한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

상 경 계	논 술 예 시 답 안	2번

1. 참가자 A에게 Q_1이 먼저 주어졌을 때 총 상금의 기댓값을 계산하기 위해선 다음의 경우를 고려해야 한다.

	상금	확률
Q_1 오답	0	$1-P_1=0.4$
Q_1 정답, Q_2 오답	R_1	$P_1(1-P_2)=0.12$
Q_1, Q_2 모두 정답	$R_1+R_2=R_1+75$	$P_1P_2=0.48$

그러므로 A의 총 상금의 기댓값은 $R_1P_1(1-P_2)+(R_1+R_2)P_1P_2$를 통해 계산된다. 즉, Q_1이 먼저 주어졌을 때 총 상금의 기댓값은 $0.12R_1+0.48(R_1+75)$만 원이다.

한편, Q_2가 먼저 주어졌을 경우 총 상금의 기댓값은 $R_2P_2(1-P_1)+(R_1+R_2)P_1P_2$를 통해 계산되어 $24+0.48(R_1+75)$만 원이 된다. 따라서 두 경우 상금의 기댓값이 같아지려면 $0.12R_1=24$만 원이 되어 $R_1=200$만 원이 되어야 한다.

2. 확률의 덧셈정리에 의해 $\mathrm{P}(X=Y-1)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X=k, Y=k+1)$이고, $X=k$인 사건과 $Y=k+1$인 사건은 서로 독립이므로 $P(X=k, Y=k+1)=P(X=k)P(Y=k+1)$이 성립한다. 따라서

$$P(X=Y-1)=\sum_{k=0}^{n-1}{}_nC_k\,{}_nC_{k+1}2^{-2n}=2^{-2n}\sum_{k=0}^{n-1}{}_nC_k\,{}_nC_{n-k-1}$$

이고, 여기서 $\sum_{k=0}^{n-1}{}_nC_k\,{}_nC_{n-k-1}$는 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수임을 알 수 있다. 그러므로 $P(X=Y-1)=2^{-2n}{}_{2n}C_{n-1}$이고, 대칭적으로 $P(Y=X-1)$의 값 또한 $2^{-2n}{}_{2n}C_{n-1}$이다. $X=Y-1$인 사건과 $Y=X-1$인 사건은 서로 배반이므로, 답은 두 확률의 합인 $2^{1-2n}{}_{2n}C_{n-1}$이 된다.

3. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X와 Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수의 그래프는 대칭축의 위치는 다르지만 모양이 같다. 조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\le 10)\le \mathrm{P}(Y\ge 25)$이므로 $0.5\le \mathrm{P}(Y\ge 25)$임을 알 수 있고 또한 조건 (나)에서 $f(15)=g(25)$이므로 $m=25+(15-10)=30$임을 알 수 있다.

제품 A 9개의 평균 무게를 $\overline{X}$라고 하면 이는 정규분포 $\mathrm{N}(10, 1^2)$을 따른다. 마찬가지로 제품 B 9개의 평균 무게를 $\overline{Y}$라고 하면 이는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 1^2)$을 따른다. 한편, $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 2k)$와 $\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)$가 같기 때문에 다음이 성립함을 알 수 있다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 2k)=\mathrm{P}(Z\ge 2k-10)=\mathrm{P}(Z\le k-30)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)$

따라서 $2k-10=-(k-30)$, $k=40/3$, $mk=30\times 40/3=400$이다.