \quad \therefore a+2b=5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

답 $a=1,\ b=2$

9-2

$f_1(x)=1,\ f_2(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x\geq 1) \\ f_2(x) & (x<1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능하다.

(i) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f_1(1)=f_2(1)$에서

$1=1+a+b \quad \therefore a+b=0$ ⋯ ㉠

(ii) $f(x)$는 $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$f_1'(1)=f_2'(1)$

$f_1'(x)=0,\ f_2'(x)=2x+a$이므로

$0=2+a \quad \therefore a=-2$

㉠에 대입하면 $b=2$

답 $a=-2,\ b=2$

날선 10

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

(2) $f'(0)=5$이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=5$

$f(0)=0$을 대입하면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=5$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x\right\}\\&=2x+5\end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) $f'(x)=2x+5$

10-1

$f(x+y)=f(x)f(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$

$f(x)>0$이므로 $f(0)=1$

또 $f'(0)=3$이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=3$

$f(0)=1$을 대입하면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=3$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\times\frac{f(h)-1}{h}\right\}=3f(x)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3f(x)}{f(x)}=3$$

답 3

10-2

$f(x+y)=f(x)+f(y)-5xy+2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+2$ $\qquad\therefore f(0)=-2$

$f'(0)=5$이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=5$

$f(0)=-2$를 대입하면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2}{h}=5$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-5xh+2-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{-5x+\frac{f(h)+2}{h}\right\}=-5x+5\end{aligned}$$

답 $f'(x)=-5x+5$

연습과 실전 3 미분계수와 도함수

61쪽~64쪽

01 1	02 $\frac{4}{3}$	03 (1) -2 (2) -6		04 13
05 -1	06 3	07 5	08 -201	09 ④
10 ④	11 2	12 -1	13 3	14 -6 15 ⑤
16 ⑤	17 ②	18 ④		

19 $f(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$ 20 13

21 $f'(1)=2$, $f'(2)=3$

01

$x=2$에서 $f(x)$의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(h+4)=4\end{aligned}$$

x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a+2)-f(a)}{a+2-a}=\frac{(a+2)^2-a^2}{2}=2a+2$$

조건에서 $4=2a+2$이므로 $a=1$

다른 풀이

$x=2$에서 $f(x)$의 미분계수는 $f'(2)$이다.

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$이므로 $f'(2)=4$

답 1

02

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}\right\}\\&=\frac{3}{2}f'(1)=2\end{aligned}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

03

(1) $$\begin{aligned}&\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to -2}\left\{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\frac{1}{x-2}\right\}\\&=f'(-2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\end{aligned}$$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(2)-2f(x)+2f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{(x-2)f(2)}{x-2}-2\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{f(2)-2\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$

$=f(2)-2f'(2)=2-2\times4=-6$

답 (1) -2 (2) -6

04

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x-2}=5$에서 극한값이 존재하고 $x \to 2$일 때 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다. 곧, $f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 3$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x-2}=\lim_{t\to 3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}=f'(3)$

곧, $f'(3)=5$

$\therefore f(3)+f'(3)=8+5=13$

답 13

05

$f'(x)=(2x+1)(ax^4+3x-2)+(x^2+x)(4ax^3+3)$

$f'(1)=-2$이므로 $3(a+1)+2(4a+3)=-2$

$11a+9=-2 \qquad \therefore a=-1$

답 -1

06

$f'(x)=2ax$이므로 $4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$

$4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$

항등식이므로 $4a=4a^2+1$, $4b=4 \qquad \therefore b=1$

$4a^2-4a+1=0$, $(2a-1)^2=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$에서 $f(2)=3$

답 3

07

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1 \quad \cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-1}{x-3}=2 \quad \cdots$ ㉡

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 3$일 때 (분모) → 0이므로 (분자) → 0, 곧 $f(3)=2$이다.

이때 ㉠은 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=1 \qquad \therefore f'(3)=1$

㉡에서 극한값이 존재하고 $x\to 3$일 때 (분모) → 0이므로 (분자) → 0, 곧 $g(3)=1$이다.

이때 ㉡은 $\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=2 \qquad \therefore g'(3)=2$

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $x=3$에서 미분계수는

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=1\times1+2\times2=5$

답 5

08

$x^{100}+x-1$을 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하면

$x^{100}+x-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+1-1=a+b \qquad \therefore a+b=1 \quad \cdots$ ㉡

㉠은 x에 대한 항등식이고 $Q(x)$는 다항식이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$100x^{99}+1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$100+1=a \qquad \therefore a=101$

㉡에 대입하면 $b=-100$

$R(x)=101x-100$이므로 $R(-1)=-201$

답 -201

09

$f_1(x)=x^3+ax\ (x<1)$, $f_2(x)=bx^2+x+1\ (x\geq1)$이라 하면 f_1, f_2는 미분가능한 함수이다.

(i) $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f_1(1)=f_2(1)$에서

$1+a=b+2 \qquad \therefore a-b=1 \quad \cdots$ ㉠

(ii) $f(x)$는 $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$f_1'(1)=f_2'(1)$

$f_1'(x)=3x^2+a$, $f_2'(x)=2bx+1$이므로

$3+a=2b+1 \qquad \therefore a-2b=-2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3 \qquad \therefore a+b=7$

답 ④

10

전략 미분계수의 기하적 의미를 이용한다.

① $f'(1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서 접선의 기울기이므로 $f'(1)>0$ (거짓)

② $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이고, $f'(2)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서 접선의 기울기이므로 $f'(2)>0$ (거짓)

③ $\lim_{x\to -2+}f(x)>0$이므로 $\lim_{x\to -2+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$에서 $x\to -2+$일 때 (분모) $\to 0$이지만 (분자) $\to 0$이 아니다.
곧, 수렴하지 않는다. (거짓)

④ $f(x)$는 $x=-2$, $x=3$에서 미분가능하지 않다. (참)

⑤ 미분가능하고 접선의 기울기가 0인 점은 2개이므로 $f'(x)=0$인 x의 값은 2개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

11 전략 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

x가 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$이므로

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9a+3b-a-b}{2}=4a+b$$

$4a+b=0$이므로 $b=-4a$

따라서 $f(x)=ax^2-4ax$, $f'(x)=2ax-4a$이다.

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{f(1+h)-f(1)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(3-2h)-f(3)}{h}}{\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}\times(-2)}{\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}}$$
$$=\frac{-2f'(3)}{f'(1)}=\frac{-4a}{-2a}=2$$

답 2

12 전략 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한이므로 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$을 이용할 수 있도록 정리한다.

$$\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{x-1}=\frac{\{f(x)\}^2}{x-1}-2\times\frac{f(x)}{x-1}$$이고,

$f(1)=0$이므로

$$\frac{\{f(x)\}^2}{x-1}=\frac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}$$
$$=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\{f(x)+f(1)\}$$
$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\{f(x)+f(1)\}-2\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]$$
$$=f'(1)\times 2f(1)-2f'(1)=-2f'(1)$$

조건에서 $-2f'(1)=2$ $\quad\therefore f'(1)=-1$

답 -1

13 전략 $\dfrac{1}{n}=h$로 치환하여 정리한다.

$\dfrac{1}{n}=h$라 하면 $n=\dfrac{1}{h}$이고 $n\to\infty$일 때 $h\to 0+$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$
$$=2f'(x)$$

조건에서 $2f'(x)=2x+4$, $f'(x)=x+2$

$\therefore f'(1)=3$

답 3

14 전략 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한이므로 $(fg)'$을 생각한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-6}{x-1}=5 \quad \cdots ㉠$$

에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$, 곧 $f(1)g(1)=6$이다.

$f(1)=2$이므로 $g(1)=3$

이때 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면 ㉠은

$\lim_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=5$ $\quad\therefore h'(1)=5$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=5$

조건에서 $3\times 3+2g'(1)=5$ $\quad\therefore g'(1)=-2$

$\therefore g(1)g'(1)=3\times(-2)=-6$

답 -6

15 전략 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$을 만족시키지만 $f'(0)$이 존재하지 않는 함수를 찾는다.

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=-1$$

이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}|x|=0$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=1$, $\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=-1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}0=0$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}2=2$$

이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㅁ. $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}(x-3)=-3$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}(x+3)=3$$

이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ⑤

참고 다음 함수의 연속과 미분가능성을 조사해도 된다.

ㄱ. $y=\begin{cases} x & (x\ge0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ ㄴ. $y=\begin{cases} x^2 & (x\ge0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$

ㄷ. $y=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$ ㄹ. $y=\begin{cases} 0 & (x\ge0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$

ㅁ. $y=\begin{cases} x^2-3x & (x\ge0) \\ x^2+3x & (x<0) \end{cases}$

16 전략 주어진 함수를 $g(x)$라 하고 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$이 존재하는지 조사한다.

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이다.

ㄱ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-0}{x}=\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

따라서 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)=x^2f(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-0}{x}=\lim_{x\to0}xf(x)=0$$

따라서 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $g(x)=\frac{1}{1+xf(x)}$이라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+xf(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\{1+xf(x)\}}{x\{1+xf(x)\}}=\lim_{x\to0}\frac{-f(x)}{1+xf(x)}=-f(0)$$

따라서 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

17 전략 $f'(x)$에 $x=1$, $x=4$를 대입한 꼴만 생각한다.

$$\begin{aligned} f'(x)=&(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-10) \\ &+(x-1)(x-3)\times\cdots\times(x-10) \\ &+(x-1)(x-2)(x-4)\times\cdots\times(x-10) \\ &\vdots \\ &+(x-1)(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-9) \end{aligned}$$

이 식에 $x=1$을 대입하면 $x-1$을 포함한 9개의 항은 0이므로

$$\begin{aligned} f'(1)&=(1-2)(1-3)(1-4)\times\cdots\times(1-10) \\ &=(-1)^9\times1\times2\times3\times\cdots\times9 \end{aligned}$$

또 $x=4$를 대입하면 $x-4$를 포함한 9개의 항은 0이므로

$$\begin{aligned} f'(4)&=(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)\times\cdots\times(4-10) \\ &=3\times2\times1\times(-1)^6\times1\times2\times\cdots\times6 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f'(4)}=(-1)^3\times\frac{7\times8\times9}{3\times2\times1}=-84$$

답 ②

18 전략 $f(1)=0$, $f(2)=0$이면 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가지므로 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$로 놓는다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 곧, $f(2)=0$이다.

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$라 하자.

$$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-2)(x-a)$$

이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-a)}{\{f'(x)\}^2}=\frac{2-a}{\{f'(2)\}^2}=\frac{2-a}{(2-a)^2}=\frac{1}{2-a}$$

$\frac{1}{2-a}=\frac{1}{4}$이므로 $a=-2$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

$\therefore f(3)=2\times 1\times 5=10$

답 ④

19 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 식이 0이 아닌 극한값이 존재하므로 분모와 분자의 차수가 같음을 이용하여 $f(x)$의 차수를 구한다.

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항이 $2x^3$이다.

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ ⋯ ㉠

라 하면 $f'(x)=6x^2+2ax+b$ ⋯ ㉡

(나)의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 곧, $f(0)=0$

㉠에서 $c=0$

또 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$이므로 $f'(0)=-2$

㉡에서 $b=-2$

(다)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서 접선의 기울기가 3이므로 $f'(-1)=3$

$f'(x)=6x^2+2ax-2$이고 $f'(-1)=3$이므로

$6-2a-2=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

답 $f(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

20 전략 전체 함수를 $f(x)$라 하고, $x=1$, $x=0$에서 미분가능할 조건을 이용한다.

전체 함수를 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\ge 1) \\ ax^3+bx^2+cx+1 & (0<x<1) \\ 1 & (x\le 0)\end{cases}$

이라 하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=a+b+c+1$

에서 $a+b+c+1=0$ ⋯ ㉠

또 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax^3+bx^2+cx}{x}=\lim_{x\to 0+}(ax^2+bx+c)=c$$

에서 $c=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=-a-1$

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{ax^3-(a+1)x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(ax^2-x-1)}{x-1}=a-2$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$$

에서 $a-2=0 \qquad \therefore a=2,\ b=-3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=4+9+0=13$

답 13

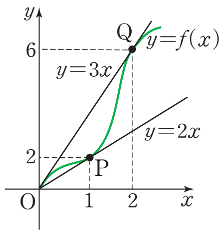
참고 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$은 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$를 이용해도 된다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=c$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3a+2b+c$$

21 전략 $f'(1)$의 값은 그래프 위의 $x=1$인 점에서 접선의 기울기를 구하거나 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$을 계산한다.

$2x\le f(x)\le 3x$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=2x$와 $y=3x$ 사이에 있다.
직선 $y=2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 2)$와 직선 $y=3x$ 위의 점 $\mathrm{Q}(2, 6)$을 지나고 $f(x)$는 미분가능하다.
그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프는 점 P, Q에서 각각 직선 $y=2x$, $y=3x$에 접한다.
미분계수는 접선의 기울기이므로 $f'(1)=2$, $f'(2)=3$



다른 풀이

$f(1)=2$이므로

$2x-2\le f(x)-f(1)$

$0<x<1$일 때, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le 2$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le 2$ $\cdots$ ㉠

$x>1$일 때, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge 2$이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge 2$ $\cdots$ ㉡

$f(x)$가 미분가능하면 ㉠, ㉡의 극한이 같으므로
$f'(1)=2$이고, 같은 이유로 $f'(2)=3$

답 $f'(1)=2$, $f'(2)=3$

4 접선과 평균값 정리

개념 Check

66쪽

1

(1) 접점은 $(-1, 3)$
$f'(x)=2x-2$이므로 접선의 기울기는
$f'(-1)=-4$
따라서 접선의 방정식은 $y-3=-4(x+1)$
$\therefore y=-4x-1$

(2) 접점은 $(-1, 1)$
$f'(x)=3x^2+2x$이므로 접선의 기울기는
$f'(-1)=1$
따라서 접선의 방정식은 $y-1=1\times(x+1)$
$\therefore y=x+2$

답 (1) $y=-4x-1$ (2) $y=x+2$

2

(1) 곡선 위의 $x=a$인 점에서 접한다고 하자.
$f'(x)=-4x+1$이고 접선의 기울기가 3이므로
$f'(a)=3$, $-4a+1=3$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$이므로 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

(2) (1)에서 접선의 기울기가 3인 접점의 좌표는
$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$이므로 접선의 방정식은
$y+1=3\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $\therefore y=3x+\frac{1}{2}$

답 (1) $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ (2) $y=3x+\frac{1}{2}$

대표Q

67쪽 ~ 70쪽

대표 Q1

$f(x)=x^3-x$라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

(1) $f(-2)=-8+2=-6$, $f'(-2)=12-1=11$
이므로
$y+6=11(x+2)$ $\therefore y=11x+16$

(2) $f(2)=8-2=6$, $f'(2)=12-1=11$이므로

$y-6=-\frac{1}{11}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{1}{11}x+\frac{68}{11}$

답 (1) $y=11x+16$ (2) $y=-\frac{1}{11}x+\frac{68}{11}$

1-1

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

(1) $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로

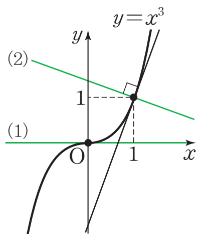
$y-0=0\times(x-0)$

$\therefore y=0$

(2) $f(1)=1$, $f'(1)=3$이므로

$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$



답 (1) $y=0$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

대표 02

$f(x)=x^3-x$라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

(1) 곡선 위의 $x=a$인 점에서 접한다고 하면 $f'(a)=2$

$3a^2-1=2$, $a^2=1$ $\therefore a=\pm1$

$a=1$일 때, $f(1)=1-1=0$이므로

$y-0=2(x-1)$ $\therefore y=2x-2$

$a=-1$일 때, $f(-1)=-1+1=0$이므로

$y-0=2(x+1)$ $\therefore y=2x+2$

(2) 접점을 $(a, f(a))$라 하면 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y-(a^3-a)=(3a^2-1)(x-a)$ $\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$1-(a^3-a)=(3a^2-1)(-1-a)$

$a^2(2a+3)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=-\frac{3}{2}$

㉠에 대입하면

$a=0$일 때, $y=-x$

$a=-\frac{3}{2}$일 때,

$y-\left(-\frac{27}{8}+\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{27}{4}-1\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$\therefore y=\frac{23}{4}x+\frac{27}{4}$

답 (1) $y=2x-2$, $y=2x+2$

(2) $y=-x$, $y=\frac{23}{4}x+\frac{27}{4}$

2-1

$f(x)=x^4+x-1$이라 하면 $f'(x)=4x^3+1$

(1) 곡선 위의 $x=a$인 점에서 접한다고 하자.

직선 $y=-3x+4$에 평행하므로 $f'(a)=-3$

$4a^3+1=-3$, $a^3+1=0$, $(a+1)(a^2-a+1)=0$

a는 실수이므로 $a=-1$

$f(-1)=1-1-1=-1$이므로

$y+1=-3(x+1)$ $\therefore y=-3x-4$

(2) 곡선 위의 $x=a$인 점에서 접한다고 하자.

직선 $y=-\frac{1}{5}x-1$과 수직이므로 $f'(a)=5$

$4a^3+1=5$, $a^3-1=0$, $(a-1)(a^2+a+1)=0$

a는 실수이므로 $a=1$

$f(1)=1+1-1=1$이므로

$y-1=5(x-1)$ $\therefore y=5x-4$

답 (1) $y=-3x-4$ (2) $y=5x-4$

2-2

(1) $f(x)=x^2+3$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y-(a^2+3)=2a(x-a)$ $\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로 $-a^2-3=2a(1-a)$

$a^2-2a-3=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

㉠에 대입하면

$a=-1$일 때, $y-4=-2(x+1)$ $\therefore y=-2x+2$

$a=3$일 때, $y-12=6(x-3)$ $\therefore y=6x-6$

(2) $f(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$ $\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(-a)$

$2a^3-2a^2-8=0$, $a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

a는 실수이므로 $a=2$

㉠에 대입하면

$y-(8-8+8)=(12-8)(x-2)$

$\therefore y=4x$

답 (1) $y=-2x+2$, $y=6x-6$ (2) $y=4x$

대표 Q3

(1) $f(x)=x^3+ax^2-2x+b$라 하자.

이 곡선이 두 점 $(-1, 2)$, $(3, c)$를 지나므로

$-1+a+2+b=2 \quad \cdots ㉠$

$27+9a-6+b=c \quad \cdots ㉡$

또 두 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=f'(3)$

$f'(x)=3x^2+2ax-2$이므로

$3-2a-2=27+6a-2 \quad \therefore a=-3$

㉠에 대입하면

$-1-3+2+b=2 \quad \therefore b=4$

㉡에 대입하면

$27-27-6+4=c \quad \therefore c=-2$

(2) $f(x)=x^3-x^2+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2x$

$f(-1)=-1-1+1=-1$

$f'(-1)=3+2=5$

이므로 접선의 방정식은

$y+1=5(x+1) \quad \therefore y=5x+4$

$y=f(x)$와 $y=5x+4$에서 y를 소거하면

$x^3-x^2+1=5x+4$

$x^3-x^2-5x-3=0 \quad \cdots ㉠$

이때 $x=-1$인 점에서 곡선과 직선이 접하므로 ㉠은 $x=-1$을 중근으로 가진다.

곧, ㉠의 좌변이 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$(x+1)^2(x-3)=0$

$f(3)=27-9+1=19$이므로 만나는 다른 점의 좌표는 $(3, 19)$

답 (1) $a=-3, b=4, c=-2$ (2) $(3, 19)$

3-1

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$라 하자.

이 곡선이 두 점 $(0, 1)$, $(1, 0)$을 지나므로

$c=1$, $1+a+b+c=0$에서 $a+b=-2 \quad \cdots ㉠$

또 두 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(0)=f'(1)$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$이므로

$0=4+3a+2b \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0, b=-2$

답 $a=0, b=-2, c=1$

3-2

$f(x)=x^4-6x^3+8$이라 하면 $f'(x)=4x^3-18x^2$

$f(1)=1-6+8=3$

$f'(1)=4-18=-14$

이므로 접선의 방정식은

$y-3=-14(x-1) \quad \therefore y=-14x+17$

$y=f(x)$와 $y=-14x+17$에서 y를 소거하면

$x^4-6x^3+8=-14x+17$

$x^4-6x^3+14x-9=0 \quad \cdots ㉠$

이때 $x=1$인 점에서 곡선과 직선이 접하므로 ㉠은 $x=1$을 중근으로 가진다.

곧, ㉠의 좌변이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$(x-1)^2(x^2-4x-9)=0$

$x^2-4x-9=0$에서 $x=2\pm\sqrt{13}$

따라서 만나는 다른 점의 x좌표는 $2+\sqrt{13}$, $2-\sqrt{13}$이다.

답 $2+\sqrt{13}$, $2-\sqrt{13}$

대표 Q4

(1) $f(x)=-x^2+5$, $g(x)=x^2-6x+10$이라 하면

$f'(x)=-2x$, $g'(x)=2x-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$에서 접선의 방정식은 $y-(-\alpha^2+5)=-2\alpha(x-\alpha)$

$\therefore y=-2\alpha x+\alpha^2+5 \quad \cdots ㉠$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$에서 접선의 방정식은 $y-(\beta^2-6\beta+10)=(2\beta-6)(x-\beta)$

$\therefore y=(2\beta-6)x-\beta^2+10 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡이 일치하므로

$-2\alpha=2\beta-6$, $\alpha^2+5=-\beta^2+10$

첫 번째 식에서 $\beta=3-\alpha$를 두 번째 식에 대입하면

$\alpha^2+5=-(3-\alpha)^2+10$, $\alpha^2-3\alpha+2=0$

$\therefore \alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

㉠에 대입하고 정리하면

$y=-2x+6$, $y=-4x+9$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+5$, $g(x)=x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax$, $g'(x)=2x$

$x=p$인 점에서 두 곡선이 접하면

$f(p)=g(p)$이므로 $p^3+ap^2+5=p^2+1 \quad \cdots ㉠$

$f'(p)=g'(p)$이므로 $3p^2+2ap=2p \quad \cdots ㉡$

$p=0$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 $p\neq0$

따라서 ㉡을 p로 나누면 $3p+2a=2$

$\therefore\ a=1-\dfrac{3}{2}p$

㉠에 대입하면 $p^3+\left(1-\dfrac{3}{2}p\right)p^2+5=p^2+1$

$p^3-8=0$, $(p-2)(p^2+2p+4)=0$

p는 실수이므로 $p=2$

$\therefore\ a=1-\dfrac{3}{2}p=-2$

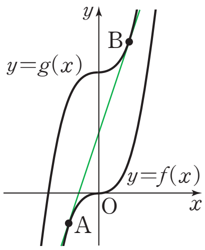
답 (1) $y=-2x+6$, $y=-4x+9$ (2) -2

4-1

$f(x)=x^3$, $g(x)=x^3+4$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$에서 접선의 방정식은



$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3$ … ㉠

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(\beta,\ g(\beta))$에서 접선의 방정식은

$y-(\beta^3+4)=3\beta^2(x-\beta)$

$\therefore\ y=3\beta^2x-2\beta^3+4$ … ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$3\alpha^2=3\beta^2$ … ㉢, $-2\alpha^3=-2\beta^3+4$ … ㉣

㉢에서 $\alpha=\beta$ 또는 $\alpha=-\beta$

$\alpha=\beta$를 ㉣에 대입하면 성립하지 않는다.

$\alpha=-\beta$를 ㉣에 대입하고 정리하면 $\beta^3=1$

β는 실수이므로 $\beta=1$

㉡에 대입하고 정리하면 $y=3x+2$

답 $y=3x+2$

4-2

$f(x)=x^3+3x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2+6x$

$g(x)=3x^2+ax$라 하면 $g'(x)=6x+a$

두 곡선이 $x=p$인 점에서 접한다고 하자.

$f(p)=g(p)$이므로

$p^3+3p^2+2=3p^2+ap$, $p^3+2=ap$ … ㉠

$f'(p)=g'(p)$이므로

$3p^2+6p=6p+a$, $a=3p^2$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $p^3+2=3p^3$

$p^3-1=0$, $(p-1)(p^2+p+1)=0$

p는 실수이므로 $p=1$

㉡에 대입하면 $a=3$

답 3

개념 Check

72쪽

3

$f(-1)=f(5)=-2$, $f'(x)=-2x+4$이므로

$f'(c)=-2c+4=0$ $\quad\therefore\ c=2$

답 2

4

$f(0)=0$, $f(3)=6$, $f'(x)=2x-1$이므로

$\dfrac{6-0}{3-0}=2c-1$ $\quad\therefore\ c=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

대표Q

73쪽

대표 Q5

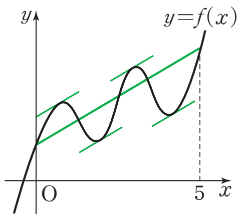
(1) $f(x)=x^3-3x$이므로 $f'(x)=3x^2-3$

또 $f(-3)=-18$, $f(3)=18$이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{18-(-18)}{3-(-3)}=3c^2-3$, $c^2=3$

$-3<c<3$이므로 $c=\pm\sqrt{3}$

(2) 그림과 같이 점 $(0,\ f(0))$, $(5,\ f(5))$를 지나는 직선에 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 실수 c의 개수는 4이다.



답 (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) 4

5-1

(1) $f(x)=x(x^2-3x+2)=x^3-3x^2+2x$

이므로 $f'(x)=3x^2-6x+2$

또 $f(0)=0$, $f(3)=6$이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{6-0}{3-0}=3c^2-6c+2$, $c^2-2c=0$, $c(c-2)=0$

$0<c<3$이므로 $c=2$

(2) $f(x)=\{(x-1)(x+1)\}^2=x^4-2x^2+1$

이므로 $f'(x)=4x^3-4x$

또 $f(-2)=f(2)=9$이므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{9-9}{2-(-2)}=4c^3-4c$, $c(c^2-1)=0$

$-2<c<2$이므로 $c=0$ 또는 $c=\pm1$

답 (1) 2 (2) 0, ±1

연습과 실전 4 접선과 평균값 정리 74쪽~76쪽

01 ②	02 $y=-1$	03 $y=-4x+1$	
04 $a=-2$, $b=1$	05 ②	06 ⑤	07 1	08 $-\dfrac{1}{4}$
09 $a=-2$, $b=5$, $c=4$	10 10	11 ②	
12 $\dfrac{4}{3}$	13 $y=-4x+9$	14 $-1<k<8$	

01

$f(x)=x^4+x^3+x^2+ax$라 하면 $f(1)=a+3$이므로

접점의 좌표는 $(1, a+3)$

$f'(x)=4x^3+3x^2+2x+a$이므로 $x=1$인 점에서 접선의 기울기는 $f'(1)=a+9$

따라서 접선의 방정식은 $y-(a+3)=(a+9)(x-1)$

이 직선이 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$1-a=-3(a+9)$ $\quad\therefore a=-14$

답 ②

02

$f(x)=x^4-2x^2$이라 하면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 $f'(a)=4a^3-4a$

접선의 방정식은

$y-(a^4-2a^2)=(4a^3-4a)(x-a)$ $\quad\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-(a^4-2a^2)=(4a^3-4a)(-a)$

$3a^4-2a^2-1=0$, $(3a^2+1)(a^2-1)=0$

a는 실수이므로 $a^2=1$ $\quad\therefore a=\pm1$

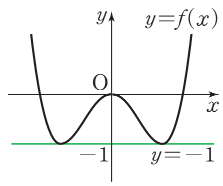
$a=1$일 때, ㉠에 대입하면 $y=-1$

$a=-1$일 때, ㉠에 대입하면 $y=-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-1$

답 $y=-1$

참고 곡선 $y=x^4-2x^2$에 접하고 점 $(0, -1)$을 지나는 직선은 그림과 같다. 곡선 $y=x^4-2x^2$을 그리는 방법은 5단원에서 공부한다.



03

$f(x)=x^3-3x^2-x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-1$

곡선 위의 $x=a$인 점에서 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-6a-1=3(a-1)^2-4$

이므로 $a=1$일 때 최소이다.

$f(1)=1-3-1=-3$, $f'(1)=-4$이므로

$y+3=-4(x-1)$ $\quad\therefore y=-4x+1$

답 $y=-4x+1$

04

$f(x)=2x^3+ax^2+b$라 하자.

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=2+a+b$ $\quad\cdots$ ㉠

$f'(x)=6x^2+2ax$이므로 점 $(1, 1)$에서 접선의 기울기는

$f'(1)=6+2a$

접선이 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$와 수직이므로 $f'(1)=2$

$6+2a=2$ $\quad\therefore a=-2$

㉠에 대입하면 $b=1$

답 $a=-2$, $b=1$

05

두 점 $(-2, 2)$, $(1, c)$가 곡선 위의 점이므로 대입하면

$2=-8+4a-2b$, $2a-b=5$ $\quad\cdots$ ㉠

$c=1+a+b$, $a+b=c-1$ $\quad\cdots$ ㉡

또 두 점 $(-2, 2)$, $(1, c)$에서 접선의 기울기가 같으므로

$y'=3x^2+2ax+b$에 $x=-2$, $x=1$을 대입하면

$12-4a+b=3+2a+b$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$

$a=\dfrac{3}{2}$을 ㉠, ㉡에 대입하면 $b=-2$, $c=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=0$

답 ②

06

구간 $[0,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 2이므로

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(2)$$

$f(x)=x^3-kx^2+2x$에서

$f(3)=27-9k+6=33-9k,\ f(0)=0$

$f'(x)=3x^2-2kx+2$에서 $f'(2)=14-4k$

곧, $\frac{33-9k}{3}=14-4k$이므로 $k=3$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2+2x,\ f'(x)=3x^2-6x+2$

또 $f(1)=f(2)=0$이므로 구간 $[1,\ 2]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수가 c이면

$f'(c)=3c^2-6c+2=0 \qquad \therefore\ c=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

이때 $1<c<2$이므로 $c=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ k+c=3+\frac{3+\sqrt{3}}{3}=4+\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ⑤

07 전략 접선의 기울기가 -1일 때가 없으므로 미분계수가 -1인 경우는 없다.

$f(x)=x^3-2x^2+ax+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4x+a$

직선 $y=-x+3$에 평행한 접선이 없으므로 접점의 x좌표를 t라 하면 $f'(t)=-1$인 실수 t가 없다.

따라서 $f'(t)=3t^2-4t+a=-1$, 곧 방정식 $3t^2-4t+a+1=0$의 실근이 없으므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-3(a+1)=1-3a<0 \qquad \therefore\ a>\frac{1}{3}$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

답 1

08 전략 두 접선이 수직이면 두 접선의 기울기의 곱은 -1이다.

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\therefore\ y-a^2=2a(x-a)$

이 직선이 점 $(1,\ p)$를 지나므로

$p-a^2=2a(1-a) \qquad \therefore\ a^2-2a+p=0 \qquad \cdots$ ㉠

이 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

곡선 위의 $x=\alpha,\ x=\beta$인 점에서 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=2\alpha,\ f'(\beta)=2\beta$

두 접선의 기울기의 곱이 -1이므로

$4\alpha\beta=-1$

㉠에서 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\beta=p$이므로

$4p=-1 \qquad \therefore\ p=-\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

09 전략 $y=f(x),\ y=g(x)$라 하면 $f(-1)=1,\ g(-1)=1,\ f'(-1)g'(-1)=-1$이다.

$f(x)=x^3-ax^2,\ g(x)=2x^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2-2ax,\ g'(x)=4x+b$

두 곡선이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$f(-1)=-1-a=1 \qquad \therefore\ a=-2 \qquad \cdots$ ㉠

$g(-1)=2-b+c=1 \qquad \therefore\ b-c=1 \qquad \cdots$ ㉡

점 $(-1,\ 1)$에서 두 곡선에 그은 접선이 서로 수직이므로

$f'(-1)g'(-1)=-1,\ (3+2a)(-4+b)=-1$

㉠을 대입하면 $b=5$

㉡에 대입하면 $c=4$

답 $a=-2,\ b=5,\ c=4$

10 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서 접선이 점 $(-1,\ 1)$을 지남을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 점 $(2,\ 4)$와 $(-1,\ 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$4=8+4a+2b+c,\ 4a+2b+c=-4 \qquad \cdots$ ㉠

$1=-1+a-b+c,\ a-b+c=2 \qquad \cdots$ ㉡

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12+4a+b$

따라서 접선의 방정식은

$y=(12+4a+b)(x-2)+4$

이 접선이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$1=-3(12+4a+b)+4,\ 4a+b=-11 \qquad \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=1$

이므로 $f'(x)=3x^2-6x+1$

$\therefore\ f'(3)=10$

답 10

11 전략 접점을 $(a, f(a))$라 하고 접점부터 구한다.

$f(x)=x^4-2x^2+8$이라 하면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-4a$

접선의 방정식은

$y-(a^4-2a^2+8)=(4a^3-4a)(x-a)$

이 직선이 원점 $(0, 0)$을 지나므로

$-a^4+2a^2-8=-4a^4+4a^2$

$3a^4-2a^2-8=0$, $(a^2-2)(3a^2+4)=0$

a는 실수이므로 $a^2=2$ $\quad\therefore a=\pm\sqrt{2}$

$a=\sqrt{2}$일 때, $f(\sqrt{2})=4-4+8=8$

$a=-\sqrt{2}$일 때, $f(-\sqrt{2})=4-4+8=8$

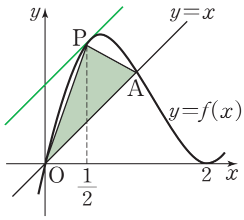
접점의 좌표는 $(\sqrt{2}, 8)$, $(-\sqrt{2}, 8)$이므로

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times8=8\sqrt{2}$

답 ②

12 전략 넓이의 최댓값 ➡ 기울기가 같은 접선을 생각한다.

점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 최대일 때, 곧 P에서 곡선 $y=f(x)$의 접선이 직선 $y=x$에 평행할 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대이다.



따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=\frac{1}{2}$인 점에서 접선의 기울기가 1이다.

$f'(x)=a(x-2)^2+2ax(x-2)=a(x-2)(3x-2)$

이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서 $a\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

13 전략 먼저 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$일 때 (분자)$\to0$임을 이용한다.

(나)에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

$\therefore f(2)-g(2)=0$ $\quad\cdots$ ㉠

(가)에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(2)=g(2)=1$

(가)를 미분하면 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$x=2$를 대입하면

$g'(2)=12+8f'(2)$ $\quad\cdots$ ㉢

또 (나)에서

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$

$=f'(2)-g'(2)$

이므로

$f'(2)-g'(2)=2$ $\quad\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $g'(2)=-4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y=-4(x-2)+1$ $\quad\therefore y=-4x+9$

답 $y=-4x+9$

14 전략 평균값 정리를 생각한다.

평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x^2+2x$에서 $f'(c)=c^2+2c$이므로

$k=c^2+2c=(c+1)^2-1$

$-1<c<2$이므로 $-1<k<8$

답 $-1<k<8$

5 미분과 그래프

개념 Check

78쪽~80쪽

1

(1) $f(x)$가 구간 $[3, 4]$에서 증가하므로 a의 최솟값은 3

(2) $f(x)$가 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소하므로 b의 최댓값은 1

(3) $f(x)$가 극대인 x의 값은 2, 4

(4) 미분가능하지 않아도 극대 또는 극소일 수 있다.
따라서 $f(x)$가 극소인 x의 값은 1, 3

답 (1) 3 (2) 1 (3) 2, 4 (4) 1, 3

2

(1) $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$
이므로 구간 $(-1, 3)$에서 $f'(x)<0$
따라서 구간 $(-1, 3)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

(2) $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
이므로 구간 $(3, 5)$에서 $f'(x)>0$
따라서 구간 $(3, 5)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

답 (1) 감소 (2) 증가

3

(1) $f'(x)=2x-3$이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$
$x=\frac{3}{2}$에서 $f'(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌므로 극소이고 극솟값은
$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$

(2) $f'(x)=-4x-4$이므로 $f'(-1)=0$
$x=-1$에서 $f'(x)$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀌므로 극대이고 극댓값은
$f(-1)=2$

답 (1) 극솟값 : $-\frac{5}{4}$ (2) 극댓값 : 2

대표Q

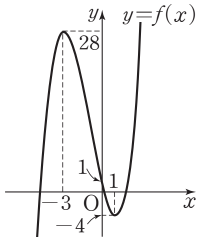
82쪽~89쪽

대표 Q1

(1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$에서
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

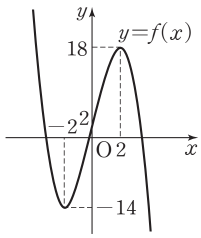
따라서 함수 $f(x)$의
극댓값은 $f(-3)=28$,
극솟값은 $f(1)=-4$
또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^3+12x+2$에서
$f'(x)=-3x^2+12$
$=-3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

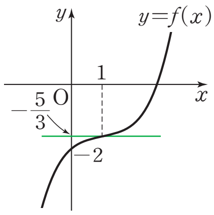
따라서 함수 $f(x)$의
극댓값은 $f(2)=18$,
극솟값은 $f(-2)=-14$
또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-2$에서
$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ (중근)
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{5}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 없다.
또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



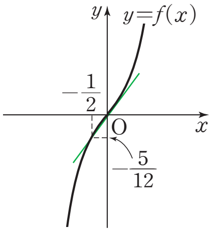
(4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$에서

$f'(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로 $f'(x)=0$의 실근은 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 없다.

또 $f(x)$는 항상 증가하므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



답 (1) 극댓값 : 28, 극솟값 : -4, 그래프는 풀이 참조
(2) 극댓값 : 18, 극솟값 : -14, 그래프는 풀이 참조
(3) 극댓값과 극솟값은 없다, 그래프는 풀이 참조
(4) 극댓값과 극솟값은 없다, 그래프는 풀이 참조

참고 (4) $f'(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-\frac{1}{2}$인 점에서 접선의 기울기가 최소이다.

1-1

(1) $f(x)=x(x-2)^2=x^3-4x^2+4x$에서

$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

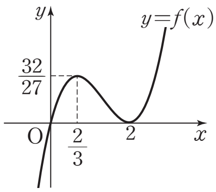
x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의

극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$,

극솟값은 $f(2)=0$

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^3-6x^2-9x+3$에서

$f'(x)=-3x^2-12x-9=-3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

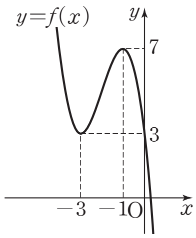
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(-1)=7$,

극솟값은 $f(-3)=3$

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(3) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x+3$

$=3(x+1)^2$

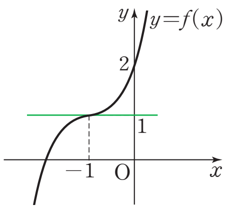
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ (중근)

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 없다.

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



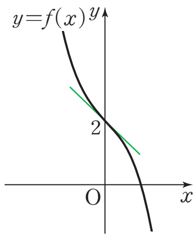
(4) $f(x)=-x^3-x+2$에서

$f'(x)=-3x^2-1<0$

이므로 $f'(x)=0$의 실근은 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 없다.

또 $f(x)$는 항상 감소하므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



답 (1) 극댓값 : $\frac{32}{27}$, 극솟값 : 0, 그래프는 풀이 참조
(2) 극댓값 : 7, 극솟값 : 3, 그래프는 풀이 참조
(3) 극댓값과 극솟값은 없다, 그래프는 풀이 참조
(4) 극댓값과 극솟값은 없다, 그래프는 풀이 참조

참고 (4) 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=0$인 점에서 접선의 기울기가 최대이다.

대표 Q2

(1) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+10$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

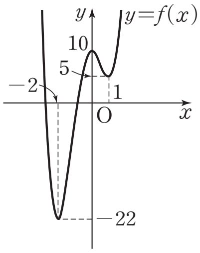
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=10$, 극솟값은 $f(-2)=-22$, $f(1)=5$

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(2) $f(x)=3x^4-4x^3+4$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

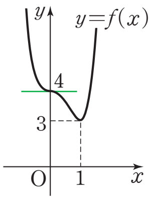
$f'(x)=0$에서 $x=0$ (중근) 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 없고, 극솟값은 $f(1)=3$

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(3) $f(x)=-x^4-4x+1$에서

$f'(x)=-4x^3-4=-4(x+1)(x^2-x+1)$

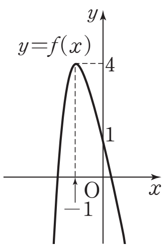
$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=4$, 극솟값은 없다.

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



답 (1) 극댓값 : 10, 극솟값 : -22, 5, 그래프는 풀이 참조

(2) 극댓값 : 없다, 극솟값 : 3, 그래프는 풀이 참조

(3) 극댓값 : 4, 극솟값 : 없다, 그래프는 풀이 참조

2-1

(1) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=12x^3-24x^2-12x+24\\ &=12x^2(x-2)-12(x-2)\\ &=12(x^2-1)(x-2)\\ &=12(x+1)(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

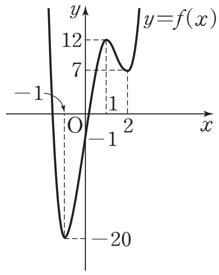
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=12$, 극솟값은 $f(-1)=-20$, $f(2)=7$

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^4+2x^2+2$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)\\ &=-4x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

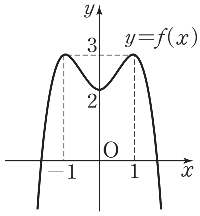
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=f(1)=3$, 극솟값은 $f(0)=2$

또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(3) $f(x)=-3x^4-4x^3+6x^2+12x$에서

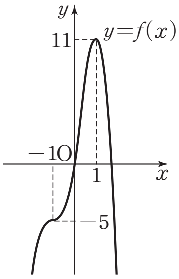
$$\begin{aligned} f'(x)&=-12x^3-12x^2+12x+12\\ &=-12x^2(x+1)+12(x+1)\\ &=-12(x-1)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ (중근) 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-5	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=11$, 극솟값은 없다.
또 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

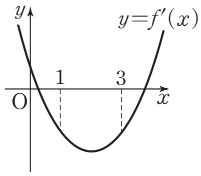


답 (1) 극댓값 : 12, 극솟값 : -20, 7, 그래프는 풀이 참조
(2) 극댓값 : 3, 극솟값 : 2, 그래프는 풀이 참조
(3) 극댓값 : 11, 극솟값 : 없다, 그래프는 풀이 참조

대표 Q3

(1) $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하므로
$f'(x)\geq 0$
$f'(x)=3x^2-4x+a$이고, x^2의 계수가 양수이므로 이차방정식 $f'(x)=0$에서
$\dfrac{D}{4}=4-3a\leq 0$ $\therefore\ a\geq \dfrac{4}{3}$

(2) $f(x)$가 구간 $(1, 3)$에서 감소하므로 이 구간에서
$f'(x)\leq 0$
따라서 그림에서



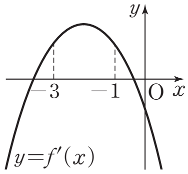
$f'(1)\leq 0$, $f'(3)\leq 0$
$f'(x)=3x^2+2ax-a-2$이므로
$f'(1)=3+2a-a-2\leq 0$
$\therefore\ a\leq -1$ $\cdots$ ㉠
$f'(3)=27+6a-a-2\leq 0$
$\therefore\ a\leq -5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $a\leq -5$

답 (1) $a\geq \dfrac{4}{3}$ (2) $a\leq -5$

3-1

$f(x)=-x(x^2-ax+1)=-x^3+ax^2-x$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax-1$
(1) $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하므로 $f'(x)\leq 0$
$f'(x)$의 x^2의 계수가 음수이므로 이차방정식 $f'(x)=0$에서
$\dfrac{D}{4}=a^2-3\leq 0$ $\therefore\ -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$

(2) $f(x)$가 구간 $(-3, -1)$에서 증가하므로 이 구간에서
$f'(x)\geq 0$
따라서 그림에서



$f'(-3)\geq 0$, $f'(-1)\geq 0$
$f'(-3)=-27-6a-1\geq 0$
$\therefore\ a\leq -\dfrac{14}{3}$ $\cdots$ ㉠
$f'(-1)=-3-2a-1\geq 0$
$\therefore\ a\leq -2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분은 $a\leq -\dfrac{14}{3}$

답 (1) $-\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$ (2) $a\leq -\dfrac{14}{3}$

3-2

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2+4a$이므로 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가진다.
$\dfrac{D}{4}=a^2-3(-a^2+4a)\leq 0$, $4a^2-12a\leq 0$
$a(a-3)\leq 0$ $\therefore\ 0\leq a\leq 3$
따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3이므로 개수는 4이다.

답 4

대표 Q4

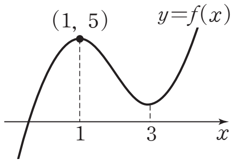
(1) 삼차함수의 그래프가 x축에 접하면 극댓값 또는 극솟값이 0이다.
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
(i) $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$인 점에서 x축에 접하면 $f(-1)=0$이므로
$-1-3+9+a=0$ $\therefore\ a=-5$
(ii) $y=f(x)$의 그래프가 $x=3$인 점에서 x축에 접하면 $f(3)=0$이므로
$27-27-27+a=0$ $\therefore\ a=27$
(i), (ii)에서 $a>0$이므로 $a=27$

(2) $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(x)$가 $x=1$과 $x=3$에서 극값을 가지면 방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=1$ 또는 $x=3$
곧, $f'(1)=0$, $f'(3)=0$이므로
$3+2a+b=0$, $27+6a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$

이고 x^3의 계수가 양수이므로 그림과 같이 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.



$f(1)=5$이므로

$f(1)=1-6+9+c=5$ $\quad\therefore c=1$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이므로 극솟값은

$f(3)=1$

(3) $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 2를 가지므로

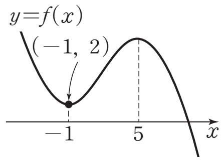
$f'(-1)=0$, $f(-1)=2$

$f'(x)=-3x^2+12x+a$이므로

$f'(-1)=-3-12+a=0$ $\quad\therefore a=15$

$f'(x)=-3x^2+12x+15=-3(x+1)(x-5)$이고,

$f(x)$의 x^3의 계수가 음수이므로 그림과 같이 $f(x)$는 $x=5$에서 극대이다.



$f(x)=-x^3+6x^2+15x+b$

이고 $f(-1)=2$이므로

$1+6-15+b=2$ $\quad\therefore b=10$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2+15x+10$이므로 극댓값은

$f(5)=110$

답 (1) 27 (2) 1 (3) $x=5$, 극댓값 : 110

참고 (2) $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.

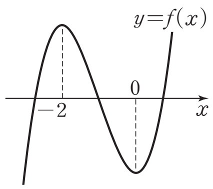
4-1

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f(x)$의 x^3의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 $x=0$에서 극소이다.

$f(x)$의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(-2)>0$, $f(0)<0$이고,

$f(0)=-f(-2)$이므로

$a=-(-8+12+a)$ $\quad\therefore a=-2$

답 -2

4-2

$f'(x)=3x^2+2ax+1$

$y=f(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 x축에 접하면

$f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$1+a+1+b=0$, $3+2a+1=0$

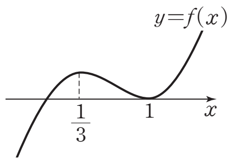
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=0$

곧, $f(x)=x^3-2x^2+x$이고

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

이때 $f(x)$의 x^3의 계수가 양수이므로 그림과 같이 $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$에서 극대, $x=1$에서 극소이다.



따라서 극댓값은 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$, 극솟값은 $f(1)=0$

답 극댓값 : $\frac{4}{27}$, 극솟값 : 0

4-3

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

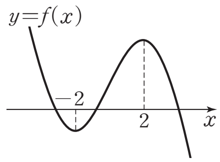
$f(x)$가 $x=-2$와 $x=2$에서 극값을 가지면

방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로

$-12-4a+b=0$, $-12+4a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=12$

$f(x)=-x^3+12x+c$이고, $f(x)$의 x^3의 계수가 음수이므로 그림과 같이 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이고 $x=2$에서 극대이다.



$f(-2)=-2$이므로

$f(-2)=8-24+c=-2$

$\therefore c=14$

따라서 $f(x)=-x^3+12x+14$이므로 극댓값은

$f(2)=30$

답 30

대표 Q5

(1) 사차함수의 그래프가 x축에 접하면 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

(i) $y=f(x)$의 그래프가 $x=0$인 점에서 x축에 접하면 $f(0)=0$이므로 $a=0$

(ii) $y=f(x)$의 그래프가 $x=\sqrt{2}$인 점에서 x축에 접하면 $f(\sqrt{2})=0$이므로

$4-8+a=0 \qquad \therefore a=4$

(iii) $y=f(x)$의 그래프가 $x=-\sqrt{2}$인 점에서 x축에 접하면 $f(-\sqrt{2})=0$이므로

$4-8+a=0 \qquad \therefore a=4$

(i), (ii), (iii)에서 양수 a의 값은 4이다.

(2) $f'(x)=4x^3+2ax+b$

$f(x)$가 $x=-1$과 $x=3$에서 극값을 가지면

방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=-1$ 또는 $x=3$

곧, $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$-4-2a+b=0$, $108+6a+b=0$

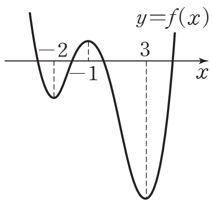
두 식을 연립하여 풀면 $a=-14$, $b=-24$

$f(x)=x^4-14x^2-24x-10$

$f'(x)=4x^3-28x-24=4(x+2)(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 x^4의 계수가 양수이므로 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.



따라서 극댓값은

$f(-1)=1$

(3) $f'(x)=4x^3+3x^2+2ax=x(4x^2+3x+2a)$

$f(x)$가 극댓값을 갖지 않으면 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) $x(4x^2+3x+2a)=0$이 중근을 가질 때

① 이차방정식 $4x^2+3x+2a=0$의 한 근이 $x=0$일 때 $2a=0 \qquad \therefore a=0$

② 이차방정식 $4x^2+3x+2a=0$이 중근을 가질 때 $D=9-32a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{9}{32}$

(ii) $x(4x^2+3x+2a)=0$이 허근을 가질 때

이차방정식 $4x^2+3x+2a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9-32a<0 \qquad \therefore a>\dfrac{9}{32}$

(i), (ii)에서 $a=0$ 또는 $a\ge\dfrac{9}{32}$

답 (1) 4 (2) 1 (3) $a=0$ 또는 $a\ge\dfrac{9}{32}$

참고 (2) $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

5-1

$f(x)=3x^4-8x^3+ax^2+bx+15$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2+2ax+b$

(1) $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$인 점에서 x축에 접하면

$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$이므로

$3+8+a-b+15=0$, $-12-24-2a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-10$, $b=16$

(2) $f(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서 극값을 가지면 방정식

$f'(x)=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=2$

곧, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$이므로

$12-24+2a+b=0$, $96-96+4a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=24$

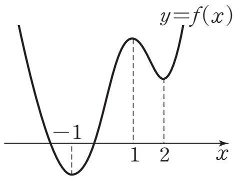
$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+15$

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$\quad=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 x^4의 계수가 양수이므로 그림과 같이 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극소이다.



따라서 극솟값은

$f(-1)=-4$

$f(2)=23$

답 (1) $a=-10$, $b=16$ (2) -4, 23

5-2

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x+4a=4(x+1)(x^2-x+a)$

$f(x)$의 극값이 하나뿐이면 극솟값만 가지므로 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) $4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 중근을 가질 때

① 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 한 근이 $x=-1$일 때

$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$

② 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 중근을 가질 때

$D=1-4a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{4}$

(ii) $4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 허근을 가질 때

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=1-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$ 또는 $a\ge\frac{1}{4}$

답 $a=-2$ 또는 $a\ge\frac{1}{4}$

대표 Q6

① $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 구간 $(-2, 1)$에서 감소하다가 증가한다. (거짓)

② 구간 $(4, 5)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 구간 $(4, 5)$에서 감소한다. (참)

③ $f'(1)\ne0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대도 극소도 아니다. (거짓)

④ $f'(2)=0$이지만 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
곧, $f(x)$는 $x=2$에서 극대도 극소도 아니다. (거짓)

⑤ 방정식 $f'(x)=0$의 해는
$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=5$
이 중에서 $x=-1, 4, 5$일 때만 $f'(x)$의 부호가 좌우에서 바뀐다.
곧, 구간 $[-2, 6]$에서 $f(x)$의 극값은 3개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

6-1

$f(x)f'(x)<0$에서

$\begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ f'(x)>0 \end{cases}$

(ⅰ) $f(x)>0 \iff -1<x<3$ 또는 $6<x<8$
$f(x)<0 \iff -2<x<-1$ 또는 $3<x<6$

(ⅱ) $f(x)$의 증감을 생각하면
$f'(x)>0 \iff -2<x<1$ 또는 $4<x<8$
$f'(x)<0 \iff 1<x<4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)<0 \end{cases}$의 해는 $1<x<3$
$\begin{cases} f(x)<0 \\ f'(x)>0 \end{cases}$의 해는
$-2<x<-1$ 또는 $4<x<6$

따라서 정수 x는 2, 5이고 합은 7이다.

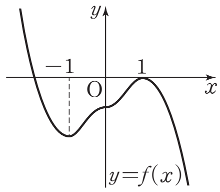
답 7

6-2

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

$f(1)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

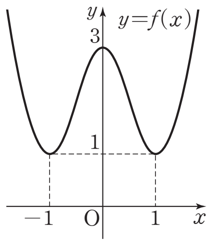


따라서 $y=f(x)$가 증가하는 구간은 $[-1, 1]$이므로
$-1\le x\le1$

답 $-1\le x\le1$

날선 Q7

(가)에서 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대칭이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서도 극소이고, 극솟값은 1이다.



또 $f(x)$는 사차함수이고, 극소인 x의 값이 2개이므로 극대인 x의 값이 1개 있다.

그런데 그래프가 y축에 대칭이므로 그림과 같이 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 3이다.

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 $x=-1$, $x=1$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=1$은 $x=-1$과 $x=1$을 중근으로 가진다.

$f(x)-1=a(x+1)^2(x-1)^2\ (a>0)$으로 놓으면

$f(0)=3$에서

$f(0)-1=a, f(0)=a+1=3 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x+1)^2(x-1)^2+1=2(x^2-1)^2+1$
$=2x^4-4x^2+3$

다른 풀이

$f(x)$는 x^4의 계수가 양수인 사차함수이므로

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$로 놓으면

(가)에서 $f(x)=f(-x)$이므로

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=ax^4-bx^3+cx^2-dx+e$

$2bx^3+2dx=0 \qquad \therefore b=0, d=0$

따라서 $f(x)=ax^4+cx^2+e$ 꼴이고

$f'(x)=4ax^3+2cx$

$f(1)=a+c+e=1, f(0)=e=3, f'(1)=4a+2c=0$

$\therefore a=2, c=-4, e=3$

$\therefore f(x)=2x^4-4x^2+3$

답 $f(x)=2x^4-4x^2+3$

7-1

(1) $y=f(x)$의 그래프는 x축과 $x=0$, $x=2$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$과 $x=2$를 중근으로 가진다.

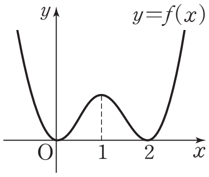
$f(x)$는 x^4의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^2(x-2)^2$

$=x^4-4x^3+4x^2$

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x$

$=4x(x-1)(x-2)$



그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

따라서 극댓값은 $f(1)=1$이다.

다른 풀이

$f(x)$는 x^4의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f(0)=0$, $f'(0)=0$에서

$d=0$, $c=0$

$f(2)=0$, $f'(2)=0$에서

$f(2)=16+8a+4b=0$, $f'(2)=32+12a+4b=0$

$\therefore a=-4$, $b=4$

$f(x)=x^4-4x^3+4x^2$이므로

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

따라서 극댓값은 $f(1)=1$

(2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$은 다항함수이므로 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x$

이므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=4c^3-12c^2+8c$$

$4c(c^2-3c+2)=0$, $4c(c-1)(c-2)=0$

$0<c<2$이므로 $c=1$

답 (1) 1 (2) 1

개념 Check 90쪽

4

$f(x)=-x^3+6x$에서

$f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

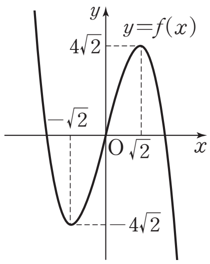
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$,

극솟값은 $f(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(1) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 최댓값과 최솟값은 없다.

(2) $f(-1)=-5$, $f(2)=4$이므로 구간 $[-1, 2]$에서 최댓값은 $f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$, 최솟값은 $f(-1)=-5$

(3) $f(-2)=-4$, $f(3)=-9$이므로 구간 $[-2, 3]$에서 최댓값은 $f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$, 최솟값은 $f(3)=-9$

답 (1) 최댓값과 최솟값은 없다.
(2) 최댓값 : $4\sqrt{2}$, 최솟값 : -5
(3) 최댓값 : $4\sqrt{2}$, 최솟값 : -9

대표Q 91쪽~93쪽

대표 Q8

(1) $f(x)=x^3-4x^2+4x+1$에서

$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

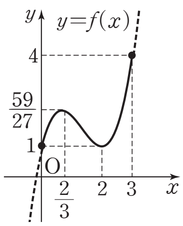
x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	극대	↘	극소	↗	4

함수 $f(x)$의

극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{59}{27}$

극솟값은 $f(2)=1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 최댓값은 $f(3)=4$,

최솟값은 $f(0)=f(2)=1$

(2) $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+5$에서

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[-4, 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	37	↘	극소	↗	극대	↘	1

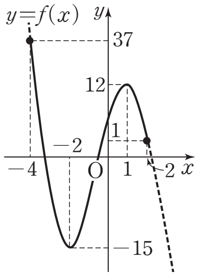
함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(1)=12$,

극솟값은 $f(-2)=-15$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는

그림과 같다.



$f(-4)=37$, $f(2)=1$이므로

구간 $[-4, 2]$에서

최댓값은 $f(-4)=37$,

최솟값은 $f(-2)=-15$

(3) $f(x)=x^4-2x^2-2$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	극대	↘	극소	↗	6

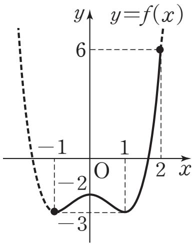
함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(0)=-2$

극솟값은 $f(1)=-3$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는

그림과 같다.



따라서 최댓값은 $f(2)=6$,

최솟값은 $f(-1)=f(1)=-3$

답 (1) 최댓값 : 4, 최솟값 : 1

(2) 최댓값 : 37, 최솟값 : -15

(3) 최댓값 : 6, 최솟값 : -3

8-1

$f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

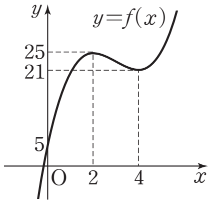
함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(2)=25$,

극솟값은 $f(4)=21$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는

그림과 같다.



(1) $f(-1)=-29$, $f(3)=23$

이므로 구간 $[-1, 3]$에서 최댓값은 $f(2)=25$,

최솟값은 $f(-1)=-29$

(2) $f(0)=5$, $f(5)=25$이므로 구간 $[0, 5]$에서 최댓값은 $f(2)=f(5)=25$, 최솟값은 $f(0)=5$

답 (1) 최댓값 : 25, 최솟값 : -29

(2) 최댓값 : 25, 최솟값 : 5

8-2

$f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+6$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2-8x$

$=-4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

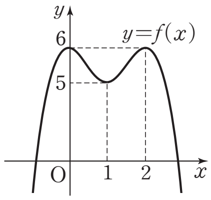
함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(0)=6$, $f(2)=6$

극솟값은 $f(1)=5$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는

그림과 같다.



(1) $f(-1)=-3$, $f(3)=-3$

이므로 구간 $[-1, 3]$에서

최댓값은 $f(0)=f(2)=6$,

최솟값은 $f(-1)=f(3)=-3$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{87}{16}$, $f(4)=-58$이므로 구간 $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$에서

최댓값은 $f(2)=6$, 최솟값은 $f(4)=-58$

답 (1) 최댓값 : 6, 최솟값 : -3

(2) 최댓값 : 6, 최솟값 : -58

8-3

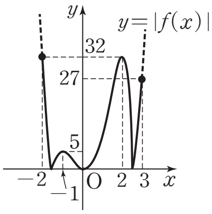
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	27



함수 $f(x)$의

극댓값은 $f(0)=0$,

극솟값은 $f(-1)=-5$,

$f(2)=-32$

이므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 $y=|f(x)|$의 최댓값은

$|f(-2)|=|f(2)|=32$

답 32

참고 $f(x)=x^2(3x^2-4x-12)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2\pm2\sqrt{10}}{3}$

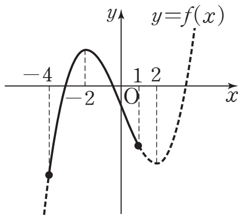
이 값에서 $|f(x)|$는 극소이다.

대표 09

(1) $f(x)=x^3-12x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm2$



구간 $[-4, 1]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 그림과 같이

$x=-2$에서 최대이고

$x=-4$ 또는 $x=1$에서 최소이다.

최댓값이 10이므로 $f(-2)=10$에서

$-8+24+a=10$ $\quad\therefore a=-6$

이때 $f(x)=x^3-12x-6$이고

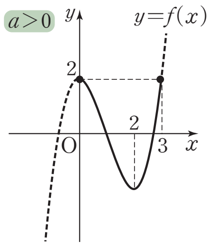
$f(-4)=-22$, $f(1)=-17$

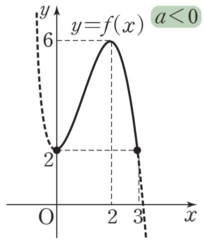
따라서 구간 $[-4, 1]$에서 최솟값은 $f(-4)=-22$

(2) $f(x)=ax^3-3ax^2+2$가 삼차함수이므로 $a\neq0$이다.

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$





(i) $a>0$일 때

$x=0$ 또는 $x=3$에서 최대이고 $x=2$에서 최소이다.

그런데 $f(0)=f(3)=2$이고 최댓값이 6이므로

$a>0$일 수 없다.

(ii) $a<0$일 때

$x=2$에서 최대이고 $x=0$ 또는 $x=3$에서 최소이다.

최댓값이 6이므로 $f(2)=6$에서

$8a-12a+2=6$ $\quad\therefore a=-1$

이때 $f(x)=-x^3+3x^2+2$이고 $f(0)=f(3)=2$이므로 최솟값은 2이다.

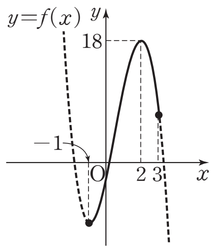
답 (1) $a=-6$, 최솟값 : -22 (2) $a=-1$, 최솟값 : 2

9-1

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x+a$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$



구간 $[-1, 3]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 그림과 같이 $x=2$에서 최대이고

$x=-1$ 또는 $x=3$에서 최소이다.

최댓값이 18이므로 $f(2)=18$에서

$-16+12+24+a=18$ $\quad\therefore a=-2$

이때 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-2$이고

$f(-1)=-9$, $f(3)=7$

따라서 구간 $[-1, 3]$에서 최솟값은 $f(-1)=-9$

답 $a=-2$, 최솟값 : -9

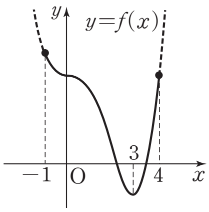
9-2

$f(x)=x^4-4x^3+a$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[-1,\ 4]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 그림과 같이 $x=3$에서 최소이고 $x=-1$ 또는 $x=4$에서 최대이다.



최솟값이 -7이므로

$f(3)=-7$에서

$81-108+a=-7 \qquad \therefore a=20$

이때 $f(x)=x^4-4x^3+20$이고

$f(-1)=25,\ f(4)=20$

따라서 구간 $[-1,\ 4]$에서 최댓값은 $f(-1)=25$

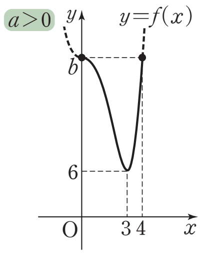
답 $a=20$, 최댓값 : 25

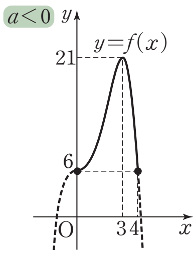
9-3

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$





(i) $a>0$일 때

$x=3$에서 최소이고 $x=0$ 또는 $x=4$에서 최대이다.

최솟값이 6이므로

$f(3)=-27a+b=6 \qquad \cdots$ ㉠

최댓값이 21이므로

$f(0)=f(4)=b=21$

㉠에 대입하면 $a=\dfrac{5}{9}$

(ii) $a<0$일 때

$x=3$에서 최대이고 $x=0$ 또는 $x=4$에서 최소이다.

최댓값이 21이므로

$f(3)=-27a+b=21 \qquad \cdots$ ㉡

최솟값이 6이므로

$f(0)=f(4)=b=6$

㉡에 대입하면 $a=-\dfrac{5}{9}$

따라서 $a=\dfrac{5}{9},\ b=21$ 또는 $a=-\dfrac{5}{9},\ b=6$이다.

답 $a=\dfrac{5}{9},\ b=21$ 또는 $a=-\dfrac{5}{9},\ b=6$

대표 Q10

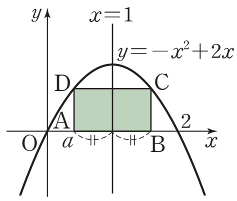
$y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$이므로 이 곡선의 축은 직선 $x=1$이다.

그림과 같이 점 A의 x좌표를 a라 하면 $0<a<1$이고

$\mathrm{B}(2-a,\ 0),\ \overline{\mathrm{AB}}=2(1-a)$,

$\overline{\mathrm{AD}}=-a^2+2a$이므로

직사각형 ABCD의 넓이를 $f(a)$라 하면

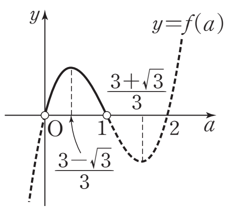


$f(a)=2(1-a)(-a^2+2a)=2a^3-6a^2+4a$

$f'(a)=6a^2-12a+4$

$f'(a)=0$에서 $3a^2-6a+2=0 \qquad \therefore a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$0<a<1$에서 $f(a)$의 증가와 감소를 조사하면 그림과 같이 $a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$에서 최대이다.



따라서 점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

답 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

10-1

점 P의 x좌표를 a라 하면 $0<a<4$이고

$\overline{\mathrm{OH}}=a,\ \overline{\mathrm{PH}}=-a^2(a-4)$

삼각형 OPH의 넓이는

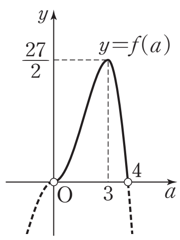
$\dfrac{1}{2}\times a\times\{-a^2(a-4)\}=-\dfrac{1}{2}a^4+2a^3$

$f(a)=-\dfrac{1}{2}a^4+2a^3$이라 하면

$f'(a)=-2a^3+6a^2=-2a^2(a-3)$

$f'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=3$

$0<a<4$에서 $f(a)$의 증가와 감소를 조사하면 그림과 같이 $a=3$에서 최대이다.



따라서 삼각형 OPH의 넓이의 최댓값은 $f(3)=\dfrac{27}{2}$

답 $\dfrac{27}{2}$

10-2

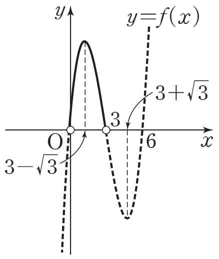
잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하자.
직육면체의 가로, 세로, 높이는 각각 $(12-2x)$ cm, $(6-2x)$ cm, x cm이므로 직육면체의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x(12-2x)(6-2x)=4x^3-36x^2+72x$

$f'(x)=12(x^2-6x+6)$

$f'(x)=0$에서 $x=3\pm\sqrt{3}$

$0<x<3$이므로 이 범위에서 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 그림과 같이 $x=3-\sqrt{3}$에서 최대이다.



따라서 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이는 $(3-\sqrt{3})$ cm이다.

답 $(3-\sqrt{3})$ cm

연습과 실전 5 미분과 그래프 94쪽 ~ 98쪽

01 $\frac{14}{3}$ **02** ① **03** 1 **04** ④ **05** e **06** ⑤
07 ② **08** $a=1$, $b=-1$ **09** 32π **10** ④
11 $1\le a\le 4$ **12** ①
13 $a=-1$, 극댓값 : 6, 극솟값 : 2 **14** $1<a<\frac{3}{2}$
15 -26 **16** ③ **17** 8 **18** 12
19 최댓값 : 15, 최솟값 : -12 **20** ① **21** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
22 ① **23** ②

01

$f'(x)=3x^2-10x+a\le 0$의 해가 $1\le x\le b$이므로
$3x^2-10x+a=0$의 해가 $x=1$ 또는 $x=b$이다.
근과 계수의 관계에서 $1+b=\frac{10}{3}$, $1\times b=\frac{a}{3}$이므로

$b=\frac{7}{3}$, $a=7$ $\quad\therefore a-b=7-\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$

답 $\frac{14}{3}$

02

삼차함수 $f(x)$가 역함수가 존재하므로 일대일대응이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가한다.

$f'(x)=x^2-2ax+3a\ge 0$이므로

$f'(x)=x^2-2ax+3a=0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$

$a(a-3)\le 0$ $\quad\therefore 0\le a\le 3$

따라서 a의 최댓값은 3이다.

답 ①

03

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$라 하자.

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면

$f(0)=0$ 또는 $f(2a)=0$

$f(0)=0$일 때 $4a=0$ $\quad\therefore a=0$

$f(2a)=0$일 때 $8a^3-12a^3+4a=0$, $-4a(a^2-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\pm 1$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

답 1

04

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

$f'(x)=x^2-2ax+2a+3=0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-2a-3>0$

$(a+1)(a-3)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>3$

따라서 a의 값 중 가장 작은 자연수는 4이다.

답 ④

05

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 $h'(x)=0$에서

$x=b$ 또는 $x=e$

$y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프에서
$x<b$이면 $f'(x)<g'(x)$,
$b<x<e$이면 $f'(x)>g'(x)$,
$x>e$이면 $f'(x)<g'(x)$이므로
$h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $h(x)$는 $x=e$에서 극대이다.

답 e

06

$f'(x)=0$인 x는 -1과 2이고 $y=f'(x)$의 그래프에서 함숫값의 부호를 보고 증감표를 만들면 다음과 같다.

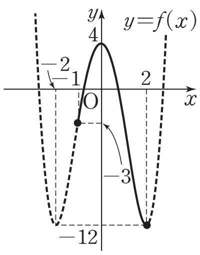
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

07

$f(x)=x^4-8x^2+4$에서
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm2$
구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$의 증감을 조사하면 그림과 같이 $x=0$에서 최대이고 $x=-1$ 또는 $x=2$에서 최소이다.

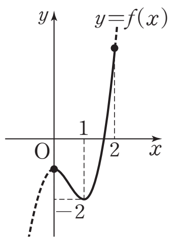


$f(0)=4$이므로 최댓값은 4
$f(-1)=1-8+4=-3$
$f(2)=16-32+4=-12$
이므로 최솟값은 -12
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$4+(-12)=-8$

답 ②

08

$f(x)=2ax^3-3ax^2+b$에서
$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
$a>0$이므로 구간 $[0, 2]$에서 $f(x)$의 증감을 조사하면 그림과 같이 $x=1$에서 최소이고 $x=0$ 또는 $x=2$에서 최대이다.

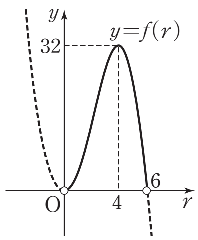


최솟값이 -2이므로 $f(1)=-2$에서
$-a+b=-2$ $\cdots$ ㉠
$f(0)=b$, $f(2)=4a+b$이고,
$b<4a+b$이므로 $x=2$에서 최대이다.
이때 최댓값이 3이므로 $f(2)=3$
$4a+b=3$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

답 $a=1$, $b=-1$

09

밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하고 원기둥의 부피를 V라 하자.
$r+h=6$이므로 $V=\pi r^2h=\pi r^2(6-r)$
$f(r)=r^2(6-r)=-r^3+6r^2$이라 하면
$f'(r)=-3r^2+12r=-3r(r-4)$
$f'(r)=0$에서 $r=0$ 또는 $r=4$
$0<r<6$이므로 이 범위에서 $f(r)$의 증감을 조사하면 그림과 같이 $r=4$에서 최대이다.



$f(4)=-64+96=32$
따라서 원기둥의 부피의 최댓값은 32π이다.

답 32π

10

전략 α, β가 $f'(x)=0$의 해임을 이용한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로
α, β가 방정식 $f'(x)=0$, 곧 $3ax^2+2bx+c=0$의 해이다.
$\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}<0$ $\cdots$ ㉠
$y=f(x)$의 그래프에서 x^3의 계수가 양수이므로 $a>0$
이때 ㉠에서 $b<0$, $c<0$
$\therefore |b+c|-|b|+|c|=-(b+c)-(-b)+(-c)$
$=-2c$

답 ④

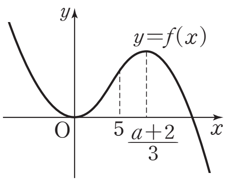
11 전략 함수 $f(x)$에서 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 감소함수이다.

두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$가 항상 성립하면 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 감소한다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이다.
$f'(x)=-3x^2+2(a-1)x-(a-1)\leq 0$
$3x^2-2(a-1)x+a-1\geq 0$이므로
$3x^2-2(a-1)x+a-1=0$에서
$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-3(a-1)\leq 0$
$(a-1)(a-4)\leq 0$ $\quad\therefore 1\leq a\leq 4$

답 $1\leq a\leq 4$

12 전략 $f'(x)=0$의 해를 찾고 $y=f(x)$의 그래프를 생각한다.

$f'(x)=-6x^2+2(a+2)x=-2x(3x-a-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{a+2}{3}$
$f(x)$의 x^3의 계수가 음수이므로
$\dfrac{a+2}{3}<0$이면 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 구간 $(0, 5)$에서 감소한다.
$\dfrac{a+2}{3}=0$이면 $f(x)=-2x^3$이므로 구간 $(0, 5)$에서 감소한다.
$\dfrac{a+2}{3}>0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $f(x)$가 구간 $(0, 5)$에서 증가하려면



$\dfrac{a+2}{3}\geq 5$ $\quad\therefore a\geq 13$
따라서 실수 a의 최솟값은 13이다.

답 ①

13 전략 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$이다.

$f'(x)=3x^2+6(a-1)x+3(a^2-2a)$
$f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$
$3+6(a-1)+3(a^2-2a)=0$, $3a^2-3=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1$일 때
$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$이고
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=6$
극솟값은 $f(3)=2$

(ii) $a=1$일 때
$f(x)=x^3-3x+2$이고
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=-1$이고, $f(x)$의 극댓값은 6, 극솟값은 2이다.

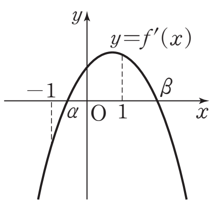
답 $a=-1$, 극댓값 : 6, 극솟값 : 2

14 전략 $f'(x)=0$의 해의 범위에 대한 문제이다. $y=f'(x)$의 그래프를 생각한다.

$f'(x)=-6x^2+2ax+4a^2$
$f'(x)=0$의 해를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이므로 주어진 조건에서
$-1<\alpha<1$, $\beta>1$
곧, $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같으므로



$f'(-1)<0$, $f'(1)>0$

$f'(-1)<0$에서

$4a^2-2a-6<0$, $(a+1)(2a-3)<0$

$\therefore -1<a<\frac{3}{2}$ $\cdots$ ㉠

$f'(1)>0$에서

$4a^2+2a-6>0$, $(2a+3)(a-1)>0$

$\therefore a<-\frac{3}{2}$ 또는 $a>1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $1<a<\frac{3}{2}$

답 $1<a<\frac{3}{2}$

15 전략 $f(x)=x^3+ax^2+bx$라 하고 조건을 만족시키는 $f'(x)$를 먼저 구한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$

라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈎에서 $x=4$에서 극소이므로

$f'(4)=0$ $\cdots$ ㉠

또 조건 ㈏에서 $f'(1-3)=f'(1+3)$이므로

$f'(-2)=0$ $\cdots$ ㉡

따라서 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, ㉠, ㉡에 의해 $f'(x)=0$의 두 근이 -2와 4이므로

$f'(x)=3(x+2)(x-4)=3x^2-6x-24$

$2a=-6$에서 $a=-3$이고, $b=-24$이므로

$f(x)=x^3-3x^2-24x$

$\therefore f(1)=1-3-24=-26$

답 -26

16 전략 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq0)$라 놓고 조건을 만족시키는 $f(x)$를 구한다.

조건 ㈎에 의하여 사차함수 $y=f(x)$는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$f(x)=ax^4+bx^2+c$ ($a\neq0$이고 a, b, c는 정수)

조건 ㈏에서 $f(0)=3$, $f(1)=0$이므로

$c=3$, $a+b=-3$ $\cdots$ ㉠

$f'(x)=4ax^3+2bx$에서 $f'(1)=4a+2b$이므로

조건 ㈐에서 $-8<4a+2b<-2$이다.

$b=-3-a$를 대입하면

$-2<2a<4$, $-1<a<2$

a는 0이 아닌 정수이므로 $a=1$, $b=-4$

$f(x)=x^4-4x^2+3$, $f'(x)=4x^3-8x$

$f'(x)=0$에서 $4x^3-8x=0$

$x(x^2-2)=x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

따라서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$에서 극값을 가진다.

함수 $y=f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로 $x=-\sqrt{2}$와 $x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 가진다.

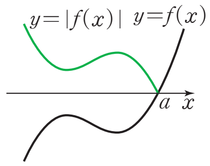
$\therefore f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=-1$

답 ③

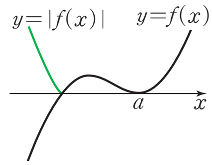
17 전략 $f(x)$가 다항함수이고 $f(a)=0$일 때, $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$인 점에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 0, 곧 $f'(a)=0$이다.

[그림 1]과 같이 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축과 만나면 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

그러나 [그림 2]처럼 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접하면 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

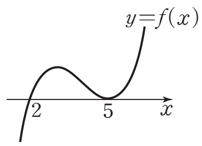


[그림 1]



[그림 2]

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 $x=2$인 점에서 x축과 만나고, $x=5$인 점에서 x축에 접한다.



또, 삼차항의 계수는 2이므로

$f(x)=2(x-2)(x-5)^2$

$f'(x)=2(x-5)^2+4(x-2)(x-5)$

$=6(x-3)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$이므로 $x=3$에서 극대이다.

$\therefore f(3)=8$

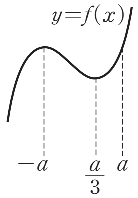
답 8

18 전략 극값과 구간의 양 끝 점의 함숫값을 비교한다.

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)=0$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 $a>0$이므로 그림과 같이 $x=-a$에서 극대, $x=\frac{a}{3}$에서 극소이다.



구간 $[-a, a]$에서 극솟값은 최솟값이므로 최솟값은

$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{3}+2=\frac{14}{27}$

$a^3=8$ $\quad\therefore a=2$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$

최댓값은 $f(-2)$ 또는 $f(2)$이므로

$f(-2)=f(2)=10$

따라서 최댓값 M은 10이므로

$a+M=2+10=12$

답 12

19 전략 $g(x)=t$로 놓고 t의 범위에서 $f(t)$의 증감을 조사한다.

$g(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이고

$g(1)=-1$, $g(3)=3$이므로 $0\le x\le 3$에서

$-1\le g(x)\le 3$

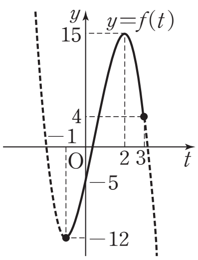
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $g(x)=t$라 하면 $-1\le t\le 3$이고

$f(t)=-2t^3+3t^2+12t-5$

$f'(t)=-6t^2+6t+12=-6(t+1)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=2$

$-1\le t\le 3$에서 $f(t)$의 증감을 조사하면 그림과 같이 $t=2$에서 최대이고 $t=-1$ 또는 $t=3$에서 최소이다.



$f(2)=15$

이므로 최댓값은 15

$f(-1)=-12$, $f(3)=4$

이므로 최솟값은 -12

답 최댓값 : 15, 최솟값 : -12

20 전략 $x^2+3y^2=9$를 이용하여 구하는 식에서 한 문자를 소거한다. 이때 문자의 범위에 주의한다.

$x^2+3y^2=9$에서 $y^2=\frac{1}{3}(9-x^2)$ $\quad\cdots$ ㉠

$y^2\ge 0$이므로 $\frac{1}{3}(9-x^2)\ge 0$ $\quad\therefore -3\le x\le 3$

㉠을 x^2+xy^2에 대입하면

$x^2+xy^2=x^2+x\times\frac{1}{3}(9-x^2)$

$\qquad=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$라 하면

$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-3, 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↘	극소	↗	9

따라서 $f(x)$가 $x=-1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(-1)=-\frac{5}{3}$

답 ①

21 전략 점 A, B, C의 좌표를 구하고 삼각형 OBC, BAC의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$의 교점의 x좌표는

$x^3=-x^3+2x$, $2x(x^2-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm 1$

점 A는 제1사분면의 점이므로 A$(1, 1)$이다.

또 두 곡선과 직선 $x=k$가 만나는 두 점 B, C의 좌표는

B(k, k^3), C$(k, -k^3+2k)$이므로

$\overline{BC}=-k^3+2k-k^3=-2k^3+2k$

점 O와 직선 BC 사이의 거리는 k, 점 A와 직선 BC 사이의 거리는 $1-k$이므로 사각형 OBAC의 넓이는

$\square OBAC=\triangle OBC+\triangle BAC$

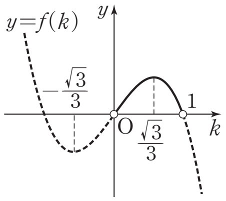
$\qquad=\frac{1}{2}\overline{BC}\times k+\frac{1}{2}\overline{BC}\times(1-k)$

$\qquad=\frac{1}{2}\overline{BC}=-k^3+k$

$f(k)=-k^3+k$라 하면 $f'(k)=-3k^2+1$

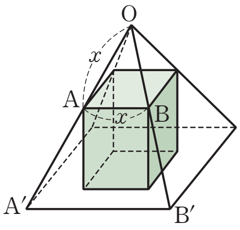
$f'(k)=0$에서 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$0<k<1$에서 $f(k)$의 증감을 조사하면 그림과 같이 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 □OBAC의 넓이가 최대이다.

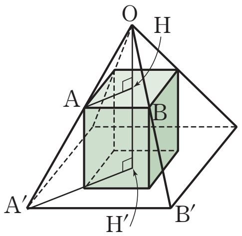


답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

22 전략 피타고라스 정리와 도형의 닮음을 이용하여 직육면체의 부피를 다항식으로 나타낸다.



[그림 1]



[그림 2]

직육면체의 밑면은 정사각뿔의 밑면과 닮은 도형이므로 정사각형이다. 이 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하자.

정사각뿔의 옆면이 정삼각형이므로 [그림 1]에서 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 x $(0<x<3)$인 정삼각형이다.

또 [그림 2]와 같이 점 O에서 정사각뿔의 밑면에 수선을 내릴 때, 직육면체의 윗면, 아랫면과 만나는 점을 각각 H, H′이라 하자.

정사각뿔 밑면의 대각선의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{A'H'}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{OH'}}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

두 삼각형 OAH와 OA′H′이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{OH'}}=x:3$, $\overline{\mathrm{OH}}:\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=x:3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}x}{2}$

$\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OH'}}-\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}(3-x)}{2}$

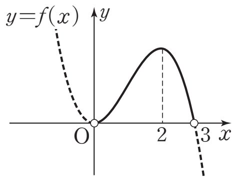
곧, 직육면체의 부피는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2(3-x)$

$f(x)=x^2(3-x)=-x^3+3x^2$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$0<x<3$에서 $f(x)$의 증감을 조사하면 그림과 같이 $x=2$에서 최대이다.



$f(2)=-2^3+3\times2^2$

$=4$

따라서 직육면체의 부피의 최댓값은

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times4=2\sqrt{2}$

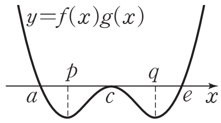
답 ①

23 전략 주어진 함수의 그래프를 이용하여 $y=f(x)g(x)$의 그래프를 그린다.

그래프에서 $f(a)=0$, $f(c)=g(c)=0$, $f(e)=0$이므로 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=e$에서 함숫값이 0이다.

$x<a$에서 $f(x)g(x)>0$, $a<x<e$에서 $f(x)g(x)\le0$, $x>e$에서 $f(x)g(x)>0$이다.

또 $x=p$, $x=q$에서 극소이므로 $y=f(x)g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\cdots$ ㉠

이고 $x=b$에서 $f'(b)=0$, $g(b)<0$, $f(b)>0$, $g'(b)>0$이므로 ㉠에서 $h'(b)>0$

곧, $x=b$에서 $h(x)$는 증가하므로 $p<b<c$

$\therefore\ a<p<b$

$x=d$에서 $f'(d)=0$, $g(d)>0$, $f(d)<0$, $g'(d)>0$이므로 ㉠에서 $h'(d)<0$

곧, $x=d$에서 $h(x)$는 감소하므로 $c<d<q$

$\therefore\ d<q<e$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

6 미분의 활용

개념 Check

101쪽 ~ 102쪽

1

(1) $f(x)=x^3-3x+3$이라 하자.

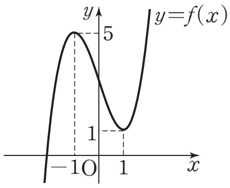
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 x축과 한 점에서 만나므로 방정식의 실근의 개수는 1이다.

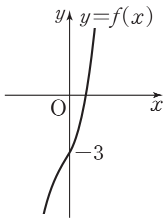


(2) $f(x)=x^3+x^2+2x-3$이라 하자.

$f'(x)=3x^2+2x+2>0$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 방정식의 실근의 개수는 1이다.



답 (1) 1 (2) 1

2

(1) $f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하자.

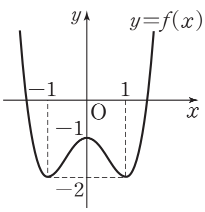
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 x축과 두 점에서 만나므로 방정식의 실근의 개수는 2이다.



(2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+4$라 하자.

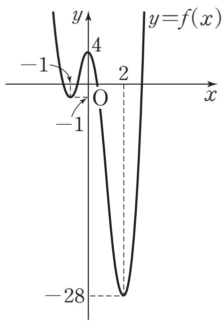
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	4	↘	-28	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 x축과 네 점에서 만나므로 방정식의 실근의 개수는 4이다.



(3) $f(x)=3x^4+4x^3+4$라 하자.

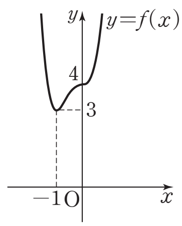
$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ (중근)

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↗	4	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 x축과 만나지 않으므로 방정식의 실근의 개수는 0이다.



답 (1) 2 (2) 4 (3) 0

3

$f(x)=x^3-3x+a$라 하면

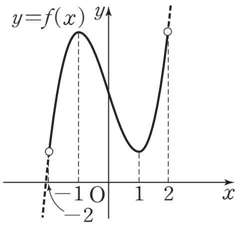
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$-2<x<2$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 $-2<x<2$에서
$f(x)>0$이려면
$f(-2)=-2+a>0$이고
$f(1)=-2+a>0$
$\therefore a>2$

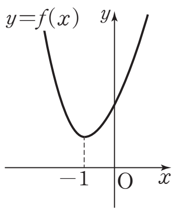


답 $a>2$

4

$f(x)=x^4+4x+a$라 하면
$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$
$f'(x)=0$의 실근은 $x=-1$
$f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗



$f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 최소이다.
따라서 $f(x)\geq 0$이려면 $f(-1)\geq 0$이어야 한다.
$1-4+a\geq 0 \qquad \therefore a\geq 3$

답 $a\geq 3$

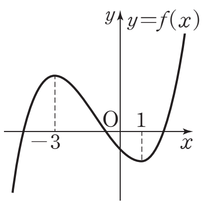
대표Q 103쪽~107쪽

대표 Q1

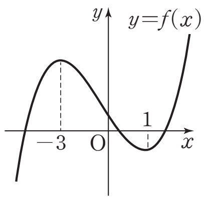
$f(x)=x^3+3x^2-9x+k$라 하면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$27+k$	↘	$-5+k$	↗

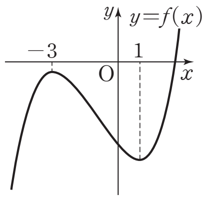
(1) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로
$f(-3)>0$, $f(1)<0$에서
$27+k>0$, $-5+k<0$
$\therefore -27<k<5$



(2) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로
$f(-3)>0$, $f(0)>0$,
$f(1)<0$에서
$27+k>0$, $k>0$,
$-5+k<0 \qquad \therefore 0<k<5$



(3) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로
$f(-3)<0$에서 $27+k<0$
$\therefore k<-27$



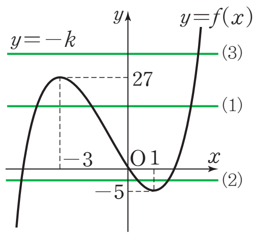
다른 풀이

$x^3+3x^2-9x=-k$에서 $f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

(1) 서로 다른 세 실근을 가지면
$-5<-k<27$
$\therefore -27<k<5$

(2) 음의 실근 한 개와 서로 다른 두 양의 실근을 가지면
$-5<-k<0 \qquad \therefore 0<k<5$



(3) 양의 실근 한 개와 두 허근을 가지면
$-k>27 \qquad \therefore k<-27$

답 (1) $-27<k<5$ (2) $0<k<5$ (3) $k<-27$

1-1

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-k$라 하면
$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$
$=12x^2(x-2)-12(x-2)$
$=12(x^2-1)(x-2)$
$=12(x+1)(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

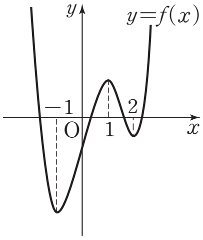
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-19-k$	↗	$13-k$	↘	$8-k$	↗

(1) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$f(-1)<0$, $f(1)>0$, $f(2)<0$에서

$-19-k<0$, $13-k>0$, $8-k<0$

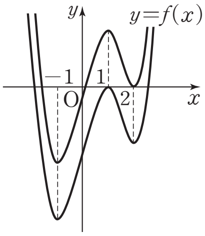
$\therefore 8<k<13$



(2) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

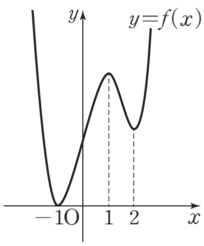
$f(1)=0$ 또는 $f(2)=0$

$\therefore k=8$ 또는 $k=13$



(3) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$f(-1)=0$ $\qquad \therefore k=-19$

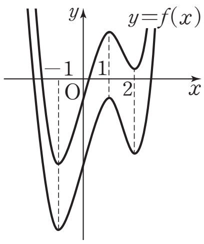


(4) $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$f(-1)<0$, $f(2)>0$ 또는 $f(1)<0$

$-19-k<0$, $8-k>0$ 또는 $13-k<0$

$\therefore -19<k<8$ 또는 $k>13$



다른 풀이

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$에서

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$$\begin{aligned} f'(x)&=12x^3-24x^2-12x+24 \\ &=12x^2(x-2)-12(x-2) \\ &=12(x^2-1)(x-2) \\ &=12(x+1)(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

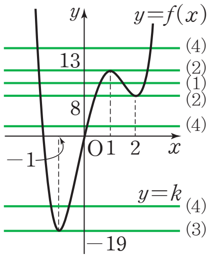
(1) 서로 다른 네 실근을 가지면

$8<k<13$

(2) 중근 한 개와 서로 다른 두 실근을 가지면

$k=8$ 또는 $k=13$

(3) 중근 한 개와 두 허근을 가지면 $k=-19$



(4) 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가지면

$-19<k<8$ 또는 $k>13$

답 (1) $8<k<13$ (2) 8, 13 (3) -19
(4) $-19<k<8$ 또는 $k>13$

대표 Q2

$x^3-2x+1=x+k$에서 $x^3-3x+1=k$

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

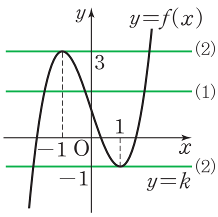
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

(1) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나면

$-1<k<3$



(2) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나면

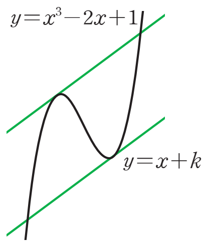
$k=-1$ 또는 $k=3$

다른 풀이

그림에서 직선 $y=x+k$는 곡선 $y=x^3-2x+1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식과 같으므로

$f(x)=x^3-2x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2$



접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-2=1$ $\quad \therefore a=\pm 1$

이때 $f(-1)=-1+2+1=2$, $f(1)=1-2+1=0$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-1$, $y=x+3$이다.

(1) 서로 다른 세 점에서 만나면

$-1<k<3$

(2) 서로 다른 두 점에서 만나면

$k=-1$ 또는 $k=3$

답 (1) $-1<k<3$ (2) -1, 3

2-1

$x^4-2x^2-2x-1=-2x+k$에서

$x^4-2x^2-1=k$

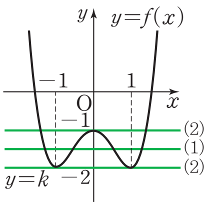
$f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗



(1) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나면

$-2<k<-1$

(2) $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 접하면

$k=-2$ 또는 $k=-1$

답 (1) $-2<k<-1$ (2) -2, -1

2-2

$x^4-x^2=-x^4+3x^2+a$에서

$2x^4-4x^2=a$

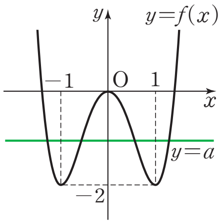
$f(x)=2x^4-4x^2$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 네 점에서 만난다.

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나면 $-2<a<0$

답 $-2<a<0$

대표 03

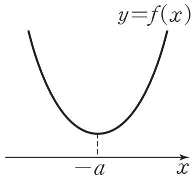
(1) $f(x)=x^4+4a^3x+48$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4a^3=4(x+a)(x^2-ax+a^2)$

$f'(x)=0$의 실근은 $x=-a$

$f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗



$f(x)$는 $x=-a$에서 극소이고 최소이다.

따라서 $f(x)>0$이면 $f(-a)>0$이다.

$f(-a)=a^4-4a^4+48>0$

$a^4<16$, $(a^2-4)(a^2+4)<0$

$a^2\geq 0$이므로 $a^2<4$ $\quad \therefore -2<a<2$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=5x^3-10x^2+k-(5x^2+2)$

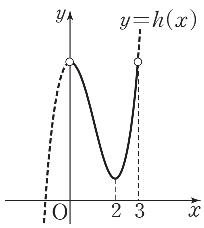
$\quad =5x^3-15x^2+k-2$

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	



$h(x)$는 $x=2$에서 극소이고 최소이다.

곧, $0<x<3$에서 $h(x)\geq 0$이면 $h(2)\geq 0$이다.

$40-60+k-2\geq 0$

$\therefore k\geq 22$

따라서 k의 최솟값은 22이다.

답 (1) $-2<a<2$ (2) 22

3-1

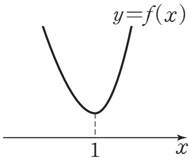
$f(x)=x^4-4x-a^2+4a$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$의 실근은 $x=1$

$f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗



$f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 최소이다.

따라서 $f(x)>0$이면 $f(1)>0$이다.

$f(1)=1-4-a^2+4a>0$, $a^2-4a+3<0$

$(a-1)(a-3)<0$ $\quad\therefore 1<a<3$

답 $1<a<3$

3-2

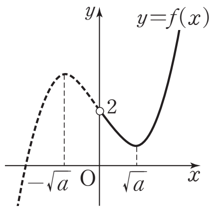
$f(x)=x^3-3ax+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

$x>0$에서 $f'(x)=0$의 해는 $x=\sqrt{a}$

$f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗



$f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극소이고 최소이다.

따라서 $x>0$에서 $f(x)>0$이면 $f(\sqrt{a})>0$이다.

$f(\sqrt{a})=a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+2>0$, $a\sqrt{a}<1$, $a^{\frac{3}{2}}<1$

$a>0$이므로 $0<a<1$

답 $0<a<1$

3-3

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4-x^3+5x+k^2-(-x^3+6x^2-3x+2k)$

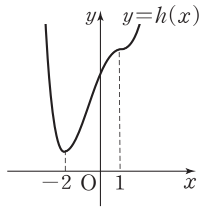
$\quad=x^4-6x^2+8x+k^2-2k$

$h'(x)=4x^3-12x+8=4(x-1)^2(x+2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ (중근)

$h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗



$h(x)$는 $x=-2$에서 극소이고 최소이다.

따라서 $h(x)>0$이면 $h(-2)>0$이다.

$h(-2)$

$=16-24-16+k^2-2k>0$

$k^2-2k-24>0$

$(k+4)(k-6)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>6$

답 $k<-4$ 또는 $k>6$

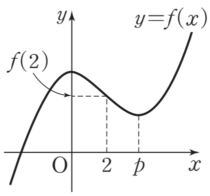
대표 Q4

① $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 원점이 아닌 점의 x좌표를 p라 하자.

$f'(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=p$ $(p>2)$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗



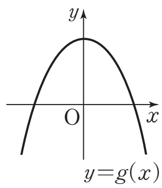
$f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=p$에서 극소이다.

이때 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다. (거짓)

② $g'(x)=0$에서 $x=0$

$g(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘



$g(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $g(0)=f(0)$이다.

그런데 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)>f(2)$이므로

$g(0)>f(2)$

곧, $g(x)$의 극댓값은 $f(2)$보다 크다. (참)

③, ④, ⑤ $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

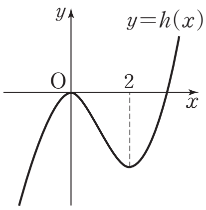
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x=2$에서 극소이다.

또 $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



③ 구간 $(-\infty, 2)$에서 $h(x)$의 최댓값은 $h(0)=0$이다. (참)

④ 방정식 $h(x)=0$은 한 실근과 중근을 가진다. (거짓)

⑤ $x\ge 2$에서 $h(x)<0$인 부분이 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ②, ③이다.

답 ②, ③

4-1

$y=f'(x)$의 그래프와 $y=g'(x)$의 그래프가 $x=p$, $x=3$인 점에서 만난다고 하자.

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

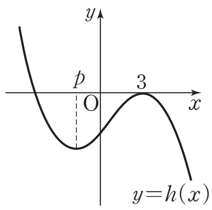
$h'(x)=0$에서 $x=p$ 또는 $x=3$

$h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	p	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$h(x)$는 $x=p$에서 극소이고, $x=3$에서 극대이다.

또 $h(3)=f(3)-g(3)=0$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 방정식 $h(x)=0$은 음의 실근을 가진다. (참)

ㄴ. 방정식 $h(x)=0$은 한 실근과 중근을 가지므로 허근을 갖지 않는다. (거짓)

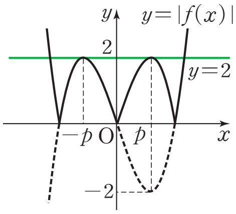
ㄷ. $x>0$에서 $h(x)\le 0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ㄱ

날선 Q5

방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근이 4개이면 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 네 점에서 만난다.



$p>0$일 때 $y=f(x)$가

$x=-p$에서 극댓값 2,

$x=p$에서 극솟값 -2

를 가진다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(x)=x^3+ax$라 하면

$f'(x)=0$의 근이 $x=\pm p$이므로

$3x^2+a=3(x+p)(x-p)$

우변을 전개하여 양변의 계수를 비교하면 $a=-3p^2$

이때 $f(x)=x^3-3p^2x$이고 $f(p)=-2$이므로

$p^3-3p^3=-2$, $p^3=1$

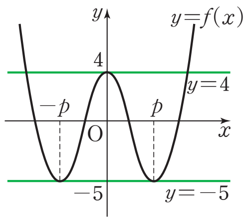
p는 실수이므로 $p=1$

$\therefore f(x)=x^3-3x$

답 $f(x)=x^3-3x$

5-1

x^4의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 서로 다른 세 점에서 만나므로 그림과 같이 직선 $y=4$는 $y=f(x)$의 그래프와 극대인 점에서 접한다.



또 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(-x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가진다.

한편 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-5$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(x)$는 y좌표가 -5인 두 점에서 극소이다.

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $f(0)=4$이므로 $b=4$

$f(x)$가 $x=\pm p$ $(p>0)$에서 극소라 하면 방정식

$f'(x)=0$의 근이 $x=0$ 또는 $x=\pm p$이므로

$4x^3+2ax=4x(x+p)(x-p)$

우변을 전개하여 양변의 계수를 비교하면 $a=-2p^2$

이때 $f(x)=x^4-2p^2x^2+4$이고 $f(p)=-5$이므로

$-p^4+4=-5$, $p^4=9$

$p^2>0$이므로 $p^2=3$

$\therefore f(x)=x^4-6x^2+4$

답 $f(x)=x^4-6x^2+4$

개념 Check

109쪽

5

(1) 시각 t에서 P의 속도는 $v(t)=x'(t)=2t-6$,

가속도는 $a(t)=v'(t)=2$

(2) 시각 $t=2$에서 P의 속도는 $v(2)=2\times2-6=-2$,

가속도는 $a(2)=2$

(3) P의 속도가 0이 되는 시각은

$v(t)=2t-6=0$에서 $t=3$

P의 속도가 0이 되는 위치는

$x(3)=3^2-6\times3+2=-7$

답 (1) 속도 : $2t-6$, 가속도 : 2

(2) 속도 : -2, 가속도 : 2

(3) 시각 : 3, 위치 : -7

참고 (2) P의 가속도는 2로 일정하다.

대표Q

110쪽~112쪽

대표 Q6

$x(t)=t^3-6t^2+9t$에서

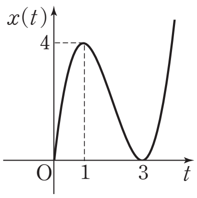
$x'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

$x'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$t\geq0$에서 $x(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$	0	↗	4	↘	0	↗

또 시각 t에서 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면



$v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

$a(t)=v'(t)=6t-12$

(1) $t=4$에서 P의 속도는

$v(4)=48-48+9=9$

가속도는 $a(4)=24-12=12$

(2) $x(t)$가 극값을 가질 때 P가 움직이는 방향이 바뀌므로 P의 위치는 $x(1)=4$, $x(3)=0$

(3) $v(t)<0$일 때 P가 음의 방향으로 움직이므로

$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)<0$

$\therefore 1<t<3$

(4) $t=1$, $t=3$에서 P가 움직이는 방향이 바뀌고

$x(1)=4$, $x(3)=0$, $x(4)=4$이다. 따라서 P가

$t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리는 $x(1)-x(0)=4$

$t=1$에서 $t=3$까지 움직인 거리는 $x(1)-x(3)=4$

$t=3$에서 $t=4$까지 움직인 거리는 $x(4)-x(3)=4$

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 P가 움직인 거리는

$4+4+4=12$

답 (1) 속도 : 9, 가속도 : 12 (2) 0, 4

(3) $1<t<3$ (4) 12

참고 (3) $x(t)$가 감소하는 구간으로 생각해도 된다.

6-1

$x(t)=3t^4-20t^3+36t^2$에서

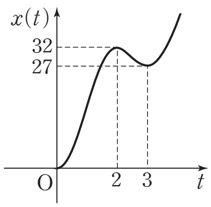
$x'(t)=12t^3-60t^2+72t=12t(t-2)(t-3)$

$x'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$

$t\geq0$에서 $x(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$	0	↗	32	↘	27	↗

또 시각 t에서 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면



$v(t)=x'(t)$

$\quad=12t^3-60t^2+72t$

$a(t)=v'(t)$

$\quad=36t^2-120t+72$

(1) $t=1$에서 P의 속도는

$v(1)=12-60+72=24$

가속도는 $a(1)=36-120+72=-12$

(2) $x(t)$가 극값을 가질 때 P가 움직이는 방향이 바뀌므로 시각은 $t=2$, $t=3$

(3) $v(t)<0$, 곧 $x(t)$가 감소하는 구간에서 P가 음의 방향으로 움직이므로 $2<t<3$

(4) $a(t)=12(3t^2-10t+6)=36\left(t-\frac{5}{3}\right)^2-28$

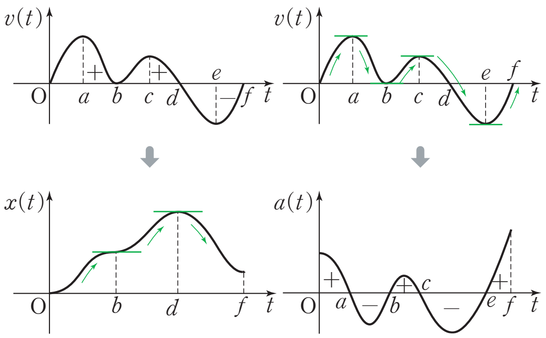
이므로 $t=\frac{5}{3}$일 때 P의 가속도가 최소이다.

(5) $t=2$, $t=3$에서 P가 움직이는 방향이 바뀌고
$x(2)=32$, $x(3)=27$, $x(4)=64$이다.
따라서 P가
$t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는 $x(2)-x(0)=32$
$t=2$에서 $t=3$까지 움직인 거리는 $x(2)-x(3)=5$
$t=3$에서 $t=4$까지 움직인 거리는 $x(4)-x(3)=37$
따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 P가 움직인 거리는
$32+5+37=74$

답 (1) **속도 : 24, 가속도 : -12**
(2) 2, 3 (3) $2<t<3$ (4) $\frac{5}{3}$ (5) 74

대표 Q7

$v(t)$의 그래프를 이용하여 $x(t)$, $a(t)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.

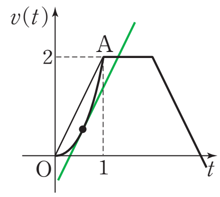


① $t=d$일 때 P는 원점에서 가장 멀리 있다. (거짓)
② $d<t<f$에서 $v(t)$가 음수이므로 P는 음의 방향으로 움직인다. (참)
③ $b<t<c$에서 P의 가속도는 양수이지만 $c<t<d$에서 P의 가속도는 음수이다. (거짓)
④ $a<t<b$에서 가속도가 음수이지만 이 구간에서 $v(t)$는 양수이므로 P는 양의 방향으로 움직인다. (거짓)
⑤ $t>0$에서 P의 가속도가 0인 시각은 $t=a$, $t=b$, $t=c$, $t=e$의 4번이다. (참)
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

7-1

① $0<t<3$에서 $v(t)>0$, $3<t<5$에서 $v(t)<0$이므로 P는 움직이는 방향을 $t=3$에서 1번 바꾼다. (거짓)
② $t=3$에서 $x(t)$는 극대이므로 P는 원점에서 가장 멀리 있다. (거짓)
③ $2<t<4$에서 $v(t)$의 그래프는 기울기가 -2인 직선이므로 이 구간에서 P의 가속도 $v'(t)$는 -2로 일정하다. (참)
④ $v(t)$의 그래프가 x축에 평행한 구간, 곧 $1<t<2$에서 P의 가속도 $v'(t)$는 0이다. 그러나 이 구간에서 $v(t)>0$이므로 P는 양의 방향으로 움직이고, 원점에서 거리가 멀어진다. (참)
⑤ 그림과 같이 직선 OA의 기울기는 2이다. 이때 $0<t<1$에서 $v(t)$의 그래프에 접하고 기울기가 2인 직선을 그을 수 있다. 곧, 이 접점의 t의 값에서 가속도가 2이다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

대표 Q8

(1) t초 후에 $\overline{AP}=2t$, $\overline{BQ}=3t$이므로
$\triangle APD=\frac{1}{2}\times20\times2t=20t$
$\triangle DQC=\frac{1}{2}\times20\times(20-3t)=200-30t$
사각형 DPBQ의 넓이를 $S(t)$라 하면
$S(t)=20^2-20t-(200-30t)=200+10t$
따라서 사각형 DPBQ의 넓이의 변화율은 $S'(t)=10$
(2) 사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$이 되는 시각 t는
$200+10t=\frac{11}{20}\times20^2$, $20+t=22$ $\therefore t=2$
삼각형 PBQ의 넓이를 $R(t)$라 하면
$R(t)=\frac{1}{2}\times3t\times(20-2t)=30t-3t^2$
$R'(t)=30-6t$
따라서 $t=2$일 때, 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은
$R'(2)=18$

답 (1) 10 (2) 18

8-1

처음 구의 반지름의 길이는 1이므로 t초 후 구의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=1+2t$

반지름의 길이가 5가 되는 시각 t는

$1+2t=5 \qquad \therefore t=2$

(1) t초 후 구의 겉넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=4\pi r^2=4\pi(2t+1)^2=16\pi t^2+16\pi t+4\pi$

$S'(t)=32\pi t+16\pi$

따라서 $t=2$일 때, 구의 겉넓이의 변화율은

$S'(2)=64\pi+16\pi=80\pi$

(2) t초 후 구의 부피를 $V(t)$라 하면

$V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(2t+1)^3$

$=\frac{32}{3}\pi t^3+16\pi t^2+8\pi t+\frac{4}{3}\pi$

$V'(t)=32\pi t^2+32\pi t+8\pi$

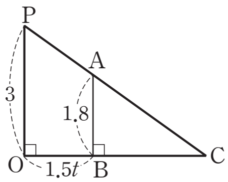
따라서 $t=2$일 때, 구의 부피의 변화율은

$V'(2)=128\pi+64\pi+8\pi=200\pi$

답 (1) 80π (2) 200π

8-2

그림과 같이 가로등의 바로 밑인 지점을 O, 가로등의 맨 끝 지점을 P, 영수의 머리 끝 지점을 A, 영수가 지면과 닿는 지점을 B, 그림자의 끝 지점을 C라 하자.



$\overline{PO}=3$, $\overline{AB}=1.8$이고 t초 후에 $\overline{OB}=1.5t$

(1) $\overline{OC}=x$라 하면 그림자 끝이 움직이는 속도는 x'이다.

두 삼각형 ABC, POC는 서로 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{BC}=\overline{PO} : \overline{OC}$

$1.8 : (x-1.5t)=3 : x$, $1.8x=3x-4.5t$

$1.2x=4.5t \qquad \therefore x=\frac{15}{4}t$

$\therefore x'=\frac{15}{4}=3.75(\text{m/s})$

(2) $\overline{BC}=l$이라 하면 그림자 길이의 변화율은 l'이다.

$l=\frac{15}{4}t-1.5t=\frac{9}{4}t$이므로

$l'=\frac{9}{4}=2.25(\text{m/s})$

답 (1) 3.75 m/s (2) 2.25 m/s

연습과 실전 6 미분의 활용

113쪽~116쪽

01 $0<n<1$	02 ①	03 $k\le-4$
04 $1<a<3$	05 ③	06 30초
07 (1) -10 m/s (2) -30 m/s	08 ⑤	09 53
10 1	11 ①	12 $-3<k<-2$
13 ④, ⑤	14 ①	15 22
16 8	17 ④	18 ③
19 π		

01

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$라 하면

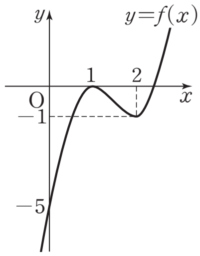
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$의 극댓값은 $f(1)=0$, 극솟값은 $f(2)=-1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 곡선 $y=f(x)$를 y축 방향으로 n만큼 평행이동하면



극댓값은 $f(1)=n$,

극솟값은 $f(2)=-1+n$

극댓값이 양수, 극솟값이 음수이면 x축과 세 점에서 만나므로

$n>0$, $-1+n<0 \qquad \therefore 0<n<1$

답 $0<n<1$

02

$x^3-3x^2-4x-k=5x+2$에서

$x^3-3x^2-9x-2=k$

$f(x)=x^3-3x^2-9x-2$라 하면

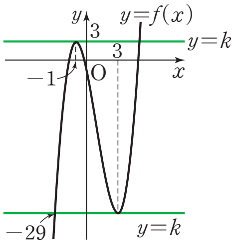
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-29	↗

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나면 $k=3$ 또는 $k=-29$
k는 자연수이므로 $k=3$



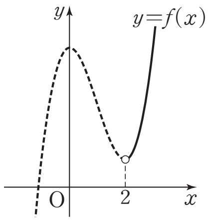
답 ①

03

$f(x)=x^3-3x^2-k$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$x>2$에서 부등식이 성립하면
$x>2$에서 $f(x)>0$이다.
따라서 $f(2)\geq0$이므로
$f(2)=8-12-k\geq0$
$\therefore k\leq-4$

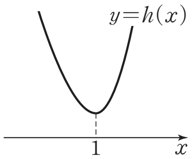


답 $k\leq-4$

04

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^4-2x^2+x-a^2-(-2x^2+5x-4a)$
$\quad=x^4-4x-a^2+4a$
$h'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$
$h'(x)=0$의 실근은 $x=1$
$h(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	극소	↗



$h(x)$는 $x=1$에서 극소이고 최소이다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으면 $h(x)>0$이므로 $h(1)>0$이다.
$h(1)=1-4-a^2+4a>0$, $a^2-4a+3<0$
$(a-1)(a-3)<0 \qquad \therefore 1<a<3$

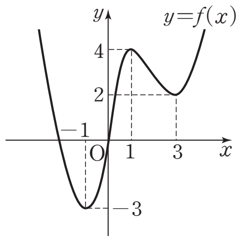
답 $1<a<3$

05

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−3	↗	4	↘	2	↗

$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 x축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 ③

06

자동차의 t초 후 속도를 v m/s라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=27-0.9t$
자동차가 정지할 때 속도가 0이므로
$v=27-0.9t=0 \qquad \therefore t=30$
따라서 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간은 30초이다.

답 30초

07

물체의 t초 후 속도를 v m/s라 하면
$v=\dfrac{dh}{dt}=20-10t$
(1) $t=3$일 때 물체의 속도는 $20-10\times3=-10$(m/s)
(2) 물체가 지면에 떨어질 때 높이는 0이므로
$25+20t-5t^2=0$, $t^2-4t-5=0$
$(t+1)(t-5)=0 \qquad \therefore t=5\ (\because t>0)$
따라서 $t=5$일 때 물체의 속도는
$20-10\times5=-30$(m/s)

답 (1) −10 m/s (2) −30 m/s

08

시각 t에서 P의 가속도는 $a(t)=v'(t)$이므로 가속도는 $y=v(t)$의 그래프의 접선의 기울기와 같다.

그래프에서

$a(t_1)=0,\ a(t_2)<0,\ a(t_3)<0,\ a(t_4)=0,\ a(t_5)>0$

따라서 시각 t_5에서 P의 가속도가 양수이다.

답 ⑤

09 전략 x^4의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$의 극댓값이 존재한다. ➡ 방정식 $f'(x)=0$의 해는 서로 다른 세 실수이다.

x^4의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지면 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다.

$4x^3-6x^2-24x-a=0$에서 $4x^3-6x^2-24x=a$

$g(x)=4x^3-6x^2-24x$라 하면

$g'(x)=12x^2-12x-24=12(x+1)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

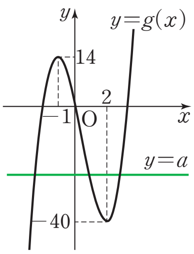
$g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$g(x)$의 극댓값은 $g(-1)=14$,

극솟값은 $g(2)=-40$이므로

$y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 세 점에서 만나므로

$-40<a<14$

따라서 정수 a는

$-39,\ -38,\ -37,\ \cdots,\ 13$

이고 53개이다.

답 53

10 전략 $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$를 만족시키는 실수 $c\ (-1<c<3)$의 개수를 찾는다.

$f(x)=x^4-2x^3+x$에 대하여 구간 $[-1,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 값을 $c\ (-1<c<3)$라 하면

$\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$ $\cdots$ ㉠

$f(3)=30,\ f(-1)=2$이므로

㉠의 좌변은 $\dfrac{30-2}{4}=7$

㉠의 우변은 $f'(c)=4c^3-6c^2+1$

곧, $-1<c<3$에서 $7=4c^3-6c^2+1$의 해의 개수를 구한다.

$g(c)=4c^3-6c^2+1$이라 하면

$g'(c)=12c^2-12c=12c(c-1)$

$g'(c)=0$에서 $c=0$ 또는 $c=1$

구간 $(-1,\ 3)$에서 $g(c)$의 증감표는 다음과 같다.

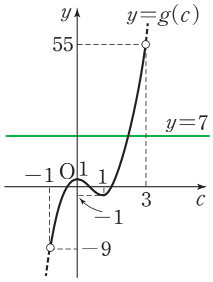
c	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$g'(c)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(c)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$g(c)$의 극댓값은 $g(0)=1$,

극솟값은 $g(1)=-1$이고

$g(-1)=-9,\ g(3)=55$

이므로 $y=g(c)$의 그래프는 그림과 같다.



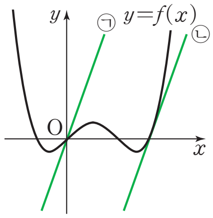
따라서 $-1<c<3$에서

$y=g(c)$의 그래프와 직선 $y=7$은 한 점에서 만나므로

c의 개수는 1이다.

답 1

참고 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=7$인 접선이 몇 개 있는지 구하는 문제이다. 그림에서 ㉠과 같은 경우는 접선이 아니라는 것을 주의한다.



11 전략 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓는다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가진다.

$h(x)=2x^3+3x^2-12x-a$

$h'(x)=6x^2+6x-12$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

$h(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 $x=-2$에서 극대이고 $x=1$에서 극소이다.

따라서 서로 다른 세 근을 가지므로

$h(-2)>0,\ h(1)<0$

$h(-2)=20-a>0$ $\quad\therefore a<20$ $\quad\cdots$ ㉠

$h(1)=-7-a<0$ $\quad\therefore a>-7$ $\quad\cdots$ ㉡

또 하나의 음의 실근을 가지므로 $y=h(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점이 양이다.

$h(0)=-a>0 \quad \therefore a<0 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 $-7<a<0$이므로 정수 a는 모두 6개이다.

답 ①

12 전략 곡선과 직선의 접점의 좌표를 (a, a^3-3a)라 하고, 접선의 방정식부터 구한다.

$y'=3x^2-3$이므로 곡선 $y=x^3-3x$ 위의 점 (a, a^3-3a)에서의 접선의 방정식은

$y-a^3+3a=(3a^2-3)(x-a)$

이 접선이 점 $(1, k)$를 지나므로

$k-a^3+3a=(3a^2-3)(1-a)$

$\therefore k=-2a^3+3a^2-3$

이 방정식의 해가 서로 다른 세 실수이다.

$f(a)=-2a^3+3a^2-3$이라 하면

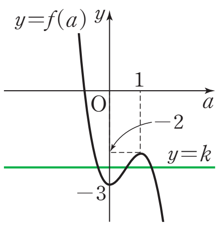
$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$

$f'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$f(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(a)$의 극댓값은 $f(1)=-2$, 극솟값은 $f(0)=-3$이므로 $y=f(a)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(a)$와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나면

$-3<k<-2$

답 $-3<k<-2$

13 전략 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)<g'(x)$ ➡ $f(x)-g(x)$는 감소한다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)-g'(x)<0$이므로

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 감소한다.

또 $f(0)=g(0)$에서 $h(0)=f(0)-g(0)=0$

(i) $x<0$일 때, $h(x)>0$이므로

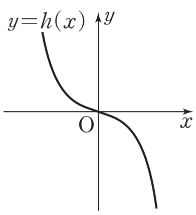
$h(-1)=f(-1)-g(-1)>0$

$\therefore f(-1)>g(-1)$

(ii) $x>0$일 때, $h(x)<0$이므로

$h(1)=f(1)-g(1)<0$

$\therefore f(1)<g(1)$



또 $g(x)$는 감소하므로 (i), (ii)에서

$f(1)<g(1)<g(-1)<f(-1)$

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

답 ④, ⑤

14 전략 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $v\geq 0$이다.

시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치를 $x(t)=t^3-5t^2+at+5$라 하면

$x'(t)=3t^2-10t+a$

점 P에서 운동 방향이 바뀌지 않으려면 속도는 음수가 아니다. 곧, $x'(t)\geq 0$이다.

$3t^2-10t+a\geq 0$

방정식 $3t^2-10t+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=25-3a\leq 0 \quad \therefore a\geq \frac{25}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 9이다.

답 ①

15 전략 $v=\frac{dx}{dt}$, $a=\frac{dv}{dt}$를 이용하여 $a=0$인 시각 t를 구한다.

시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치를 $x(t)=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+k$라 하면 시각 t에서의 속도 v는

$v(t)=x'(t)=-t^2+6t$

시각 t에서의 가속도 a는

$a(t)=v'(t)=-2t+6$

이므로 가속도 $a(t)=0$일 때 $t=3$이므로 이때 점 P의 위치는

$-9+27+k=40 \quad \therefore k=22$

답 22

16 전략 먼저 P, Q의 속도를 구한 후 속도가 같을 때 시각 t를 구한다.

P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$, 가속도를 $a_P(t)$, $a_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=f'(t)=t^2+4$, $v_Q(t)=g'(t)=4t$

$a_P(t)=v_P'(t)=2t$, $a_Q(t)=v_Q'(t)=4$

P, Q의 속도가 같아지는 시각 t는

$t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0 \quad \therefore t=2$

곧, $t=2$에서 P, Q의 가속도는 각각

$a_P(2)=4$, $a_Q(2)=4$

따라서 가속도의 합은 8이다.

답 8

17 전략 속도의 그래프 ➡ 부호는 움직이는 방향, 증감은 가속도

① $v(a)>0$, $v(b)<0$이므로 P는 $t=a$, $t=b$일 때 서로 반대 방향으로 움직인다. (참)

② $v(t)$의 부호가 세 번 바뀌므로 P는 움직이는 방향을 세 번 바꾼다. (참)

③ $t=g$일 때 속도가 감소하므로 P의 가속도는 음수이다. (참)

④ 구간 (e, f)에서 속도가 일정하고 양수이므로 P는 일정하게 양의 방향으로 움직인다. (거짓)

⑤ 구간 (c, e)에서 $v(t)\geq 0$이므로 P는 양의 방향으로 움직인다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

18 전략 두 자동차 A, B의 속도가 $f'(t)$, $g'(t)$임을 이용한다.

$f(20)=g(20)$이므로 $t=20$일 때, 같은 지점에서 동시에 출발한 A, B의 위치가 같다.

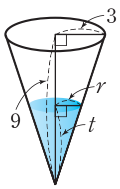
$10\leq t\leq 30$에서 $f'(t)<g'(t)$이므로 B가 A보다 빠르다.

따라서 B가 $t<20$에서 A의 뒤에 있다가 $t=20$에서 A를 추월한 다음 A와의 거리가 점점 멀어진다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

19 전략 t초 후 수면의 높이, 수면의 반지름의 길이, 물의 부피를 t에 대한 식으로 나타낸다.



t초 후 수면의 높이는 t이다.

t초 후 수면의 반지름의 길이를 r라 하면

$r : 3=t : 9 \qquad \therefore r=\frac{1}{3}t$

그릇에 담긴 물의 부피를 $V(t)$라 하면

$V(t)=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{1}{3}t\right)^2\times t=\frac{1}{27}\pi t^3$

$V'(t)=\frac{1}{9}\pi t^2$

따라서 $t=3$일 때, 물의 부피의 변화율은

$V'(3)=\frac{1}{9}\pi\times 3^2=\pi$

답 π

부정적분

개념 Check

118쪽~120쪽

1

$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로 양변을 미분하면

$f(x)=2x+2$

답 $f(x)=2x+2$

2

(1) $\int 5\,dx=5\int 1\,dx=5x+C$

(2) $\int k\,dx=k\int 1\,dx=kx+C$

(3) $\int 4x^3\,dx=4\int x^3\,dx=4\times\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=x^4+C$

(4) $\int(2x+1)\,dx=\int 2x\,dx+\int 1\,dx$

$=2\int x\,dx+\int 1\,dx$

$=2\times\frac{1}{2}x^2+x+C=x^2+x+C$

(5) $\int(3x-x^3)\,dx=\int 3x\,dx-\int x^3\,dx$

$=3\int x\,dx-\int x^3\,dx$

$=3\times\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+C$

$=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+C$

답 (1) $5x+C$ (2) $kx+C$ (3) x^4+C
(4) x^2+x+C (5) $-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+C$

3

(1) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$f(x)=x^2+6x-3$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+6x-3)\right\}dx$에서

$f(x)=x^2+6x-3+C$

$f(1)=2$이므로 $4+C=2$ $\therefore C=-2$

$\therefore f(x)=x^2+6x-5$

답 (1) $f(x)=x^2+6x-3$ (2) $f(x)=x^2+6x-5$

대표Q 121쪽 ~ 124쪽

대표 Q1

(1) $\int(2x^3-6x^2+3)\,dx=2\times\frac{1}{4}x^4-6\times\frac{1}{3}x^3+3x+C$

$=\frac{1}{2}x^4-2x^3+3x+C$

(2) $\int(x-1)(2x+1)\,dx=\int(2x^2-x-1)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$

(3) $\int(2t-1)^2\,dt=\int(4t^2-4t+1)\,dt$

$=\frac{4}{3}t^3-2t^2+t+C$ $\cdots$ ㉠

(4) $\int\frac{x^3}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{x+1}\,dx$

$=\int\frac{x^3+1}{x+1}\,dx$

$=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\,dx$

$=\int(x^2-x+1)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 (1) $\frac{1}{2}x^4-2x^3+3x+C$ (2) $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$

(3) $\frac{4}{3}t^3-2t^2+t+C$ (4) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

참고 (3) $f(x)=(ax+b)^{n+1}$의 도함수는

$f'(x)=(n+1)(ax+b)^n\times a$이므로

$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\times\frac{1}{n+1}\times(ax+b)^{n+1}+C$

를 이용할 수 있다. (단, $a\neq0$, n은 자연수)

$\int(2t-1)^2\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(2t-1)^3+C$

$=\frac{1}{6}(2t-1)^3+C$

이를 전개하면 $\frac{4}{3}t^3-2t^2+t-\frac{1}{6}+C$, $-\frac{1}{6}+C$도 상수이므로 C로 바꾸어 놓으면 ㉠과 같다.

1-1

(1) $\int(2-3x^3-x^4)\,dx=-\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+2x+C$

(2) $\int(t-1)(t^2+1)\,dt=\int(t^3-t^2+t-1)\,dt$

$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+C$

(3) $\int(x+2)^3\,dx=\int(x^3+6x^2+12x+8)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4+2x^3+6x^2+8x+C$

(4) $\int\frac{x^2}{x-1}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int\frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

$=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\,dx$

$=\int(x+1)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 (1) $-\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+2x+C$

(2) $\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+C$

(3) $\frac{1}{4}x^4+2x^3+6x^2+8x+C$

(4) $\frac{1}{2}x^2+x+C$

대표 Q2

(1) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-2)\,dx$

$=x^3-2x+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=x^3-2x+2$

(2) $\int(x+2)\,dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C_1=f_1(x)$

$\int 3x^2\,dx=x^3+C_2=f_2(x)$

라 하면

$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & (x>1)\\ f_2(x) & (x<1)\end{cases}$

$f(2)=f_1(2)=2$이므로

$6+C_1=2$ $\therefore C_1=-4$

또 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서 연속이다.

곧, $f_1(1)=f_2(1)$이므로

$-\frac{3}{2}=1+C_2 \qquad \therefore C_2=-\frac{5}{2}$

$\therefore f(0)=f_2(0)=-\frac{5}{2}$

답 (1) $f(x)=x^3-2x+2$ (2) $-\frac{5}{2}$

2-1

$f'(x)=4x^3+2x-3$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x^3+2x-3)\,dx$$
$$=x^4+x^2-3x+C_1$$

$f(1)=2$이므로 $-1+C_1=2 \qquad \therefore C_1=3$

따라서 $f(x)=x^4+x^2-3x+3$이므로

$$\int f(x)\,dx=\int (x^4+x^2-3x+3)\,dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+C$$

답 $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+C$

2-2

$$\int (x^2-1)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x+C_1=f_1(x)$$
$$\int (-1)\,dx=-x+C_2=f_2(x)$$

라 하면

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x>0) \\ f_2(x) & (x<0) \end{cases}$$

$f(-1)=f_2(-1)=3$이므로

$1+C_2=3 \qquad \therefore C_2=2$

또 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=0$에서 연속이다.

곧, $f_1(0)=f_2(0)$이므로 $C_1=C_2=2$

$\therefore f(1)=f_1(1)=\frac{1}{3}-1+2=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

대표 03

(1) $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x^2-4x)\,dx$$
$$=x^3-2x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $f(1)=2$에서

$-1+C=2 \qquad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+3$

(2) $$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (x^2-2x-3)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$$

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값이 2이므로 $f(-1)=2$에서

$\frac{5}{3}+C=2 \qquad \therefore C=\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f(3)=9-9-9+\frac{1}{3}=-\frac{26}{3}$

답 (1) $f(x)=x^3-2x^2+3$ (2) $-\frac{26}{3}$

3-1

$f'(x)=6x^2+4$이므로

$$f(x)=\int (6x^2+4)\,dx=2x^3+4x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 6)$을 지나므로 $f(0)=6$에서

$C=6$

$\therefore f(x)=2x^3+4x+6$

답 $f(x)=2x^3+4x+6$

3-2

$(x^4)'=4x^3$이므로 $f'(x)$는 x^3의 계수가 4인 삼차함수이다.

또 $x=0$ 또는 $x=\pm1$에서 극값을 가지므로 $f'(x)=0$의 해가 $x=0$ 또는 $x=\pm1$이다. 곧,

$f'(x)=4x(x+1)(x-1)=4x^3-4x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (4x^3-4x)\,dx$$
$$=x^4-2x^2+C$$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값이 -1이므로 $f(0)=-1$에서 $C=-1$

$\therefore f(x)=x^4-2x^2-1$

답 $f(x)=x^4-2x^2-1$

대표 Q4

(1) $F(x)=xf(x)-3x^4+x^2$의 양변을 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+2x$

$xf'(x)=12x^3-2x$

$f'(x)=12x^2-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2-2)\,dx$

$=4x^3-2x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=4x^3-2x+1$

(2) $g(x)$가 $x^2+f(x)$의 한 부정적분이므로

$g'(x)=x^2+f(x)$

그런데 $g'(x)$는 일차함수이므로

$g'(x)=ax+b\,(a\neq0)$로 놓으면

$f(x)=-x^2+ax+b$

라 할 수 있다.

$g(x)=\int(ax+b)\,dx=\frac{a}{2}x^2+bx+C$

이므로 $f(x)+g(x)=x+1$에서

$\left(-1+\frac{a}{2}\right)x^2+(a+b)x+b+C=x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-1+\frac{a}{2}=0,\ a+b=1,\ b+C=1$

$\therefore a=2,\ b=-1,\ C=2$

$\therefore f(x)=-x^2+2x-1$

답 (1) $f(x)=4x^3-2x+1$ (2) $f(x)=-x^2+2x-1$

4-1

$F(x)=xf(x)+4x^3-3x^2$의 양변을 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+12x^2-6x$

$xf'(x)=-12x^2+6x$

$f'(x)=-12x+6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-12x+6)\,dx$

$=-6x^2+6x+C$

$f(1)=-3$이므로 $C=-3$

$\therefore f(x)=-6x^2+6x-3$

답 $f(x)=-6x^2+6x-3$

4-2

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b\,(a\neq0)$라 하면

$g(x)=\int x(ax+b)\,dx=\int(ax^2+bx)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+C$

$g'(x)=ax^2+bx$이므로

$g(x)+g'(x)=x^3+px^2+2x+3$에서

$\frac{a}{3}x^3+\left(\frac{b}{2}+a\right)x^2+bx+C=x^3+px^2+2x+3$

양변의 계수를 비교하면

$\frac{a}{3}=1,\ \frac{b}{2}+a=p,\ b=2,\ C=3$

$\therefore a=3,\ p=4$

답 4

연습과 실전 7 부정적분 125쪽~126쪽

01 (1) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(2) $x^2y^3+xy^2+y+C$ (3) $\frac{1}{2}x^2+x+C$

(4) x^2-2x+C

02 ① **03** 4 **04** 36 **05** ④ **06** -5

07 17 **08** ④ **09** $f(x)=3x^2-2x+1$

10 $f(x)=x^2+x-1,\ g(x)=x+2$

01

(1) $\int(x+1)(x-1)^2\,dx$

$=\int(x^3-x^2-x+1)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(2) $\int(3x^2y^2+2xy+1)\,dy$

$=3x^2\int y^2\,dy+2x\int y\,dy+\int 1\,dy$

$=3x^2\times\frac{1}{3}y^3+2x\times\frac{1}{2}y^2+y+C$

$=x^2y^3+xy^2+y+C$

(3) $\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$=\int\left\{\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$

$=\int(x+1)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

(4) $\int\frac{2x^2}{x+2}\,dx+\int\frac{2x}{x+2}\,dx-\int\frac{4}{x+2}\,dx$

$=\int\frac{2x^2+2x-4}{x+2}\,dx$

$=\int\frac{2(x+2)(x-1)}{x+2}\,dx$

$=\int 2(x-1)\,dx$

$=\int(2x-2)\,dx$

$=x^2-2x+C$

답 (1) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(2) $x^2y^3+xy^2+y+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2+x+C$

(4) x^2-2x+C

02

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3+6x^2-4x+1)\,dx$

$=x^4+2x^3-2x^2+x+C$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

$\therefore f(x)=x^4+2x^3-2x^2+x-1$

$\therefore f(1)=1+2-2+1-1=1$

답 ①

03

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=2f'(1)$

$f(x)=\int(4x^3+3x-5)\,dx$의 양변을 미분하면

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int(4x^3+3x-5)\,dx=4x^3+3x-5$

$f'(1)=4+3-5=2$이므로

$2f'(1)=2\times2=4$

답 4

04

$\int g(x)\,dx=3x^2f(x)+C$의 양변을 미분하면

$g(x)=6xf(x)+3x^2f'(x)$

$f(2)=1$, $f'(2)=2$이므로

$g(2)=12f(2)+12f'(2)=36$

답 36

05

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})\,dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

$\therefore f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+3$

$\therefore f(2)=2+2^2+2^3+\cdots+2^n+3$

$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}+3=2^{n+1}+1$

답 ④

참고 첫째항이 a이고 공비가 $r\,(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$이다. (수학 I 내용)

곧, $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

06 전략 미분가능과 연속의 정의를 이용하여 k의 값과 적분상수를 구한다.

$\int k\,dx=kx+C_1=f_1(x)$

$\int(x+4)\,dx=\frac{1}{2}x^2+4x+C_2=f_2(x)$

라 하면

$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & (x>1)\\ f_2(x) & (x<1)\end{cases}$

(i) $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $f_1(1)=f_2(1)$

$k+C_1=\frac{9}{2}+C_2$ $\cdots$ ㉠

(ii) $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $f_1'(1)=f_2'(1)$

$k=1+4 \quad \therefore k=5$

(iii) $f(2)=f_1(2)=8$이므로

$2k+C_1=8 \quad \therefore C_1=-2$

㉠에 대입하면 $5-2=\frac{9}{2}+C_2 \quad \therefore C_2=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(-1)=f_2(-1)=\frac{1}{2}-4-\frac{3}{2}=-5$

답 -5

07 전략 부정적분을 구할 수 없으면 미분을 생각한다.

$\int\{1-f(x)\}\,dx=\frac{1}{4}x^2(24-x^2)+C$

의 양변을 미분하면

$1-f(x)=12x-x^3 \quad \therefore f(x)=x^3-12x+1$

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 극댓값은 $f(-2)=-8+24+1=17$

답 17

08 전략 그래프에서 $f'(x)$를 구하고 부정적분을 이용한다.

$y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\ (a>0)$이라 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int a(x+1)(x-1)\,dx$

$=a\int(x^2-1)\,dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$

또 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값이 4, 극솟값이 0이므로

$f(-1)=\frac{2}{3}a+C=4,\ f(1)=-\frac{2}{3}a+C=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ C=2$

$\therefore f(x)=x^3-3x+2$

$\therefore f(3)=27-9+2=20$

답 ④

09 전략 $F'(x)=f(x)$이므로 양변을 미분한다.

$F(x)-x^2=xf(x)-2x^3-3$의 양변을 미분하면

$f(x)-2x=f(x)+xf'(x)-6x^2$

$xf'(x)=6x^2-2x,\ f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-2)\,dx$

$=3x^2-2x+C$

$f(-1)=6$이므로 $5+C=6 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=3x^2-2x+1$

답 $f(x)=3x^2-2x+1$

10 전략 조건식을 미분하거나 적분하여 $f(x)$와 $g(x)$에 대한 식을 구한다.

$\int\{f(x)+g(x)\}\,dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

의 양변을 미분하면

$f(x)+g(x)=x^2+2x+1 \quad \cdots$ ㉠

또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+6x+1$에서

$f(x)g(x)=\int(3x^2+6x+1)\,dx$

$=x^3+3x^2+x+C_1 \quad \cdots$ ㉡

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(1)+g(1)=4$

$f(1)=1$이므로 $g(1)=3$

또 $x=1$을 ㉡에 대입하면 $f(1)g(1)=1+3+1+C_1$

$1\times3=5+C_1 \quad \therefore C_1=-2$

따라서 ㉡에서

$f(x)g(x)=x^3+3x^2+x-2=(x+2)(x^2+x-1)$

그런데 $f(1)=1$이므로

$f(x)=x^2+x-1,\ g(x)=x+2$

이 식은 ㉠을 만족시킨다.

답 $f(x)=x^2+x-1,\ g(x)=x+2$

8 정적분

개념 Check 128쪽~131쪽

1

(1) $\int_{-2}^{2} x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2}$

$=\left(\frac{1}{2}\times 2^2\right)-\left\{\frac{1}{2}\times(-2)^2\right\}=0$

(2) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$

$=\left(\frac{1}{3}\times 2^3\right)-\left\{\frac{1}{3}\times(-2)^3\right\}=\frac{16}{3}$

(3) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2}$

$=\left(\frac{1}{4}\times 2^4\right)-\left\{\frac{1}{4}\times(-2)^4\right\}=0$

답 (1) 0 (2) $\frac{16}{3}$ (3) 0

2

$\int_{1}^{1} x^2\,dx=0$

답 0

3

(1) $\int_{b}^{a} f(x)\,dx=-\int_{a}^{b} f(x)\,dx=-3$

(2) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx+\int_{b}^{c} f(x)\,dx=\int_{a}^{c} f(x)\,dx$이므로

$\int_{a}^{c} f(x)\,dx=2+5=7$

답 (1) -3 (2) 7

4

(1) $\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

$=\int_{a}^{b} f(x)\,dx-\int_{a}^{b} g(x)\,dx$

$=4-3=1$

(2) $\int_{a}^{b}\{2f(x)+3g(x)\}\,dx$

$=\int_{a}^{b} 2f(x)\,dx+\int_{a}^{b} 3g(x)\,dx$

$=2\int_{a}^{b} f(x)\,dx+3\int_{a}^{b} g(x)\,dx$

$=2\times 4+3\times 3=17$

답 (1) 1 (2) 17

5

(1) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx=S_1=7$

(2) $\int_{4}^{5} f(x)\,dx=-S_2=-2$

(3) $\int_{2}^{5} f(x)\,dx=\int_{2}^{4} f(x)\,dx+\int_{4}^{5} f(x)\,dx$

$=7+(-2)=5$

답 (1) 7 (2) -2 (3) 5

6

(1) $\int_{-1}^{1}(x^2-3)\,dx=2\int_{0}^{1}(x^2-3)\,dx$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3-3x\right]_{0}^{1}$

$=2\left\{\left(\frac{1}{3}-3\right)-0\right\}=-\frac{16}{3}$

(2) $\int_{-2}^{2}(x^3+2x)\,dx=0$

답 (1) $-\frac{16}{3}$ (2) 0

대표Q 132쪽~137쪽

대표 Q1

(1) $\int_{-2}^{1}(x-1)(x+2)\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)=-\frac{9}{2}$

(2) $\int_0^3 (x+1)^2\,dx-\int_3^0 (x-1)^2\,dx$

$=\int_0^3 (x+1)^2\,dx+\int_0^3 (x-1)^2\,dx$

$=\int_0^3 \{(x+1)^2+(x-1)^2\}\,dx$

$=\int_0^3 (2x^2+2)\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^3$

$=(18+6)-0=24$

(3) $\int_{-2}^1 (x^2-3x)\,dx+\int_1^3 (x^2-3x)\,dx$

$=\int_{-2}^3 (x^2-3x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^3$

$=\left(9-\frac{27}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}-6\right)=\frac{25}{6}$

답 (1) $-\frac{9}{2}$ (2) 24 (3) $\frac{25}{6}$

1-1

(1) $\int_{-3}^2 (-3x^2+4x)\,dx$

$=\left[-x^3+2x^2\right]_{-3}^2$

$=(-8+8)-(27+18)=-45$

(2) $\int_1^3 (2x-3)(x+1)\,dx$

$=\int_1^3 (2x^2-x-3)\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$

$=\left(18-\frac{9}{2}-9\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-3\right)$

$=\frac{22}{3}$

(3) $\int_{-1}^2 (2x-1)^2\,dx-\int_2^{-1} (4x-1)\,dx$

$=\int_{-1}^2 (4x^2-4x+1)\,dx+\int_{-1}^2 (4x-1)\,dx$

$=\int_{-1}^2 4x^2\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^2$

$=\frac{32}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=12$

(4) $\int_0^1 (x^3+4)\,dx+\int_1^3 (x^3+4)\,dx$

$=\int_0^3 (x^3+4)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+4x\right]_0^3$

$=\frac{81}{4}+12=\frac{129}{4}$

답 (1) -45 (2) $\frac{22}{3}$ (3) 12 (4) $\frac{129}{4}$

대표 Q2

(1) $\int_{-2}^2 (x^3+2x^2-3x+4)\,dx$

$=\int_{-2}^2 (x^3-3x)\,dx+\int_{-2}^2 (2x^2+4)\,dx$

$=0+2\int_0^2 (2x^2+4)\,dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^2=2\left(\frac{16}{3}+8\right)=\frac{80}{3}$

(2) $\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\,dx-\int_2^4 \frac{1}{t-1}\,dt$

$=\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\,dx-\int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int_2^4 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx=\int_2^4 (x+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^4=(8+4)-(2+2)=8$

답 (1) $\frac{80}{3}$ (2) 8

2-1

(1) $\int_{-2}^0 (x^5+4x^3-2x^2+1)\,dx$

$+\int_0^2 (x^5+4x^3-2x^2+1)\,dx$

$=\int_{-2}^2 (x^5+4x^3-2x^2+1)\,dx$

$=\int_{-2}^2 (x^5+4x^3)\,dx+\int_{-2}^2 (-2x^2+1)\,dx$

$=0+2\int_0^2 (-2x^2+1)\,dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^2$

$=2\left(-\frac{16}{3}+2\right)=-\frac{20}{3}$

(2) $\int_{1}^{4}\frac{4}{x+2}\,dx-\int_{1}^{4}\frac{y^2}{y+2}\,dy$

$=\int_{1}^{4}\frac{4}{x+2}\,dx-\int_{1}^{4}\frac{x^2}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{4}\frac{4-x^2}{x+2}\,dx=\int_{1}^{4}\frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{4}(-x+2)\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{4}$

$=(-8+8)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-\frac{3}{2}$

답 (1) $-\frac{20}{3}$ (2) $-\frac{3}{2}$

대표 03

(1) $-1\le x\le 1$일 때 $|x^2-1|=-(x^2-1)$,

$1\le x\le 2$일 때 $|x^2-1|=x^2-1$이므로

$\int_{-1}^{2}|x^2-1|\,dx$

$=\int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

(2) $0\le x\le a$일 때 $|x-a|=-(x-a)$,

$a\le x\le 4$일 때 $|x-a|=x-a$이므로

$\int_{0}^{4}|x-a|\,dx$

$=\int_{0}^{a}\{-(x-a)\}\,dx+\int_{a}^{4}(x-a)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{0}^{a}+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_{a}^{4}$

$=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)+\left(\frac{1}{2}a^2-4a+8\right)$

$=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

따라서 $a=2$일 때 최소이고, 최솟값은 4이다.

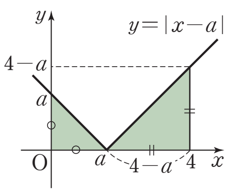
다른 풀이

$\int_{0}^{4}|x-a|\,dx$는

그림에서 색칠한 두 삼각형의 넓이의 합이므로

$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}(4-a)^2$

$=a^2-4a+8$



답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $a=2$, 최솟값 : 4

3-1

(1) $1\le x\le 3$일 때 $|x-3|=-(x-3)$,

$3\le x\le 4$일 때 $|x-3|=x-3$이므로

$\int_{1}^{4}|x-3|\,dx$

$=\int_{1}^{3}\{-(x-3)\}\,dx+\int_{3}^{4}(x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{1}^{3}+\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{3}^{4}$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

(2) $0\le x\le 2$일 때 $|x^2-2x|=-(x^2-2x)$,

$2\le x\le 3$일 때 $|x^2-2x|=x^2-2x$이므로

$\int_{0}^{3}|x^2-2x|\,dx$

$=\int_{0}^{2}\{-(x^2-2x)\}\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{8}{3}$

3-2

$0\le x<1$에서 $f(x)$가 증가하므로 $f'(x)>0$

$1<x<3$에서 $f(x)$가 감소하므로 $f'(x)<0$

$\therefore \int_{0}^{3}|f'(x)|\,dx=\int_{0}^{1}f'(x)\,dx-\int_{1}^{3}f'(x)\,dx$

$=\left[f(x)\right]_{0}^{1}-\left[f(x)\right]_{1}^{3}$

$=f(1)-f(0)-\{f(3)-f(1)\}$

$=1-(-3)-(-3)+1=8$

다른 풀이

$f'(x)=0$의 해가 $x=1$ 또는 $x=3$이므로

$f'(x)=a(x-1)(x-3)$으로 놓으면

$f(x)=\int a(x-1)(x-3)\,dx$

$=a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+C$

$f(1)=1$이므로 $\frac{4}{3}a+C=1$ $\cdots$ ㉠

$f(3)=-3$이므로 $C=-3$

㉠에 대입하면 $\frac{4}{3}a-3=1$ $\therefore a=3$

$$\therefore \int_0^3 |f'(x)|\,dx$$
$$=3\int_0^3 |(x-1)(x-3)|\,dx$$
$$=3\int_0^1 (x-1)(x-3)\,dx-3\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx$$
$$=\Big[x^3-6x^2+9x\Big]_0^1-\Big[x^3-6x^2+9x\Big]_1^3$$
$$=4-(-4)=8$$

답 8

대표 Q4

(1) $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^5 f(x)\,dx=\cdots$$
$$\therefore \int_5^7 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx=2\int_0^1 (x^2+1)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1=2\Big(\frac{1}{3}+1\Big)=\frac{8}{3}$$

(2) $$\int_9^{10} f(x)\,dx=\int_7^8 f(x)\,dx=\int_5^6 f(x)\,dx$$
$$=\cdots=\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$
$$\therefore \int_9^{10} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^2+1)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{-1}^0$$
$$=-\Big(-\frac{1}{3}-1\Big)=\frac{4}{3}$$

(3) $\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^9 f(x)\,dx+\int_9^{10} f(x)\,dx$이고,

$\int_9^{10} f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx$이므로

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^9 f(x)\,dx+\int_9^{10} f(x)\,dx$$
$$=\int_0^9 f(x)\,dx+\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^9 f(x)\,dx=5\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$
$$=5\times\frac{8}{3}=\frac{40}{3}$$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{40}{3}$

4-1

(1) $$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 (2-x)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[2x-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

(2) $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx,$$
$$\int_2^3 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\therefore \int_{-1}^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=2\times\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$$

(3) $$\int_{-3}^{10} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{10} f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 f(x)\,dx+6\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 (2-x)\,dx+6\times\frac{5}{6}$$
$$=\Big[2x-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2+5$$
$$=\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}$$

답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{11}{2}$

대표 Q5

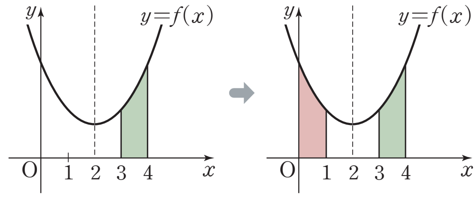
(1) $\int_0^3 f(x)\,dx=3$, $\int_0^4 f(x)\,dx=5$

이므로

$$\int_3^4 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx-\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$=5-3=2$$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대칭이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_3^4 f(x)\,dx=2$$



$\therefore \int_1^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int_0^3 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\right\}$

$=\frac{1}{2}\times(3-2)=\frac{1}{2}$

(2) $y=f(x+1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$\int_1^2 f(x+1)\,dx=\int_2^3 f(x)\,dx$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대칭이므로

$\int_2^3 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

5-1

$f(-x)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대칭이고 $\int_0^4 f(x)\,dx=-6$, $\int_{-2}^4 f(x)\,dx=-2$

(1) $\int_{-2}^4 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx$이므로

$-2=\int_{-2}^0 f(x)\,dx-6 \qquad \therefore \int_{-2}^0 f(x)\,dx=4$

$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 f(x)\,dx=4$

(2) $\int_{-4}^0 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx$이므로

$\int_{-4}^2 f(x)\,dx=\int_{-4}^0 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx$

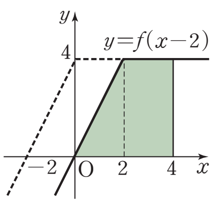
$=\int_0^4 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx$

$=-6+4=-2$

답 (1) 4 (2) -2

5-2

$y=f(x-2)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로



$\int_0^4 f(x-2)\,dx=\int_{-2}^2 f(x)\,dx$

$f(x)=\begin{cases}2x+4 & (x<0)\\ 4 & (x\geq 0)\end{cases}$이므로

$\int_0^4 f(x-2)\,dx=\int_{-2}^2 f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^0 (2x+4)\,dx+\int_0^2 4\,dx$

$=\Big[x^2+4x\Big]_{-2}^0+\Big[4x\Big]_0^2$

$=4+8=12$

답 12

대표 Q6

(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=p$ (p는 상수) $\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^3-2x-2p$

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^3-2x-2p)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2-2px\right]_0^1=-\frac{3}{4}-2p$

㉠에 대입하면 $-\frac{3}{4}-2p=p \qquad \therefore p=-\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=x^3-2x+\frac{1}{2}$

(2) $f(0)=-1$이므로

$f(x)=ax^2+bx-1\,(a\neq 0)$로 놓으면

$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (ax^2+bx-1)\,dx$

$=2\int_0^1 (ax^2-1)\,dx$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3-x\right]_0^1=\frac{2}{3}a-2$

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (ax^2+bx-1)\,dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1$

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 (ax^2+bx-1)\,dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^0=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1$

조건에서 $\frac{2}{3}a-2=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1$

연립하여 풀면 $a=3$, $b=0$

$\therefore f(x)=3x^2-1$

답 (1) $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{2}$ (2) $f(x)=3x^2-1$

6-1

$\int_0^1 xf(x)\,dx=p$ (p는 상수) $\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=x-2+p$이므로

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 (x^2-2x+px)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{p}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{p}{2}$$

㉠에 대입하면 $-\frac{2}{3}+\frac{p}{2}=p \quad \therefore p=-\frac{4}{3}$

$\therefore f(x)=x-\frac{10}{3}$

답 $f(x)=x-\frac{10}{3}$

6-2

$f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (ax^2+bx+c)\,dx$$

$$=2\int_0^1 (ax^2+c)\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3+cx\right]_0^1=\frac{2}{3}a+2c \quad \cdots ㉠$$

$pf(\sqrt{2})+qf(0)+pf(-\sqrt{2})$

$=p(2a+\sqrt{2}b+c)+qc+p(2a-\sqrt{2}b+c)$

$=4pa+(2p+q)c \quad \cdots$ ㉡

조건에서 ㉠=㉡이므로

$\frac{2}{3}a+2c=4pa+(2p+q)c$

모든 a, c에 대해 성립하므로

$\frac{2}{3}=4p,\ 2=2p+q \quad \therefore p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{3}$

답 $p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{3}$

개념 Check

138쪽

7

(1) $f(x)=\int_{-1}^x (t^2-2t)\,dt$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=\int_{-1}^{-1} (t^2-2t)\,dt=0$

(2) $f(x)=\int_{-1}^x (t^2-2t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x$

답 (1) 0 (2) $f'(x)=x^2-2x$

대표Q

139쪽~141쪽

대표 Q7

(1) $\int_{-1}^x f(t)\,dt=x^4+x^3+px-2 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1-1-p-2 \quad \therefore p=-2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3+3x^2+p=4x^3+3x^2-2$

(2) $\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x^3+px^2+7x-3 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+p+7-3 \quad \therefore p=-5$

㉠에서 (좌변)$=x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt$이므로

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2px+7$

$\int_1^x f(t)\,dt=3x^2+2px+7 \quad \cdots$ ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2p$

$\therefore f(x)=6x-10$

답 (1) $p=-2,\ f(x)=4x^3+3x^2-2$
(2) $p=-5,\ f(x)=6x-10$

참고 (2) $x=1$을 ㉡에 대입하여 p의 값을 구해도 된다.
곧, $0=3+2p+7 \quad \therefore p=-5$

7-1

$\int_1^x f(t)\,dt=xf(x)-3x^4+2x^2 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3+2 \quad \therefore f(1)=1 \quad \cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x,\ f'(x)=12x^2-4$

$\therefore f(x)=\int (12x^2-4)\,dx=4x^3-4x+C$

㉡에서 $f(1)=1$이므로 $4-4+C=1 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=4x^3-4x+1$

답 $f(x)=4x^3-4x+1$

7-2

$$\int_{-1}^{x}(x-t)f(t)\,dt=x^4+px^3+x+1 \quad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1-p-1+1 \qquad \therefore p=1$

㉠에서 (좌변)$=x\int_{-1}^{x}f(t)\,dt-\int_{-1}^{x}tf(t)\,dt$이므로

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+3px^2+1$$

$$\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=4x^3+3px^2+1 \quad \cdots ㉡$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+6px \qquad \therefore f(x)=12x^2+6x$

답 $p=1$, $f(x)=12x^2+6x$

대표 08

$f(x)=x^3+2x-3$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(1) $\int_{1}^{x}f(t)\,dt=F(x)-F(1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=F'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}\times0=0$$

(2) $\int_{2}^{2+2h}f(t)\,dt=F(2+2h)-F(2)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{3h}\int_{2}^{2+2h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(2+2h)-F(2)}{2h}\times\frac{2}{3}\right\}$$
$$=F'(2)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}f(2)$$
$$=\frac{2}{3}\times9=6$$

답 (1) 0 (2) 6

8-1

$f(x)=x^4-4x^2+1$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(1) $\int_{2}^{2x}f(t)\,dt=F(2x)-F(2)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{2}^{2x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(2x)-F(2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(2x)-F(2)}{2x-2}\times2\right\}$$
$$=F'(2)\times2=2f(2)$$
$$=2\times1=2$$

(2) $\int_{1}^{x^2}f(t)\,dt=F(x^2)-F(1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^2}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=F'(1)\times2=2f(1)$$
$$=2\times(-2)=-4$$

답 (1) 2 (2) -4

8-2

$f(x)=x^3-5x+2$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(1) $\int_{1}^{1-3h}f(t)\,dt=F(1-3h)-F(1)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{2h}\int_{1}^{1-3h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}\times\frac{-3}{2}\right\}$$
$$=F'(1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}f(1)$$
$$=-\frac{3}{2}\times(-2)=3$$

(2) $\int_{1-h}^{1+h}f(t)\,dt=F(1+h)-F(1-h)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\right\}$$
$$=F'(1)+F'(1)=2f(1)$$
$$=2\times(-2)=-4$$

답 (1) 3 (2) -4

대표 09

(1) $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^3-t)\,dt$에서 $g(t)=t^3-t$라 하고,

$g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$f(x)=G(x+1)-G(x)$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=g(x+1)-g(x)$

$\quad=\{(x+1)^3-(x+1)\}-\{x^3-x\}$

$\quad=3x^2+3x=3x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값은

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$

극솟값은

$f(0)=\int_{0}^{1}(t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 $\frac{1}{4}$,

$x=0$일 때 극솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

(2) (1)에서 $f'(x)=3x^2+3x$이므로

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+C$

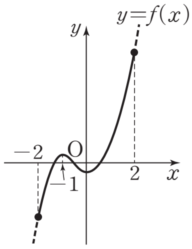
$f(0)=-\frac{1}{4}$이므로 $C=-\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}$

(1)의 증감표를 이용하면

$y=f(x)$의 그래프는 그림과

같다.



$f(-2)=-\frac{9}{4}$, $f(2)=\frac{55}{4}$,

$f(-1)=\frac{1}{4}$, $f(0)=-\frac{1}{4}$이므로

구간 $[-2, 2]$에서 최댓값은 $f(2)=\frac{55}{4}$,

최솟값은 $f(-2)=-\frac{9}{4}$

답 (1) 극댓값 : $\frac{1}{4}$, 극솟값 : $-\frac{1}{4}$

(2) 최댓값 : $\frac{55}{4}$, 최솟값 : $-\frac{9}{4}$

9-1

(1) $f(x)=\int_{x}^{-2}t(t-1)(t+2)\,dt$에서

$g(t)=t(t-1)(t+2)$라 하고,

$g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$f(x)=G(-2)-G(x)$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-g(x)$

$\quad=-x(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

극댓값은

$f(-2)=\int_{-2}^{-2}t(t-1)(t+2)\,dt=0$

$f(1)=\int_{1}^{-2}t(t-1)(t+2)\,dt$

$\quad=\int_{1}^{-2}(t^3+t^2-2t)\,dt$

$\quad=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{1}^{-2}=-\frac{9}{4}$

극솟값은

$f(0)=\int_{0}^{-2}t(t-1)(t+2)\,dt$

$\quad=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{-2}=-\frac{8}{3}$

(2) $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^2-4t+3)\,dt$에서

$g(t)=t^2-4t+3$이라 하고,

$g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$f(x)=G(x+1)-G(x)$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=g(x+1)-g(x)$

$\quad=\{(x+1)^2-4(x+1)+3\}-\{x^2-4x+3\}$

$\quad=2x-3$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

극솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(t^2-4t+3)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}=-\frac{11}{12}$$

답 (1) 극댓값 : 0, $-\frac{9}{4}$, 극솟값 : $-\frac{8}{3}$

(2) 극솟값 : $-\frac{11}{12}$

9-2

$F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$F(x)$는 사차함수이고 극값이 1개이므로

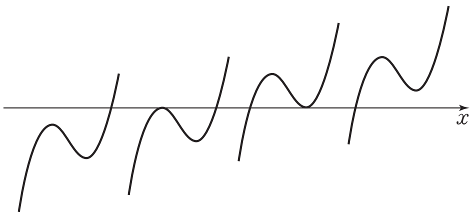
방정식 $F'(x)=0$, 곧 $f(x)=0$의 해가 실근이 1개이거나 중근과 실근이 1개이다.

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 극댓값 $f(-1)=a+2$, 극솟값 $f(1)=a-2$이고, 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 4개 중 하나이다.



(i) 실근이 1개일 때, $f(-1)f(1)>0$

$(a+2)(a-2)>0$ $\quad\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

(ii) 중근과 실근이 1개일 때, $f(-1)=0$ 또는 $f(1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에서 $a\le-2$ 또는 $a\ge2$

답 $a\le-2$ 또는 $a\ge2$

참고 $f(x)=0$의 해가 삼중근인 경우에도 $F(x)$의 극값은 1개이다. 주어진 문제에서는 $f(x)=0$의 해가 삼중근일 수 없으므로 $f(x)=0$의 해가 실근이 1개이거나 중근과 실근이 1개인 경우만 생각한다.

연습과 실전 8 정적분

142쪽~146쪽

01 3 02 (1) 0 (2) -2 03 (1) $\frac{16}{3}$ (2) 72

04 (1) 10 (2) $\frac{59}{3}$ 05 $\frac{1}{2}$ 06 $\frac{11}{4}$ 07 ①

08 ② 09 6 10 ② 11 $\frac{2}{3}$

12 $p=4$, $f(x)=-3x^2+16x-3$ 13 ⑤ 14 4

15 (1) 2022 (2) $-\frac{5}{12}$ 16 $\frac{19}{2}$ 17 ② 18 ①

19 16 20 6 21 $f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$

22 $a=4$, $b=-16$ 23 ① 24 ②

01

$$\int_0^1(2x+a)\,dx=\left[x^2+ax\right]_0^1=1+a$$

이므로 $1+a=4$ $\quad\therefore a=3$

답 3

02

(1) $\displaystyle\int_1^3(2x^2-x+1)\,dx+\int_3^1(2x^2-x+1)\,dx$

$\displaystyle=\int_1^3(2x^2-x+1)\,dx-\int_1^3(2x^2-x+1)\,dx=0$

(2) $\displaystyle\int_0^4(2x^3-6x+1)\,dx+\int_4^6(2x^3-6x+1)\,dx$

$\displaystyle+\int_6^2(2x^3-6x+1)\,dx$

$\displaystyle=\int_0^6(2x^3-6x+1)\,dx+\int_6^2(2x^3-6x+1)\,dx$

$\displaystyle=\int_0^2(2x^3-6x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^2+x\right]_0^2=-2$

답 (1) 0 (2) -2

03

(1) $\displaystyle\int_{-2}^2 x(x^3+x^2-1)\,dx+\int_{-2}^2 y^2(y^3-y^2+1)\,dy$

$\displaystyle=\int_{-2}^2 x(x^3+x^2-1)\,dx+\int_{-2}^2 x^2(x^3-x^2+1)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^2\{x(x^3+x^2-1)+x^2(x^3-x^2+1)\}\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^2(x^5+x^3+x^2-x)\,dx$

$\displaystyle=2\int_0^2 x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$

(2) $\int_{0}^{3}(x^5+4x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{-3}(x^5+4x^2-2x)\,dx$

$=\int_{0}^{3}(x^5+4x^2-2x)\,dx+\int_{-3}^{0}(x^5+4x^2-2x)\,dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^5+4x^2-2x)\,dx$

$=2\int_{0}^{3}4x^2\,dx$

$=2\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^3=72$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) 72

04

(1) $1\le x\le 3$일 때 $|x-3|=-(x-3)$,

$3\le x\le 4$일 때 $|x-3|=x-3$이므로

$\int_{1}^{4}(x+|x-3|)\,dx$

$=\int_{1}^{3}3\,dx+\int_{3}^{4}(2x-3)\,dx$

$=\left[3x\right]_1^3+\left[x^2-3x\right]_3^4$

$=6+4=10$

(2) $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$에서

$-2\le x\le 1$일 때 $|x^2+2x-3|=-(x^2+2x-3)$,

$1\le x\le 3$일 때 $|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$이므로

$\int_{-2}^{3}|x^2+2x-3|\,dx$

$=\int_{-2}^{1}\{-(x^2+2x-3)\}\,dx$

$+\int_{1}^{3}(x^2+2x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_1^3$

$=9+\frac{32}{3}=\frac{59}{3}$

답 (1) 10 (2) $\frac{59}{3}$

05

$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)\,dx=2\int_{0}^{a}3x^2\,dx=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$

이므로 $2a^3=\frac{1}{4}$, $a^3=\frac{1}{8}$

a는 실수이므로 $a=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

06

$f(x)=\begin{cases}x^3+1 & (x\le 1)\\ 3-x & (x>1)\end{cases}$이므로

$\int_{0}^{4}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}(x^3+1)\,dx+\int_{1}^{4}(3-x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_0^1+\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4$

$=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{11}{4}$

답 $\frac{11}{4}$

07

$0\le x\le 2$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$\int_{0}^{1}f(x)\,dx<0$, $\int_{1}^{2}f(x)\,dx<0$

② $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx>0$

③ $\int_{0}^{2}f(x)\,dx<0$

④ 그래프가 직선 $x=1$에 대칭이므로

$\int_{1}^{3}f(x)\,dx<\int_{2}^{3}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

⑤ $\int_{4}^{2}f(x)\,dx=-\int_{2}^{4}f(x)\,dx<0$

그런데 ① $\int_{-2}^{0}f(x)\,dx>\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

따라서 ①이 가장 크다.

답 ①

08

$\int_{1}^{5}f(x)\,dx$

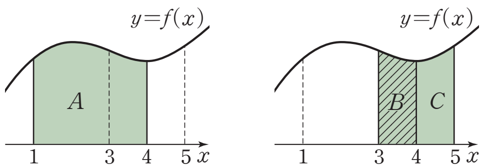
$=\int_{1}^{4}f(x)\,dx+\int_{4}^{5}f(x)\,dx$

$=\int_{1}^{4}f(x)\,dx+\int_{3}^{5}f(x)\,dx-\int_{3}^{4}f(x)\,dx$

$=A+C-B$

다른 풀이

다음 그림에서 $\int_{1}^{5}f(x)\,dx=A+C-B$



답 ②

09

$f(x)$는 주기가 4인 주기함수이고, $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx=2$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-7}^{5} f(x)\,dx\\&=\int_{-7}^{-3} f(x)\,dx+\int_{-3}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{5} f(x)\,dx\\&=3\int_{-3}^{1} f(x)\,dx\\&=3\times2=6\end{aligned}$$

답 6

10

$y=f(x+5)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로

$$\int_{-7}^{1} f(x+5)\,dx=\int_{-2}^{6} f(x)\,dx=10$$

답 ②

11

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,dx&=\int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)\,dx\\&=2\int_{0}^{1} (x^2+1)\,dx\\&=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\left\{\int_{-1}^{1} (x+1)\,dx\right\}^2&=k\left(2\int_{0}^{1} 1\,dx\right)^2\\&=k\left(2\Big[x\Big]_0^1\right)^2=4k\end{aligned}$$

이므로 $\frac{8}{3}=4k$에서 $k=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

12

$$\int_{x}^{1} f(t)\,dt=x^3-2px^2+3x+4 \qquad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-2p+3+4 \qquad \therefore p=4$

㉠에서 $\int_{x}^{1} f(t)\,dt=-\int_{1}^{x} f(t)\,dt$이므로

$$-\int_{1}^{x} f(t)\,dt=x^3-2px^2+3x+4$$

$$\int_{1}^{x} f(t)\,dt=-x^3+2px^2-3x-4$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-3x^2+4px-3$

$\therefore f(x)=-3x^2+16x-3$

답 $p=4$, $f(x)=-3x^2+16x-3$

13

$\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$이므로

$$\int_{1}^{x} f'(t)\,dt=x^3+ax^2-2 \qquad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2 \qquad \therefore a=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax$

$\therefore f'(a)=3a^2+2a^2=5a^2=5$

답 ⑤

14

$f(x)=x^2-2x+2$라 하고,

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_{2+h}^{2+3h} f(x)\,dx=F(2+3h)-F(2+h)$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2+h}^{2+3h} f(x)\,dx\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2+h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{3\times\frac{F(2+3h)-F(2)}{3h}-\frac{F(2+h)-F(2)}{h}\right\}\\&=3F'(2)-F'(2)\\&=2F'(2)=2f(2)\\&=2\times2=4\end{aligned}$$

답 4

15 전략 (1) 그래프가 y축 또는 원점에 대칭인 함수의 정적분을 이용하여 식을 간단히 한다.

(2) $a_n=\int_{0}^{1} x^n(x-1)\,dx$로 놓고 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구한다.

(1) $$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} (1+2x+3x^2+\cdots+2022x^{2021})\,dx\\&=2\int_{0}^{1} (1+3x^2+5x^4+\cdots+2021x^{2020})\,dx\\&=2\Big[x+x^3+x^5+\cdots+x^{2021}\Big]_0^1\end{aligned}$$

$2021=2\times1011-1$이므로 구하는 값은

$2\times(1+1+1+\cdots+1)=2\times1011=2022$

(2) $a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\,dx$로 놓으면

$$a_n=\int_0^1 (x^{n+1}-x^n)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=-\frac{5}{12}$$

답 (1) 2022 (2) $-\frac{5}{12}$

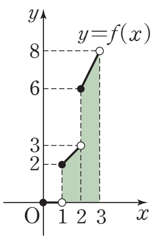
16 전략 $[x]$ ➡ 구간을 $0\le x<1$, $1\le x<2$, $\cdots$로 나눈다.

$0\le x<1$일 때 $[x]=0$,
$1\le x<2$일 때 $[x]=1$,
$2\le x<3$일 때 $[x]=2$이므로

$$\int_0^3 [x](x+1)\,dx$$
$$=\int_0^1 [x](x+1)\,dx+\int_1^2 [x](x+1)\,dx$$
$$+\int_2^3 [x](x+1)\,dx$$
$$=\int_0^1 0\times(x+1)\,dx+\int_1^2 (x+1)\,dx$$
$$+\int_2^3 2(x+1)\,dx$$
$$=0+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2+\left[x^2+2x\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{2}+7=\frac{19}{2}$$

답 $\frac{19}{2}$

참고 $f(x)$가 연속함수가 아니어도 연속함수인 구간으로 나누어 정적분을 계산할 수 있다. 이 문제에서 $f(x)=[x](x+1)$이라 하면 구하는 정적분의 값은 그림과 같이 색칠한 부분들의 넓이의 합과 같다.



17 전략 $-a\le x<0$, $0\le x\le a$로 나누어 적분한다.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^{0}(2x+2)\,dx+\int_0^a(-x^2+2x+2)\,dx$$
$$=\left[x^2+2x\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_0^a$$
$$=-a^2+2a-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+4a$$

$g(a)=-\frac{1}{3}a^3+4a$라 하면
$g'(a)=-a^2+4=-(a+2)(a-2)$
$g'(a)=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$
$g(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	↘	극소	↗	극대	↘

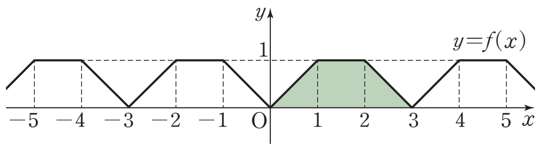
$a>0$이므로 $g(a)$는 $a=2$에서 최대이다.

$$\therefore g(2)=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$$

답 ②

18 전략 $f(x)$의 주기가 3임을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

$f(x)$는 주기가 3인 주기함수이므로 그래프는 그림과 같다.



$y=f(x)$의 그래프가 y축에 대칭이므로

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx=13$$
$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx=\frac{13}{2}$$

구간 $[0, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 삼각형과 사각형의 넓이의 합이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=2$$

$f(x)$는 주기가 3이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx=\int_6^9 f(x)\,dx=2\text{이고}$$

$$\int_9^{10} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

곧, $\int_0^{10} f(x)\,dx=2\times3+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$이므로 $a=10$

답 ①

19 전략 함수 $g(x)$부터 구한다.

$y=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=(x-a)^3+b$이므로

$g(x)=(x-a)^3+b$

$g(0)=0$이므로 $-a^3+b=0$, $b=a^3$

$\therefore g(x)=(x-a)^3+a^3$

이때

$$\int_a^{3a} g(x)\,dx-\int_0^{2a} f(x)\,dx$$

$$=\int_a^{3a}\{(x-a)^3+a^3\}\,dx-\int_0^{2a} x^3\,dx$$

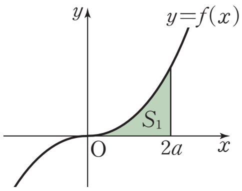
$$=\left[\frac{(x-a)^4}{4}+a^3x\right]_a^{3a}-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a}$$

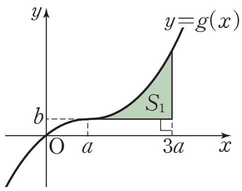
$$=4a^4+3a^4-a^4-4a^4=2a^4$$

이므로 $2a^4=32$ $\quad\therefore a^4=16$

다른 풀이

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고, 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.





$S_1=\int_0^{2a} f(x)\,dx$라 하면

$$\int_a^{3a} g(x)\,dx=S_1+b(3a-a)=S_1+2ab$$

$$\therefore \int_a^{3a} g(x)\,dx-\int_0^{2a} f(x)\,dx=2ab$$

$2ab=32$이므로 $ab=16$

또 $g(0)=0$에서 $b=a^3$이므로 $a^4=ab=16$

답 16

20 전략 $f(x)=f(-x)$ ➡ y축에 대칭
$g(-x)=-g(x)$ ➡ 원점에 대칭

$(x-1)f(x)=xf(x)-f(x)$에서 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대칭이고, $g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 원점에 대칭이다.

$$\therefore \int_{-5}^{5}(x-1)f(x)\,dx$$

$$=\int_{-5}^{5} xf(x)\,dx-\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$$

$$=0-2\int_0^5 f(x)\,dx$$

$$=-2\times(-3)=6$$

답 6

21 전략 $\int_0^1 f(t)\,dt=p$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분한다.

$\int_0^1 f(t)\,dt=p$ (p는 상수) $\quad\cdots$ ㉠

로 놓으면 $\int_0^x f(t)\,dt=x^3-2x^2-2px$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x-2p$

㉠에서

$$\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$=\int_0^1(3t^2-4t-2p)\,dt$$

$$=\left[t^3-2t^2-2pt\right]_0^1$$

$$=-1-2p$$

$-1-2p=p$이므로 $p=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$

답 $f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$

22 전략 $\int_2^x(x-t)f(t)\,dt=x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt$로 고친 다음 양변을 미분한다.

$\int_2^x(x-t)f(t)\,dt=-x^3+3ax+b$ $\quad\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=-8+6a+b$ $\quad\cdots$ ㉡

또 ㉠의 좌변을 정리하면

$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=-x^3+3ax+b$ $\quad\cdots$ ㉢

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+3a$$

$$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=-3x^2+3a$$

양변에 $x=2$를 대입하면 $0=-12+3a$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-16$

답 $a=4$, $b=-16$

23 전략 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0일 조건을 구하고, 극한은 미분계수의 정의를 이용할 수 있는 꼴로 고친다.

주어진 극한에서 $x \to 1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다. 곧,

$\int_1^1 f(t)\,dt-f(1)=0$ $\therefore f(1)=0$

$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$라 하면 $F(1)=\int_1^1 f(t)\,dt=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)-f(x)+f(1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{F(x)-F(1)\}-\{f(x)-f(1)\}}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{F'(1)-f'(1)\}=2$$

$F'(1)-f'(1)=4$이므로 $f'(1)=F'(1)-4$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로 $F'(1)=f(1)=0$

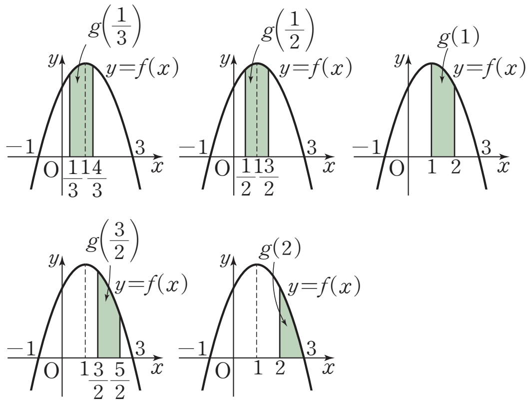
$\therefore f'(1)=-4$

답 ①

24 전략 구간 $[x, x+1]$에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 최대인 경우를 찾는다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{-1+3}{2}$,

곧 $x=1$이므로 $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$를 그래프에서 도형의 넓이로 생각하면 그림과 같다.



$g\left(\frac{1}{2}\right)$의 넓이가 최대이므로 최댓값은 $g\left(\frac{1}{2}\right)$이다.

다른 풀이

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=F(x+1)-F(x)$$

$$g'(x)=F'(x+1)-F'(x)=f(x+1)-f(x)$$

그래프에서

$f(x)=a(x+1)(x-3)=ax^2-2ax-3a\ (a<0)$

로 놓을 수 있으므로

$$g'(x)=a(x+1)^2-2a(x+1)-3a-ax^2+2ax+3a$$
$$=a(2x-1)$$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

$a<0$이므로 증감을 조사하면 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이고, 극댓값이 하나뿐이므로 극대에서 최대이다.

답 ②

9 정적분의 활용

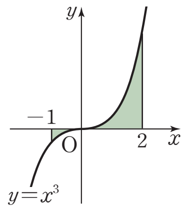
개념 Check

148쪽 ~ 149쪽

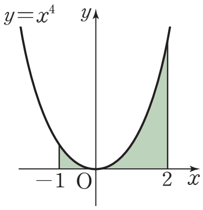
1

(1), (2)를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같으므로 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

(1)



(2)



(1) $\int_{-1}^{2}|x^3|\,dx=-\int_{-1}^{0}x^3\,dx+\int_{0}^{2}x^3\,dx$

$=-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}$

$=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

(2) $\int_{-1}^{2}|x^4|\,dx=\int_{-1}^{2}x^4\,dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{2}=\frac{33}{5}$

답 (1) $\frac{17}{4}$ (2) $\frac{33}{5}$

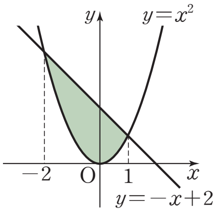
2

(1) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2=-x+2$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(2) 곡선과 직선을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같고



$-2\le x\le 1$에서

$-x+2\ge x^2$이므로

색칠한 부분의 넓이는

$\int_{-2}^{1}(-x+2-x^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1}$

$=\frac{9}{2}$

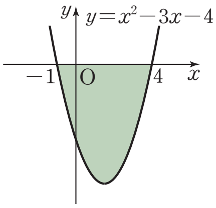
답 (1) -2, 1 (2) $\frac{9}{2}$

대표Q

150쪽 ~ 154쪽

대표 Q1

(1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x-4=0$에서



$(x+1)(x-4)=0$

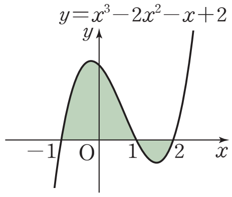
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$-1\le x\le 4$에서 $y\le 0$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$-\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)\,dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$

(2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2-x+2=0$에서



$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm1$ 또는 $x=2$

$-1\le x\le 1$에서 $y\ge 0$, $1\le x\le 2$에서 $y\le 0$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$

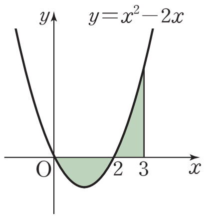
$-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)\,dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{0}^{1}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$

(3) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는



$x^2-2x=0$에서

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le 2$에서 $y\le 0$,

$2\le x\le 3$에서 $y\ge 0$이므로

색칠한 부분의 넓이는

$-\int_{0}^{2}(x^2-2x)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

답 (1) $\frac{125}{6}$ (2) $\frac{37}{12}$ (3) $\frac{8}{3}$

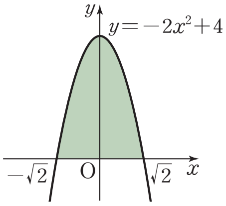
1-1

(1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $-2x^2+4=0$에서

$-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore\ x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$에서 $y\ge0$이므로 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-2x^2+4)\,dx=2\int_0^{\sqrt{2}}(-2x^2+4)\,dx$$

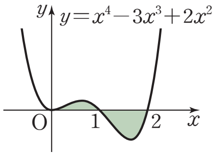
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

(2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x^4-3x^3+2x^2=0$에서

$x^2(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



$0\le x\le1$에서 $y\ge0$, $1\le x\le2$에서 $y\le0$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^1(x^4-3x^3+2x^2)\,dx-\int_1^2(x^4-3x^3+2x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{7}{60}-\left(-\frac{23}{60}\right)=\frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

1-2

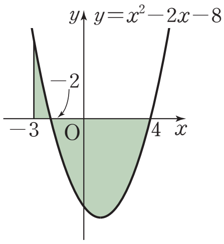
(1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

$-3\le x\le-2$에서 $y\ge0$,

$-2\le x\le4$에서 $y\le0$이므로 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-3}^{-2}(x^2-2x-8)\,dx-\int_{-2}^{4}(x^2-2x-8)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_{-2}^{4}$$

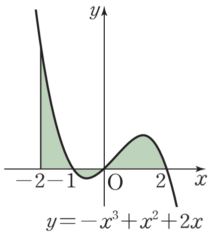
$$=\frac{10}{3}-(-36)=\frac{118}{3}$$

(2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3+x^2+2x=0$에서

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



$-2\le x\le-1$에서 $y\ge0$,

$-1\le x\le0$에서 $y\le0$,

$0\le x\le2$에서 $y\ge0$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{-1}(-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$-\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}-\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{37}{12}-\left(-\frac{5}{12}\right)+\frac{8}{3}=\frac{37}{6}$$

답 (1) $\frac{118}{3}$ (2) $\frac{37}{6}$

대표 Q2

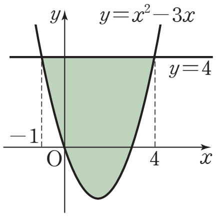
(1) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=4$에서

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

$-1\le x\le4$에서



$4\ge x^2-3x$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{4}\{4-(x^2-3x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$$

(2) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

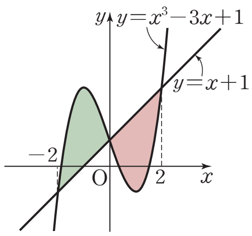
$x^3-3x+1=x+1$에서

$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pm2$

$-2\le x\le0$에서



$x^3-3x+1\geq x+1$,

$0\leq x\leq 2$에서 $x+1\geq x^3-3x+1$이므로

색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{(x^3-3x+1)-(x+1)\}\,dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{(x+1)-(x^3-3x+1)\}\,dx$$

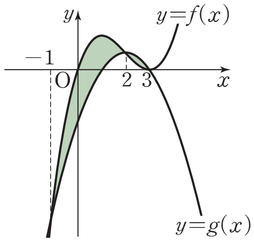
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=4+4=8$$

(3) $f(x)=x^3-6x^2+9x$,

$g(x)=-2x^2+8x-6$

이라 하자.



두 곡선의 교점의 x좌표는 $f(x)=g(x)$에서

x^3-6x^2+9x

$=-2x^2+8x-6$

$x^3-4x^2+x+6=0$

$(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

$-1\leq x\leq 2$에서 $f(x)\geq g(x)$,

$2\leq x\leq 3$에서 $g(x)\geq f(x)$이므로

색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{2}^{3}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+x+6)\,dx$$

$$+\int_{2}^{3}(-x^3+4x^2-x-6)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{2}$$

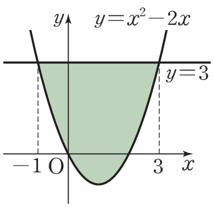
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}=\frac{71}{6}$$

답 (1) $\frac{125}{6}$ (2) 8 (3) $\frac{71}{6}$

2-1

(1) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=3$에서



$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

$-1\leq x\leq 3$에서 $3\geq x^2-2x$이므로

색칠한 부분의 넓이는

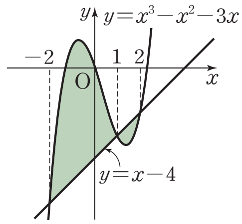
$$\int_{-1}^{3}\{3-(x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{32}{3}$$

(2) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는



$x^3-x^2-3x=x-4$에서

$x^3-x^2-4x+4=0$

$(x+2)(x-1)(x-2)$

$=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$-2\leq x\leq 1$에서 $x^3-x^2-3x\geq x-4$,

$1\leq x\leq 2$에서 $x-4\geq x^3-x^2-3x$이므로

색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(x^3-x^2-3x)-(x-4)\}\,dx$$

$$+\int_{1}^{2}\{(x-4)-(x^3-x^2-3x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)\,dx$$

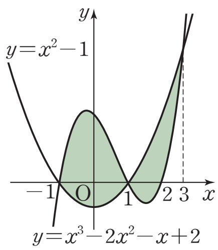
$$+\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}=\frac{71}{6}$$

(3) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-2x^2-x+2=x^2-1$

에서

$x^3-3x^2-x+3=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$

또는 $x=3$

$-1\leq x\leq 1$에서 $x^3-2x^2-x+2\geq x^2-1$,

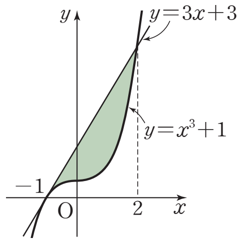
$1\leq x\leq 3$에서 $x^2-1\geq x^3-2x^2-x+2$이므로

색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-2x^2-x+2)-(x^2-1)\}\,dx$$
$$+\int_{1}^{3}\{(x^2-1)-(x^3-2x^2-x+2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)\,dx$$
$$+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)\,dx$$
$$+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)\,dx$$
$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_1^3$$
$$=4+4=8$$

답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{71}{6}$ (3) 8

(2) $f(x)=x^3+1$이라 하면



$f'(x)=3x^2$

$f'(-1)=3$, $f(-1)=0$

이므로 점 $(-1, 0)$에서 접선의 방정식은

$y=3(x+1)$

$\therefore y=3x+3$

또 곡선과 접선의 교점의 x좌표는

$x^3+1=3x+3$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$-1\le x\le 2$에서 $3x+3\ge x^3+1$이므로

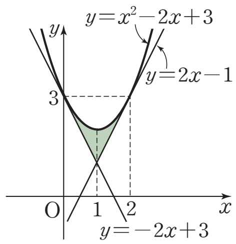
색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{3x+3-(x^3+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{27}{4}$

대표 03

(1) $f(x)=x^2-2x+3$이라 하면 $f'(x)=2x-2$



$f'(0)=-2$이므로

점 $(0, 3)$에서 접선의 방정식은

$y-3=-2(x-0)$

$\therefore y=-2x+3$

또 $f'(2)=2$이므로 점 $(2, 3)$에서 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2)$ $\quad\therefore y=2x-1$

또한 두 접선의 교점의 x좌표는

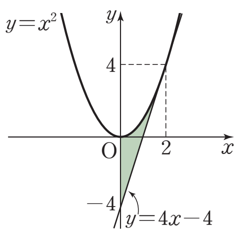
$-2x+3=2x-1$ $\quad\therefore x=1$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{(x^2-2x+3)-(-2x+3)\}\,dx$$
$$+\int_{1}^{2}\{(x^2-2x+3)-(2x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}x^2\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

3-1

$f(x)=x^2$이라 하면



$f'(x)=2x$

$f'(2)=4$, $f(2)=4$이므로

점 $(2, 4)$에서 접선의 방정식은

$y-4=4(x-2)$

$\therefore y=4x-4$

$0\le x\le 2$에서 $x^2\ge 4x-4$이므로

곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{x^2-(4x-4)\}\,dx=\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\Big]_0^2=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

3-2

$f(x)=x^3-2x^2-x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x-1$

$f'(1)=-2$, $f(1)=0$이므로 점 $(1, 0)$에서 접선의 방정식은

$y=-2(x-1)\qquad \therefore y=-2x+2$

또한 곡선과 접선의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2-x+2=-2x+2$에서

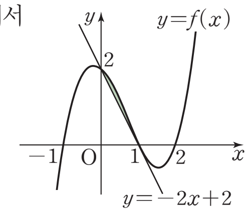
$x^3-2x^2+x=0$

$x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 1$에서

$x^3-2x^2-x+2\ge -2x+2$



이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^3-2x^2-x+2)-(-2x+2)\}\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx$$

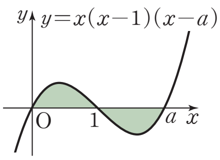
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

대표 Q4

(1) 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으면



$$\int_0^a x(x-1)(x-a)\,dx=0$$

이다. 곧,

$$\int_0^a x(x-1)(x-a)\,dx$$

$$=\int_0^a \{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx$$

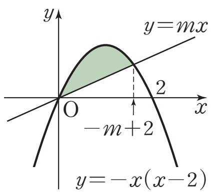
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^3=0$$

에서 $a^4-2a^3=0$, $a^3(a-2)=0$

$a>1$이므로 $a=2$

(2) 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=mx$에서



$x(x+m-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-m+2$

$0\le x\le -m+2$에서

$-x^2+2x\ge mx$이므로

곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{-m+2} (-x^2+2x-mx)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{m-2}{2}x^2\right]_0^{-m+2}$$

$$=\frac{1}{6}(-m+2)^3$$

또 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

조건에서 $\frac{1}{6}(-m+2)^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$이므로

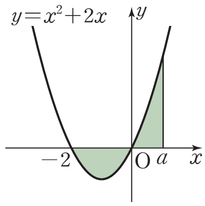
$(-m+2)^3=4$

m은 실수이므로 $-m+2=\sqrt[3]{4}\qquad \therefore m=2-\sqrt[3]{4}$

답 (1) 2　(2) $2-\sqrt[3]{4}$

4-1

그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으면



$$\int_{-2}^a (x^2+2x)\,dx=0$$

이다. 곧,

$$\int_{-2}^a (x^2+2x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3+a^2-\frac{4}{3}=0$$

에서 $a^3+3a^2-4=0$, $(a-1)(a+2)^2=0$

$a>0$이므로 $a=1$

답 1

4-2

곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=mx$에서

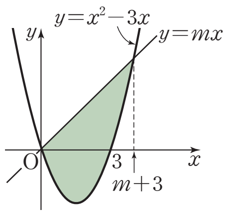
$x(x-m-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=m+3$

$0\le x\le m+3$에서

$mx\ge x^2-3x$이므로

곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\int_0^{m+3} \{mx-(x^2-3x)\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+3}{2}x^2\right]_0^{m+3}$$

$$=\frac{1}{6}(m+3)^3$$

또 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

조건에서 $\frac{1}{6}(m+3)^3=2\times\frac{9}{2}$이므로

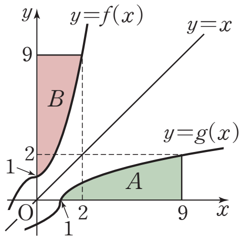
$(m+3)^3=2\times3^3$

m은 실수이므로 $m+3=3\sqrt[3]{2}$ $\qquad\therefore m=-3+3\sqrt[3]{2}$

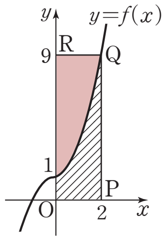
답 $-3+3\sqrt[3]{2}$

날선 05

(1) $y=f(x)$, $y=g(x)$가 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이다.



[그림 1]



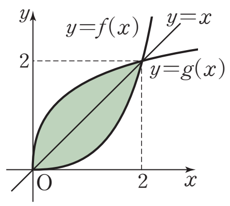
[그림 2]

$f(0)=1$, $f(2)=9$이므로 $\int_{f(0)}^{f(2)} g(x)\,dx$는 [그림 1]에서 A 부분의 넓이이고, A와 B 부분은 직선 $y=x$에 대칭이다. 또 $\int_0^2 f(x)\,dx$는 [그림 2]에서 빗금친 부분의 넓이이다.

따라서 $\int_0^2 f(x)\,dx+\int_{f(0)}^{f(2)} g(x)\,dx$의 값은 [그림 2]에서 직사각형 OPQR의 넓이이므로

$2\times9=18$

(2) $y=f(x)$, $y=g(x)$가 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이고, 두 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



교점의 x좌표는 $\frac{1}{4}x^3=x$에서

$x(x^2-4)=0$, $x(x+2)(x-2)=0$

$x\geq0$이므로 $x=0$ 또는 $x=2$

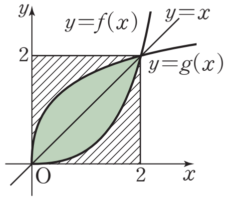
따라서 구하는 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이므로

$$2\int_0^2 \{x-f(x)\}\,dx=2\int_0^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x^4\right]_0^2=2$$

다른 풀이

빗금친 두 부분은 합동이고 하나의 넓이는



$$\int_0^2 \frac{1}{4}x^3\,dx=\left[\frac{1}{16}x^4\right]_0^2$$

$$=1$$

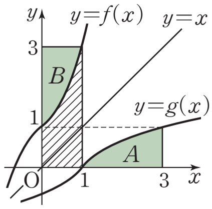
따라서 정사각형의 넓이에서 빗금친 두 부분의 넓이를 빼면

$2^2-2\times1=2$

답 (1) 18 (2) 2

5-1

$y=f(x)$, $y=g(x)$가 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이다.



$f(0)=1$, $f(1)=3$이므로

$\int_1^3 g(x)\,dx$는 그림에서 A 부분의 넓이이고, A와 B 부분은 직선 $y=x$에 대칭이다.

또 $\int_0^1 f(x)\,dx$는 그림에서 빗금친 부분의 넓이이다.

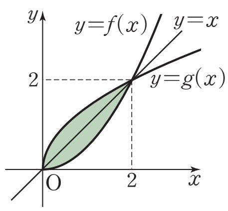
따라서 $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx$의 값은 빗금친 부분과 B 부분으로 이루어진 직사각형의 넓이이므로

$1\times3=3$

답 3

5-2

$y=f(x)$, $y=g(x)$가 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이고, 두 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



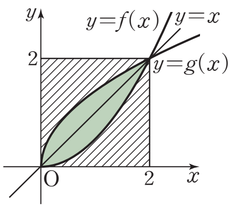
교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}x^2=x$에서

$x(x-2)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이므로

$$2\int_0^2 \{x-f(x)\}\,dx=2\int_0^2 \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

다른 풀이



빗금친 두 부분은 합동이고 하나의 넓이는

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

따라서 정사각형의 넓이에서 빗금친 두 부분의 넓이를 빼면

$$2^2-2\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

개념 Check

156쪽

3

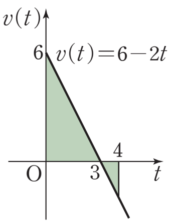
(1) $x(t)=1+\int_0^t (6-2t)\,dt$
$=1+\left[6t-t^2\right]_0^t$
$=-t^2+6t+1$

(2) $\int_0^4 (6-2t)\,dt=\left[6t-t^2\right]_0^4=8$

다른 풀이

(1)의 결과를 이용하면 $x(4)-x(0)=9-1=8$

(3) $0\le t\le 3$에서 $6-2t\ge 0$, $t\ge 3$에서 $6-2t\le 0$이므로



$\int_0^4 |6-2t|\,dt$
$=\int_0^3 (6-2t)\,dt-\int_3^4 (6-2t)\,dt$
$=\left[6t-t^2\right]_0^3-\left[6t-t^2\right]_3^4$
$=9+1=10$

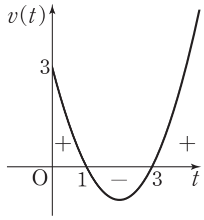
답 (1) $x(t)=-t^2+6t+1$ (2) 8 (3) 10

대표Q

157쪽 ~ 160쪽

대표 Q6

(1) $v(t)=t^2-4t+3$
$=(t-1)(t-3)$



이므로 $v(t)=0$의 해는
$t=1$ 또는 $t=3$
$t=1$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고,
$t=3$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.
시각 t에서 P의 위치는
$x(t)=2+\int_0^t (t^2-4t+3)\,dt$
$=2+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+2$
이므로 움직이는 방향이 바뀔 때 P의 위치는
$x(1)=\frac{10}{3}$, $x(3)=2$

(2) $\int_1^4 v(t)\,dt=\int_1^4 (t^2-4t+3)\,dt$
$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^4=0$

다른 풀이

$\int_1^4 v(t)\,dt=x(4)-x(1)=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}=0$

(3) $1\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$, $t\ge 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로
$\int_1^4 |v(t)|\,dt$
$=-\int_1^3 (t^2-4t+3)\,dt+\int_3^4 (t^2-4t+3)\,dt$
$=-\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4$
$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

(4) 출발 지점에 다시 돌아오면 $x(t)=2$이므로
$\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+2=2$
$t^3-6t^2+9t=0$, $t(t-3)^2=0$
$t>0$이므로 $t=3$일 때 P가 출발 지점에 다시 돌아온다.
이때까지 P가 움직인 거리는
$\int_0^3 |v(t)|\,dt$
$=\int_0^1 (t^2-4t+3)\,dt-\int_1^3 (t^2-4t+3)\,dt$

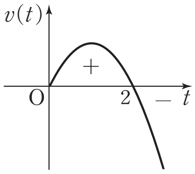
$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

답 (1) $\frac{10}{3}$, 2 (2) 0 (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{8}{3}$

6-1

(1) $v(t)=-t^2+2t=-t(t-2)$
이므로 $v(t)=0$의 해는
$t=0$ 또는 $t=2$
$t=2$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.



시각 t에서 P의 위치는

$x(t)=\int_0^t(-t^2+2t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^t$

$=-\frac{1}{3}t^3+t^2$

이므로 움직이는 방향이 바뀔 때 P의 위치는

$x(2)=\frac{4}{3}$

(2) $0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$, $t\ge 2$에서 $v(t)\le 0$이므로

$\int_0^4|v(t)|\,dt$

$=\int_0^2(-t^2+2t)\,dt-\int_2^4(-t^2+2t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2-\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$

(3) 다시 원점을 지날 때 $x(t)=0$이므로

$-\frac{1}{3}t^3+t^2=0$, $t^2(t-3)=0$

$t>0$이므로 $t=3$일 때 다시 원점을 지난다.
이때까지 P가 움직인 거리는

$\int_0^3|v(t)|\,dt$

$=\int_0^2(-t^2+2t)\,dt-\int_2^3(-t^2+2t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2-\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_2^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

(1) $\frac{4}{3}$ (2) 8 (3) $t=3$, 움직인 거리 : $\frac{8}{3}$

대표 Q7

시각 t에서 물체의 높이는

$x(t)=35+\int_0^t(30-10t)\,dt$

$=35+\left[30t-5t^2\right]_0^t$

$=-5t^2+30t+35$

(1) $x(2)=-20+60+35=75(\mathrm{m})$

(2) 물체가 최고 지점에 있을 때 $v(t)=0$이므로

$30-10t=0$ $\quad\therefore t=3$

따라서 최고 높이는

$x(3)=-45+90+35=80(\mathrm{m})$

다른 풀이

$x(t)=-5(t-3)^2+80$

이므로 $t=3$일 때 최고 높이는 80 m

(3) 물체가 지면에 떨어지면 $x(t)=0$이므로

$-5t^2+30t+35=0$, $t^2-6t-7=0$

$(t+1)(t-7)=0$

$t>0$이므로 $t=7$(초)

(4) $0\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로

$\int_0^4|v(t)|\,dt$

$=\int_0^3(30-10t)\,dt-\int_3^4(30-10t)\,dt$

$=\left[30t-5t^2\right]_0^3-\left[30t-5t^2\right]_3^4$

$=45+5=50(\mathrm{m})$

답 (1) 75 m (2) 80 m (3) 7초 (4) 50 m

7-1

시각 t에서 열기구의 높이를 $x(t)$라 하자.

(1) $0\le t\le 20$에서 $v(t)=t$,
$20\le t\le 40$에서 $v(t)=60-2t$이므로

$\int_0^{20}t\,dt+\int_{20}^{40}(60-2t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{40}$

$=200+0=200(\mathrm{m})$

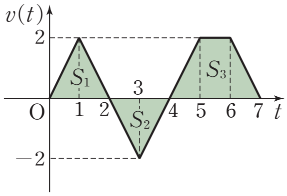
(2) 열기구가 최고 높이에 도달하면 $v(t)=0$이고
$t>0$이므로
$60-2t=0$에서 $t=30$
따라서 최고 높이는

$$\int_0^{20} t\,dt+\int_{20}^{30}(60-2t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{30}$$
$$=200+100=300(\mathrm{m})$$

답 (1) 200 m (2) 300 m

대표 Q8

(1) 그림에서 S_1, S_2, S_3의 넓이는 각각 2, 2, 4이다. 곧,



$$\int_0^4 v(t)\,dt=S_1-S_2$$
$$=0$$

이므로 $t=4$일 때 P는 출발점에 있다. (참)

(2) $\int_0^1 v(t)\,dt=1$

$$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^6 v(t)\,dt=0+3=3$$

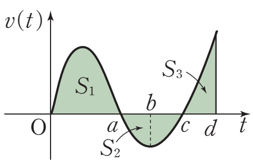
따라서 $t=1$일 때와 $t=6$일 때 P의 위치가 다르다. (거짓)

(3) $\int_0^7 |v(t)|\,dt=S_1+S_2+S_3=8$이므로 P가 7초 동안 움직인 거리는 8이다. (참)

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

8-1

그림에서 색칠한 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면



$$\int_0^a |v(t)|\,dt$$
$$=\int_a^d |v(t)|\,dt\text{이므로}$$

$S_1=S_2+S_3$ ⋯ ㉠

① ㉠에서 $S_1>S_2$이므로 P는 다시 원점을 지나지 않는다. (거짓)

② $\int_0^c v(t)\,dt=S_1-S_2$, $\int_c^d v(t)\,dt=S_3$

이때 ㉠에서 $S_1-S_2=S_3$이므로

$\int_0^c v(t)\,dt=\int_c^d v(t)\,dt$ (참)

③ $\int_0^b v(t)\,dt=\int_0^a v(t)\,dt+\int_a^b v(t)\,dt$

$=S_1+\int_a^b v(t)\,dt$ ⋯ ㉡

$\int_b^d |v(t)|\,dt=-\int_b^c v(t)\,dt+\int_c^d v(t)\,dt$

$=-\int_b^c v(t)\,dt+S_3$ ⋯ ㉢

㉡−㉢을 하면

$S_1+\int_a^b v(t)\,dt+\int_b^c v(t)\,dt-S_3$

$=S_1+\int_a^c v(t)\,dt-S_3=S_1-S_2-S_3=0$ ($\because$ ㉠)

곧, $\int_0^b v(t)\,dt-\int_b^d |v(t)|\,dt=0$이므로

$\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^d |v(t)|\,dt$ (참)

④ $t=a$일 때 P의 위치는 S_1,

$t=d$일 때 P의 위치는 $S_1-S_2+S_3$

따라서 $S_3>S_2$이면 $t=d$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (거짓)

⑤ P가 $t=0$부터 $t=d$까지 움직인 거리는

$S_1+S_2+S_3=S_1+(S_2+S_3)=2S_1$ ($\because$ ㉠)

이고, P가 $t=0$부터 $t=a$까지 움직인 거리는 S_1이므로 2배이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

날선 Q9

출발 지점의 높이를 0이라 하고, t초 후 A, B의 높이를 각각 $F(t)$, $G(t)$라 하면

$$F(t)=\int_0^t f(t)\,dt,\ G(t)=\int_0^t g(t)\,dt$$

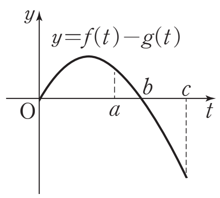
따라서 A, B의 높이 차이는

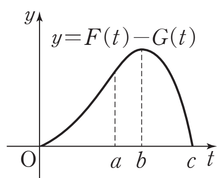
$$F(t)-G(t)=\int_0^t \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

$F(0)-G(0)=0$이고,

$F(c)-G(c)=\int_0^c f(t)\,dt-\int_0^c g(t)\,dt=0$이므로

$y=f(t)-g(t)$의 그래프와 $y=F(t)-G(t)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





(1) $0<t<c$에서 $F(t)-G(t)>0$이므로 A, B의 높이가 같은 시각은 없다. (거짓)

(2) $b<t<c$에서 $F(t)-G(t)>0$이므로 A는 B보다 높은 위치에 있다. (거짓)

(3) $t=b$일 때 $F(t)-G(t)$가 최대이므로 A와 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

답 (1) 거짓 (2) 거짓 (3) 참

9-1

출발 지점의 위치를 0이라 하고, t초 후 A, B의 위치를 각각 $F(t)$, $G(t)$라 하면

$F(t)=\int_0^t f(t)\,dt$, $G(t)=\int_0^t g(t)\,dt$

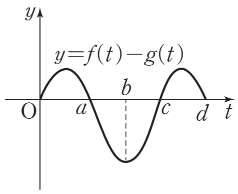
따라서 A, B의 위치 차이는

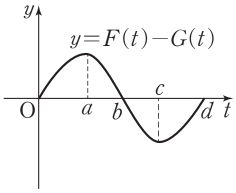
$F(t)-G(t)=\int_0^t \{f(t)-g(t)\}\,dt$

$F(0)-G(0)=0$이고,

$F(d)-G(d)=\int_0^d f(t)\,dt-\int_0^d g(t)\,dt=0$이므로

$y=f(t)-g(t)$의 그래프와 $y=F(t)-G(t)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





① $0<t<d$에서 $F(t)-G(t)=0$의 해가 $t=b$ 1개이므로 A, B는 한 번 만난다. (거짓)

② $a<t<b$에서 $F(t)-G(t)>0$이므로 A가 B보다 앞에 있다. (거짓)

③ $t=a$일 때 $F(t)-G(t)$가 최대이므로 $t=a$일 때 A가 B에 가장 멀리 앞에 있다. (거짓)

④ $t=c$일 때 $F(t)-G(t)$가 최소이므로 B가 A에 가장 멀리 앞에 있다. (참)

⑤ (평균 속도)$=\dfrac{(\text{위치 변화량})}{(\text{움직인 시간})}$이다.

$F(0)=G(0)$, $F(d)=G(d)$이므로 A, B의 위치 변화량이 같고, 움직인 시간도 d로 같으므로 평균 속도도 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

답 ④, ⑤

연습과 실전 9 정적분의 활용

161쪽~164쪽

01 (1) -5 (2) 3 (3) -7		02 $\frac{7}{6}$	03 $\frac{76}{3}$	04 ⑤	
05 $\frac{27}{4}$	06 10	07 $\frac{15}{2}$	08 $\frac{9}{2}$	09 ④	10 ④
11 $\frac{4}{3}$	12 풀이 참조		13 ②	14 $\frac{3}{2}$	15 ④
16 $(3, -18)$		17 $\frac{4}{9}$	18 ④	19 1	

01

(1) $\int_c^b f(x)\,dx=-\int_b^c f(x)\,dx=-S_2=-5$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=-S_1+S_2$

$=-2+5=3$

(3) $\int_c^a |f(x)|\,dx=-\int_a^c |f(x)|\,dx$

$=-(S_1+S_2)=-(2+5)=-7$

답 (1) -5 (2) 3 (3) -7

02

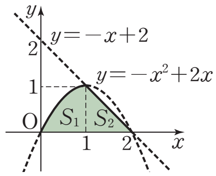
그림에서

$S_1=\int_0^1 (-x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$S_2=\int_1^2 (-x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2=\frac{1}{2}$



따라서 구하는 넓이는

$S_1+S_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

답 $\frac{7}{6}$

03

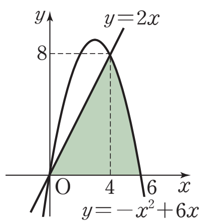
곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=2x$에서

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^4 2x\,dx+\int_4^6(-x^2+6x)\,dx$$

$$=\Big[x^2\Big]_0^4+\Big[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\Big]_4^6$$

$$=16+\frac{28}{3}=\frac{76}{3}$$

답 $\frac{76}{3}$

04

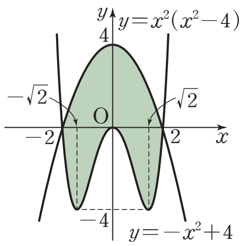
곡선 $y=-x^2+4$, $y=x^2(x^2-4)$의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=x^2(x^2-4)$에서 $(x^2-4)(x^2+1)=0$

x는 실수이므로 $x=\pm2$

$-2\le x\le 2$에서

$-x^2+4\ge x^2(x^2-4)$이므로 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^2\{(-x^2+4)-x^2(x^2-4)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^2(-x^4+3x^2+4)\,dx$$

$$=2\int_0^2(-x^4+3x^2+4)\,dx$$

$$=2\Big[-\frac{1}{5}x^5+x^3+4x\Big]_0^2=\frac{96}{5}$$

참고 $y=x^2(x^2-4)$의 극값을 구하면 곡선을 보다 정확하게 그릴 수 있다. 그러나 넓이를 구할 때에는 교점의 x좌표를 구하고 두 함수의 대소만 비교할 수 있으면 충분하다.

답 ⑤

05

$f(x)=x^3-2$라 하면

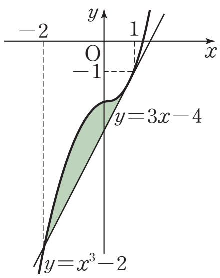
$f'(x)=3x^2$

$f'(1)=3$이므로 점 $(1,\ -1)$에서 접선의 방정식은

$y+1=3(x-1)$

$\therefore\ y=3x-4$

곡선과 접선의 교점의 x좌표는 $x^3-2=3x-4$에서



$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

$-2\le x\le 1$에서 $x^3-2\ge 3x-4$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1\{(x^3-2)-(3x-4)\}\,dx=\int_{-2}^1(x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{-2}^1$$

$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

06

$v(t)=0$일 때 자동차가 멈추므로

$30-at=0$에서 $t=\frac{30}{a}$

$\frac{30}{a}$초까지 자동차가 미끄러진 거리는

$$\int_0^{\frac{30}{a}}(30-at)\,dt=\Big[30t-\frac{a}{2}t^2\Big]_0^{\frac{30}{a}}$$

$$=\frac{450}{a}$$

곧, $\frac{450}{a}=45$이므로 $a=10$

답 10

07

시각 t에서 P의 위치는

$$x(t)=\int_0^t(t^2+at+1)\,dt$$

$$=\Big[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+t\Big]_0^t$$

$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+t$$

$x(1)=\frac{5}{6}$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+1=\frac{5}{6}\qquad\therefore\ a=-1$

따라서 $x(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t$이므로

$x(3)=9-\frac{9}{2}+3=\frac{15}{2}$

답 $\frac{15}{2}$

08

$v(0)=10>0$이므로 P가 처음 출발한 방향과 반대 방향으로 움직인 시각에는 속도가 음수이다.

곧, $v(t)=t^2-7t+10<0$에서

$(t-2)(t-5)<0\qquad\therefore\ 2<t<5$

따라서 처음 출발한 방향과 반대 방향으로 움직인 거리는

$$-\int_2^5 (t^2-7t+10)\,dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_2^5=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

09

ㄱ. $a\le t\le b$에서 $v(t)\ge 0$이므로 위치 변화량이 움직인 거리이다.
곧, P가 움직인 거리는 $\int_a^b v(t)\,dt$이다. (참)

ㄴ. $t=b$의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌므로 P는 움직이는 방향을 바꾼다. (참)

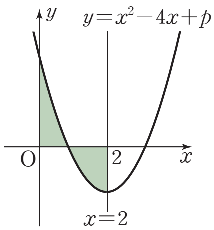
ㄷ. 순간적으로 정지 상태일 때 속도는 0이지만 P는 $t=a$에서 속도가 양수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

10 전략 포물선은 축에 대칭임을 이용한다.

포물선 $y=x^2-4x+p$의 축은 직선 $x=2$이므로 B 부분은 축 $x=2$에 의해 이등분된다.
따라서 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$\int_0^2 (x^2-4x+p)\,dx=0$에서

$$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+px\right]_0^2=\frac{8}{3}-8+2p=0 \qquad \therefore p=\frac{8}{3}$$

답 ④

11 전략 $\int_0^{10} f(x)\,dx-\int_3^{10} f(x)\,dx$부터 간단히 하고, 조건이 나타내는 부분을 생각한다.

$\int_0^{10} f(x)\,dx-\int_3^{10} f(x)\,dx=0$이고,

$\int_0^{10} f(x)\,dx-\int_3^{10} f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx$이므로

$\int_0^3 f(x)\,dx=0$

$f(x)$는 x^2의 계수가 1이고 $f(3)=0$인 이차함수이므로 $f(x)=0$의 나머지 한 근을 α라 하면
$f(x)=(x-3)(x-\alpha)$로 놓을 수 있다.

$\int_0^3 f(x)\,dx=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x-3)(x-\alpha)\,dx&=\int_0^3 \{x^2-(\alpha+3)x+3\alpha\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+3}{2}x^2+3\alpha x\right]_0^3\\&=\frac{9}{2}\alpha-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

곧, $\frac{9}{2}\alpha-\frac{9}{2}=0$이므로 $\alpha=1$

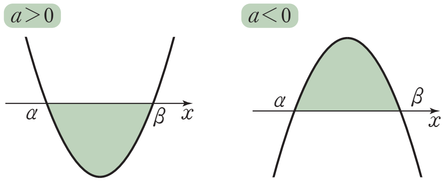
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}-\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx&=-\int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx\\&=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

12 전략 곡선이 x축과 만나는 점이 α, β이므로 정적분의 아래끝과 위끝이 α와 β이다.

곡선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$는 x축과 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나므로 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.

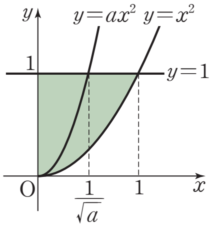


따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx\\&=-|a|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=-|a|\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx\\&=-|a|\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta\\&=-|a|\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right\}\\&=-\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}\\&=-\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)\\&=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

답 풀이 참조

13 전략 곡선 $y=x^2$과 $y=ax^2$이 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표부터 구한 후 적분한다.



곡선 $y=x^2\,(x\geq 0)$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 $x^2=1$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

따라서 곡선 $y=x^2\,(x\geq 0)$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 (1-x^2)\,dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

곡선 $y=ax^2\,(x\geq 0)$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$ax^2=1$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($\because x\geq 0$)

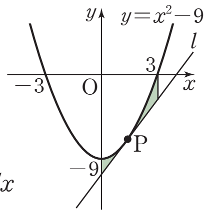
따라서 곡선 $y=ax^2\,(x\geq 0)$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (1-ax^2)\,dx=\left[x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$$

조건에서 $\frac{2}{3\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$이므로 $\sqrt{a}=2$ $\quad\therefore a=4$

답 ②

14 전략 접선의 방정식을 구하고 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.



$y'=2x$이므로 접선 l의 방정식은

$y-(a^2-9)=2a(x-a)$

$\therefore y=2ax-a^2-9$

그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^3 \{(x^2-9)-(2ax-a^2-9)\}\,dx$$
$$=\int_0^3 (x^2-2ax+a^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^3$$
$$=9-9a+3a^2=3\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$일 때 넓이가 최소이다.

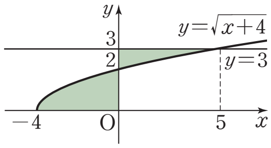
답 $\frac{3}{2}$

15 전략 $y=\sqrt{x+4}$의 역함수가 이차함수임을 이용한다.

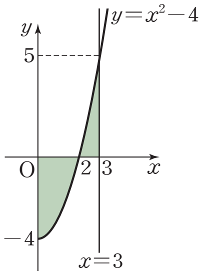
$y=\sqrt{x+4}$ $(y\geq 0)$의 양변을 제곱하면 $y^2=x+4$

x와 y를 바꾸면 $y=x^2-4$

곧, $y=\sqrt{x+4}$의 역함수는 $y=x^2-4$ $(x\geq 0)$이다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 곡선 $y=\sqrt{x+4}$와 y축 및 두 직선 $y=0$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 [그림 2]에서 곡선 $y=x^2-4$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

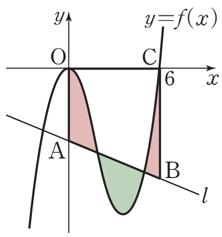
따라서 [그림 2]에서 색칠한 부분의 넓이는

$$-\int_0^2 (x^2-4)\,dx+\int_2^3 (x^2-4)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

답 ④

16 전략 넓이가 같은 부분 ➡ 정적분의 값이 0임을 이용한다.

$f(x)=x^3-6x^2=x^2(x-6)$이라 하면 곡선 $y=f(x)$는 원점 O에서 x축에 접하고 점 C를 지난다.



사다리꼴 OABC의 넓이가 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으면 그림에서 빨간색 두 부분의 넓이의 합과 초록색 부분의 넓이가 같다.

따라서 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하면

$$\int_0^6 \{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$

곧, $g(x)=mx+n$이라 하면

$$\int_0^6 (x^3-6x^2-mx-n)\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3-\frac{m}{2}x^2-nx\right]_0^6=0$$

$-108-18m-6n=0$ $\quad\therefore n=-3m-18$

l의 방정식은

$y=mx-3m-18$ $\quad\therefore y+18=m(x-3)$

따라서 l은 항상 점 $(3,\ -18)$을 지난다.

답 $(3,\ -18)$

17 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 이용한다.

곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표와 같으므로 $ax^2+b=x$, 곧 $ax^2-x+b=0$의 근이다.

이 이차방정식의 두 근이 1과 2이므로 근과 계수의 관계에서

$\frac{1}{a}=1+2,\ \frac{b}{a}=1\times2 \qquad \therefore a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$

이때 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$이고

$A=2\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx,\ B=2\int_1^2\{x-f(x)\}\,dx$

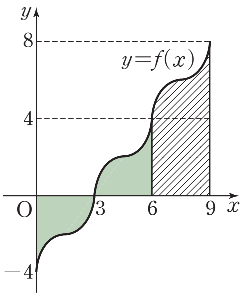
이므로

$$\begin{aligned}A-B&=2\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx-2\int_1^2\{x-f(x)\}\,dx\\&=2\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx+2\int_1^2\{f(x)-x\}\,dx\\&=2\int_0^2\{f(x)-x\}\,dx\\&=2\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}\right)dx\\&=2\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\right]_0^2=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{9}$

18 전략 실수 전체의 집합에서 증가하고 $f(x)=f(x-3)+4$인 그래프를 생각한다.

(가)에서 $f(x)=f(x-3)+4$이므로 $0\le x\le3$에서의 그래프를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 4만큼 반복하여 평행이동했다고 생각할 수 있다.



또 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 (나)에서 $\int_0^6 f(x)\,dx=0$이므로 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같다.

곧, $-\int_0^3 f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx$이므로

$$\begin{aligned}-\int_0^3 f(x)\,dx&=\int_3^6 f(x)\,dx\\&=\int_3^6\{f(x-3)+4\}\,dx\\&=\int_3^6 f(x-3)\,dx+\int_3^6 4\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+12\end{aligned}$$

$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx=-6,\ \int_3^6 f(x)\,dx=6$

따라서 구하는 넓이는 빗금친 부분의 넓이이므로

$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)\,dx&=\int_3^6 f(x)\,dx+12\\&=6+12=18\end{aligned}$$

답 ④

19 전략 x_0에서 출발하면 위치는

$x(t)=x_0+\int_0^t v(t)\,dt$이다.

시각 t에서 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$x_P(t)=2+\int_0^t(-2t+1)\,dt=-t^2+t+2$

$x_Q(t)=6+\int_0^t(4t-5)\,dt=2t^2-5t+6$

시각 t에서 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned}|(2t^2-5t+6)-(-t^2+t+2)|&=|3t^2-6t+4|\\&=|3(t-1)^2+1|\end{aligned}$$

따라서 $t=1$일 때 최소이다.

답 1

memo

m|e|m|o