

2020학년도 논술고사 (자연계열)

1. 출제문제

※ <문제 1>부터 <문제 4>까지 총 4개의 문제가 있고, 각 문제마다 3개의 세부 문항이 있습니다. 답안지의 지정된 양식 안에 각 세부 문항 별로 해당 문항 번호를 쓰고 답을 작성하십시오. 수식과 논리를 명확히 전개하고 근거와 과정을 제시하십시오. (시험 시간: 100분, 답안 분량: 지정된 답안 양식 내 작성)

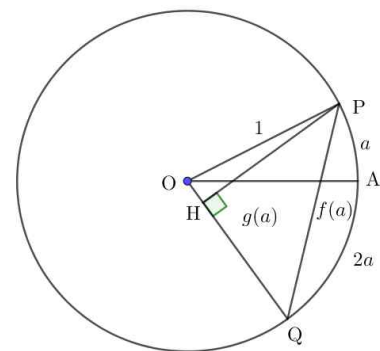
문제 1 두 함수 $f(x) = \frac{x+3}{4x+8}$, $g(x) = -\frac{x-3}{x-4}$ 에 대하여 다음 물음에 답하십시오. [총 25점]

- (1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하십시오. [5점]
- (2) 함수 $y=f(x)$ 의 점근선의 교점을 P라 하자. 네 변이 각각 좌표축에 평행하고, 대각선의 교점이 P인 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있을 때, 꼭짓점 B의 좌표를 구하십시오. 단, 점 A의 x 좌표는 -2 보다 작고, 점 B의 x 좌표는 -2 보다 크다. [10점]
- (3) 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 함수 $y=k(x)$ 의 그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이라고 할 때, 두 함수 $y=h(x)$, $y=k(x)$ 의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형이 정사각형이 되도록 하는 실수 b 의 값을 모두 구하십시오. [10점]

문제 2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 고정된 점 A가 있다. 원 O 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 호 PQ는 점 A를 포함하고, 호 AQ의 길이는 호 AP의 길이의 2배이다. 점 P에서 \overline{OQ} 에 내린 수선의 발을 H, 호 AP의 길이를 a (단, $0 < a < \frac{\pi}{6}$)로 둘 때, 부채꼴 OPQ에서 삼각형 OPQ를 제외한 활꼴의 넓이를 $f(a)$ 라 하고, 삼각형 PHQ의 넓이를 $g(a)$ 라 한다.

다음 물음에 답하십시오. [총 25점]

- (1) $f(a)$, $g(a)$ 를 각각 a 에 대한 식으로 나타내시오. [10점]
- (2) $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f(a)}{a}$ 의 값을 구하십시오. [5점]
- (3) $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{g(a)}{a^3}$ 의 값을 구하십시오. [10점]

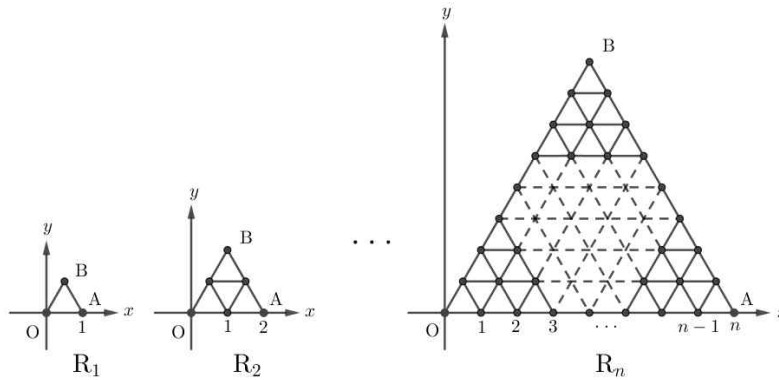


문제 3 곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 10$ 위의 x 좌표가 2인 점 A에서의 접선과 이 곡선의 교점 중 A와 다른 것을 B라고 한다.

다음 물음에 답하십시오. [총 25점]

- (1) 곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 10$ 의 점 A에서의 접선의 방정식을 구하십시오. [10점]
- (2) 점 B의 x 좌표를 구하십시오. [5점]
- (3) 곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 10$ 과 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하십시오. [10점]

문제 4 n 이 자연수일 때 좌표평면에서 원점 O와 점 $A(n,0)$ 을 두 꼭짓점으로 하는 정삼각형 OAB를 그리고, 이것을 아래 그림 R_n 과 같이 한 변의 길이가 1인 n^2 개의 합동인 정삼각형으로 분할하였다.



다음 물음에 답하십시오. [총 25점]

- (1) 그려진 삼각형들의 변을 따라 B에서 점 $(k, 0)$ 에 이르는 최단 경로의 개수를 $f(k)$ 라 할 때, 그림 R_1 의 $f(0), f(1)$ 의 값과 그림 R_2 의 $f(0), f(1), f(2)$ 의 값을 각각 구하고, 그림 R_n 의 $f(k)$ 를 k 에 대한 식으로 나타내시오. ($k=0, 1, \dots, n$). [5점]
- (2) 그림 R_n 에서 $g(n) = \sum_{k=0}^n f(k)$ 를 n 에 대한 식으로 나타내고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g(n)}$$
 의 값을 구하십시오. [10점]
- (3) 그림 R_n 에서 한 번 지난 점은 다시 지나지 않고, 그려진 삼각형들의 변을 따라 B에서 A로 가는 경로 중 가장 긴 것의 길이를 n 에 대한 식으로 나타내시오. [10점]