

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	②	3	③	4	④	5	⑤
6	③	7	①	8	②	9	③	10	⑤
11	④	12	④	13	①	14	②	15	①
16	5	17	15	18	109	19	80	20	226
21	8	22	82						

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산한다.

$$\sqrt{8} \times 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = 4$$

2. [출제의도] 다항함수의 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^2 (2x^3 + 3x^2) dx = \left[ \frac{x^4}{2} + x^3 \right]_0^2 = 16$$

3. [출제의도] 등비수열의 항을 구한다.

$$a_1 a_3 = (a_2)^2 = 4, a_3 a_5 = (a_4)^2 = 64 \text{에서}$$

$$a_2 = 2, a_4 = 8 \text{이고 등비수열 } \{a_n\} \text{의}$$

$$\text{공비는 2이므로 } a_6 = 8 \times 2^2 = 32$$

4. [출제의도] 함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4 + (-2) = 2$$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \text{이므로 } \sin \theta = -2 \cos \theta \text{이다.}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로 } \sin^2 \theta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta \tan \theta = \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

6. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + a \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$f(1) = a + 1, f'(1) = 1 \text{이므로}$$

$$\text{곡선 위의 점 } (1, f(1)) \text{에서의 접선의 방정식은}$$

$$y = (x-1) + a + 1, \text{ 즉 } y = x + a$$

$$\text{두 점 P, Q의 좌표는 각각 } (-a, 0), (0, a) \text{이다.}$$

$$\overline{PQ} = 6 \text{에서 } \sqrt{a^2 + a^2} = 6, a^2 = 18$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 3\sqrt{2}$$

7. [출제의도] 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 함수  $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분에서  $0 \leq x \leq 2$ 인 부분과  $2 \leq x \leq 4$ 인 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \int_0^4 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^2 (-2x^2 + 6x) dx$$

$$= 2 \left[ -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = \frac{40}{3}$$

8. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

(i)  $1 \leq n \leq 10$ 인 경우

$$a_1 = 20, a_{n+1} = a_n - 2 \text{이므로 } a_n = -2n + 22$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (-2n + 22) = 110$$

(ii)  $11 \leq n \leq 30$ 인 경우

$$a_{10} = 2 \text{이므로 } a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ -2 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$$\sum_{n=11}^{30} a_n = (-2) \times 10 = -20$$

(i), (ii)에서  $\sum_{n=1}^{30} a_n = 110 + (-20) = 90$

9. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 함수값을 구한다.

주어진 등식의 양변에  $x=0$ 을 대입하면  $f(0)=0$  다항함수  $f(x)$ 의 차수를  $n$ 이라 하자.

(i)  $n \leq 1$ 일 때, 주어진 등식의 좌변의 차수는

1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii)  $n=2$ 일 때, 주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는 -1이고, 우변의 이차항의 계수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(iii)  $n \geq 3$ 일 때, 주어진 등식의 좌변의  $n$ 차항의 계수가  $n-3$ 이고 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는  $n=3$ 이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서  $f(x)$ 는 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이고}$$

$$x f'(x) - 3f(x) = x(3x^2 + 2ax + b) - 3(x^3 + ax^2 + bx)$$

$$= -ax^2 - 2bx$$

주어진 등식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하므로

$$-a = 2, -2b = -8$$

$$\text{에서 } a = -2, b = 4 \text{이고 } f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$$

$$\text{따라서 } f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$$

10. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하자.

$$-\log_2(-x) = \log_2(x+2a) \text{에서}$$

$$\log_2(x+2a) + \log_2(-x) = 0$$

$$\log_2\{-x(x+2a)\} = 0$$

$$-x(x+2a) = 1$$

$$x^2 + 2ax + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 두 실근이  $x_1, x_2$ 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = -2a, x_1 x_2 = 1$$

이다. 이때

$$y_1 + y_2 = -\log_2(-x_1) - \log_2(-x_2)$$

$$= -\log_2 x_1 x_2$$

$$= -\log_2 1 = 0$$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는  $(-a, 0)$ 이다.

선분 AB의 중점이 직선  $4x + 3y + 5 = 0$  위에

$$\text{있으므로 } -4a + 5 = 0 \text{에서 } a = \frac{5}{4}$$

$$a = \frac{5}{4} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0, 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$(x+2)(2x+1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2}$$

따라서 두 교점의 좌표는  $(-2, -1), (-\frac{1}{2}, 1)$ 이고

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$$

11. [출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (가)와 (나)에서

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 16a + 4b - 24 \text{ 이고}$$

$$f(0) = f(4) \text{이므로 } -24 = 16a + 4b - 24 \text{에서}$$

$$b = -4a \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq x < 4$ 에서  $f(x) = a(x-2)^2 - 4a - 24$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$1 < x < 2$ 일 때 방정식  $f(x)=0$ 이 실근을 갖지 않으면  $1 < x < 10$ 일 때 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1 < x < 2$ 일 때 방정식  $f(x)=0$ 이 실근을 1개 가지면  $1 < x < 10$ 일 때 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

함수  $f(x)$ 는 닫힌구간  $[1, 2]$ 에서 연속이므로

$$f(1)f(2) = (-3a-24)(-4a-24)$$

$$= 12(a+8)(a+6) < 0$$

$$-8 < a < -6 \text{이고 } a \text{는 정수이므로 } a = -7$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } b = 28$$

$$\text{따라서 } a+b = -7+28 = 21$$

12. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $y=2$ 와 만나는 점의

$$x \text{좌표는 } 0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \text{일 때 방정식}$$

$$\left| 4\sin\left(ax - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \right| = 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 실근과 같다.

$$ax - \frac{\pi}{3} = t \text{라 하면 } -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11\pi}{3} \text{이고}$$

$$|4\sin t + 2| = 2 \dots\dots \textcircled{2}$$

에서  $\sin t = 0$  또는  $\sin t = -1$

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11\pi}{3} \text{일 때, 방정식 } \textcircled{2} \text{의 실근은}$$

$$0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$$

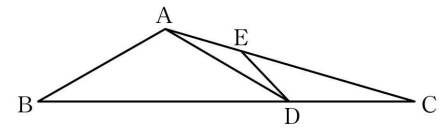
의 6개이고 이 6개의 실근의 합은  $11\pi$ 이다.

따라서  $n=6$ 이고 방정식 ①의 6개의 실근의 합이 39이므로

$$39a - \frac{\pi}{3} \times 6 = 11\pi, a = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } n \times a = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{2^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 2 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 삼각형 ABD에서

$$\sin(\angle ABD) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의

$$\text{반지름의 길이는 } \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = \boxed{2} \text{이다.}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$

이므로

$$\sin(\angle CAD) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \times \sin(\angle ACD)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{39}}{26}$$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{DE} = 2 \times 2 \times \sin(\angle CAD) = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

이다.

따라서  $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $q = 2$ ,  $r = \frac{2\sqrt{39}}{13}$  이므로

$$p \times q \times r = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

**14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.**

함수  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라 하면 주어진

방정식은  $\int_t^x f(s) ds = F(x) - F(t) = 0$  이므로

$F(x) = F(t)$  이다.

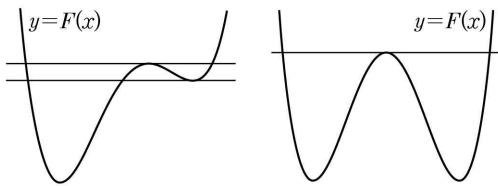
따라서  $g(t)$ 는 곡선  $y = F(x)$ 와 직선  $y = F(t)$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

ㄱ.  $F'(x) = f(x) = x^2(x-1)$  이다.

함수  $F(x)$ 는  $x < 1$ 에서 감소,  $x > 1$ 에서 증가하므로  $x = 1$ 에서 극소이면서 최소이다.

따라서 곡선  $y = F(x)$ 와 직선  $y = F(1)$ 은 오직 한 점에서 만나므로  $g(1) = 1$ 이다. (참)

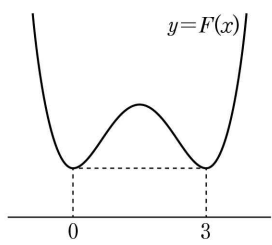
ㄴ. 방정식  $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수  $F(x)$ 의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다. 각 경우 곡선  $y = F(x)$ 와 직선  $y = F(a)$ 가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수  $a$ 가 존재한다.



따라서  $g(a) = 3$ 인 실수  $a$ 가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수  $F(x)$ 가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) + g(b) = 6$ 인 실수  $b$ 가 존재하지 않는다.

따라서 곡선  $y = F(x)$ 의 개형은 다음과 같고,  $F(0) = F(3)$ 이다.



$f(0) = F'(0) = 0$ 이고  $f(3) = F'(3) = 0$  이므로

$$F(x) - F(0) = \frac{x^2(x-3)^2}{4} = \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2}{4}$$

양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

이므로  $f(4) = 64 - 72 + 18 = 10$  (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**15. [출제의도] 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.**

$S_n$ 이 주어진 조건을 만족시키면  $i \neq j$ 인 임의의 두 자연수  $i, j$ 에 대하여

$S_i - S_j \neq 0$  이므로

$$S_i - S_j = (pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q) \\ = (i-j)(pi + pj - 36) \neq 0$$

따라서  $i + j \neq \frac{36}{p}$

$p \leq 4$ 이면  $i + j = \frac{36}{p}$ 인 서로 다른 두 자연수  $i, j$ 가 존재한다.

$p = 5$ 이면  $i + j = \frac{36}{p}$ 인 서로 다른 두 자연수  $i, j$ 가 존재하지 않는다.

따라서  $p$ 의 최솟값은 5, 즉  $p_1 = 5$ 이다.

$p = 5$ 일 때  $S_n = 5n^2 - 36n + q$ 이므로

$$a_1 = S_1 = q - 31,$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41$$

이때

$$a_2 = -21, a_3 = -11, a_4 = -1, a_5 = 9, a_6 = 19,$$

$$a_7 = 29, \dots$$

$|a_k| < a_1$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수가 3이므로  $k$ 의 값은 3, 4, 5이다.

$$11 < a_1 \leq 19, 11 < q - 31 \leq 19$$

$$42 < q \leq 50$$

이다. 따라서 모든  $q$ 의 값의 합은

$$43 + 44 + \dots + 50 = \frac{8 \times (43 + 50)}{2} = 372$$

**16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 값을 계산한다.**

$$\log_2 96 + \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_2 96 + \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^{-2}} \\ = \log_2 (2^5 \times 3) - \log_2 3 = 5$$

**17. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 극댓값을 구한다.**

$f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 10$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$$

함수  $f(x)$ 는  $x = 3$ 에서 극소이므로

$$f'(3) = 27 - 18 + a = 0, a = -9$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = -1$  또는  $x = 3$ 이므로

함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 10 = 15$$

**18. [출제의도] 자연수의 합의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.**

$$\sum_{k=1}^6 (k+1)^2 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 \\ = 7^2 + \sum_{k=1}^5 (k+1)^2 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 \\ = 49 + \sum_{k=1}^5 \{(k+1)^2 - (k-1)^2\} \\ = 49 + 4 \sum_{k=1}^5 k = 49 + 4 \times \frac{5 \times 6}{2} = 109$$

**19. [출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.**

점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a(t)$ 는

$$a(t) = v'(t) = 12t^2 - 48$$

$a(k) = 12(k^2 - 4) = 0$ 에서  $k > 0$ 이므로  $k = 2$ 이다.

$0 \leq t \leq 2$ 일 때  $v(t) \leq 0$ 이므로

시각  $t = 0$ 에서  $t = 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)| dt = \int_0^2 (-4t^3 + 48t) dt \\ = \left[ -t^4 + 24t^2 \right]_0^2 = -16 + 96 = 80$$

**20. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.**

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 1| = 0$$

이므로 삼차식  $f(x) - 1$ 은  $x$ 를 인수로 갖는다.

이차식  $g(x)$ 에 대하여  $f(x) - 1 = xg(x)$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x) - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|xg(x)|}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} |g(x)| = |g(0)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x) - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|xg(x)|}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} |g(x)| = |g(0)| \\ = - \lim_{x \rightarrow 0^-} |g(x)| = -|g(0)|$$

$|g(0)| = -|g(0)|$ 에서  $g(0) = 0$

이차식  $g(x)$ 도  $x$ 를 인수로 가지므로

$f(x) - 1 = x^2(x+a)$  ( $a$ 는 실수)

라 하면  $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$

$xf(x) \geq -4x^2 + x$ 에서

$$x(x^3 + ax^2 + 1) \geq -4x^2 + x$$

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 + ax + 4) \geq 0$$

$x^2 \geq 0$ 이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$x^2 + ax + 4 \geq 0$$
이 성립한다.

이차방정식  $x^2 + ax + 4 = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = a^2 - 16 \leq 0$$

$$-4 \leq a \leq 4$$

$f(5) = 25a + 126$ 이므로 구하는  $f(5)$ 의 최댓값은  $a = 4$ 일 때 226이다.

**21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결한다.**

$\overline{OA} : \overline{OB} = \sqrt{3} : \sqrt{19}$ 이므로  $\overline{OA} = \sqrt{3}k$  ( $k > 0$ )

이라 하면  $\overline{OB} = \sqrt{19}k$ 이고  $\overline{AB} = 4k$ 이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ 라 하자. 직선 OA와  $x$ 축이 이루는 예각의 크기가  $60^\circ$ 이므로

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k, y_1 = \frac{3}{2}k$$

$$\text{따라서 } A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k\right)$$

직선 AB의 기울기는  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 직선 AB와

$x$ 축이 이루는 예각의 크기가  $30^\circ$ 이다.

$$x_2 - x_1 = 4k \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}k$$
에서

$$x_2 = x_1 + 2\sqrt{3}k = \frac{3\sqrt{3}}{2}k$$

$$y_2 - y_1 = 4k \sin 30^\circ = 2k$$
에서

$$y_2 = y_1 + 2k = \frac{7}{2}k$$

$$\text{따라서 } B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$$

점 A는 곡선  $y = a^{-2x} - 1$  위의 점이므로

$$\frac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k} - 1 \text{에서 } a^{\sqrt{3}k} = \frac{3k+2}{2} \dots \textcircled{1}$$

점 B는 곡선  $y = a^x - 1$  위의 점이므로

$$\frac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} - 1 \text{에서 } a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} = \frac{7k+2}{2} \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^3 = \left(\frac{7k+2}{2}\right)^2$$

$$27k^3 - 44k^2 - 20k = 0, k(k-2)(27k+10) = 0$$

$k > 0$ 이므로  $k = 2$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 4k = 8$$

**22. [출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수에 대한 문제를 해결한다.**

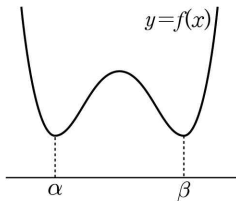
사차함수  $f(x)$ 가  $x = \alpha$ 에서만 극솟값을 갖는다고

하면 함수  $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - f(\alpha) & (t < \alpha) \\ f(\alpha) - f(t) & (t \geq \alpha) \end{cases}$$

구간  $(-\infty, \alpha)$  에서 함수  $f(t)$  가 감소하므로 함수  $g(t)$  도 감소하고, 구간  $[\alpha, \infty)$  에서 함수  $f(t)$  가 증가하므로 함수  $g(t)$  는 감소한다. 실수 전체의 집합에서 함수  $g(t)$  가 감소하므로 조건을 만족시키는 양수  $k$  가 존재하지 않는다. 그러므로 함수  $f(x)$  는 극댓값을 가져야 한다. 함수  $f(x)$  가  $x = \alpha, x = \beta (\alpha < \beta)$  에서 극솟값을 가지고,  $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$  라 하자.

(i)  $f(\alpha) = f(\beta)$  인 경우

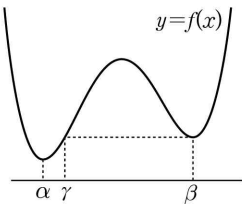


함수  $f(x)$  의 최솟값은  $a$  이므로

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - a & (t < \alpha) \\ 0 & (\alpha \leq t \leq \beta) \\ a - f(t) & (t > \beta) \end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수  $k$  가 존재하지 않는다.

(ii)  $f(\alpha) < f(\beta)$  인 경우

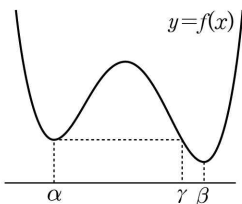


$\alpha < x < \beta$  일 때,  $f(x) = f(\beta)$  의 해를  $\gamma$  라 하면

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - a & (t < \alpha) \\ a - f(t) & (\alpha \leq t < \gamma) \\ a - b & (\gamma \leq t \leq \beta) \\ a - f(t) & (t > \beta) \end{cases}$$

$a - b < 0$  이므로 조건을 만족시키는 양수  $k$  가 존재하지 않는다.

(iii)  $f(\alpha) > f(\beta)$  인 경우



$\alpha < x < \beta$  일 때,  $f(x) = f(\alpha)$  의 해를  $\gamma$  라 하면

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - b & (t < \alpha) \\ a - b & (\alpha \leq t < \gamma) \\ f(t) - b & (\gamma < t < \beta) \\ b - f(t) & (t \geq \beta) \end{cases}$$

$a - b > 0$  이므로  $k = a - b, \alpha = 0, \gamma = 2$  이면  $k$  는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f'(0) = 0, f(0) = f(2)$$

이다. 또  $g(4) = 0$  이므로  $\beta = 4$  이고  $f'(4) = 0$  이다.

$f(x) - f(0) = x^2(x-2)(x-p)$  ( $p$  는 상수)라 하자.

$$f'(x) = 2x(x-2)(x-p) + x^2(2x-p-2)$$

$$f'(4) = 0 \text{ 에서 } 16(4-p) + 16(6-p) = 0$$

$$10 - 2p = 0, p = 5$$

그러므로

$$f(x) = x^2(x-2)(x-5) + f(0)$$

$$k = f(\alpha) - f(\beta) = f(0) - f(4)$$

$$= f(0) - \{-32 + f(0)\} = 32$$

$$g(-1) = f(-1) - f(4)$$

$$= \{18 + f(0)\} - \{-32 + f(0)\} = 50$$

따라서  $k + g(-1) = 82$

[확률과 통계]

23	②	24	①	25	③	26	④	27	⑤
28	④	29	105	30	17				

23. [출제의도] 모표준편차와 표본의 크기를 이용하여 표본평균의 표준편차를 계산한다.

모표준편차가 12 이고 표본의 크기가 36 이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

24. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구한다.

다항식  $(x^2+1)(x-2)^5$  의 전개식에서  $x^6$  의 계수는  $(x^2+1)$  에서  $x^2$  의 계수 1 과  $(x-2)^5$  의 전개식에서  $x^4$  의 계수를 곱한 것과 같다.

$(x-2)^5$  의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} (-2)^r \quad (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$r=1$  일 때  $x^4$  의 계수는  ${}_5C_1 \times (-2) = -10$

따라서  $(x^2+1)(x-2)^5$  의 전개식에서  $x^6$  의 계수는

$$1 \times (-10) = -10$$

25. [출제의도] 이산확률변수의 평균과 분산을 구한다.

$$E(X) = (-3) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{a}{4}$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = -1 \text{ 에서 } a = 2$$

$$V(X) = (-3+1)^2 \times \frac{1}{2} + (0+1)^2 \times \frac{1}{4} + (2+1)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$\text{따라서 } V(2X) = 2^2 \times V(X) = 4 \times \frac{9}{2} = 18$$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

조건 (가) 를 만족시키는 네 자연수는

1, 1, 1, 8 또는 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

이때 조건 (나) 를 만족시키는 경우는

1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

(i) 네 자연수 1, 1, 2, 4 를 일렬로 나열하는 경우

$$\text{의 수는 } \frac{4!}{2!} = 12$$

(ii) 네 자연수 1, 2, 2, 2 를 일렬로 나열하는 경우

$$\text{의 수는 } \frac{4!}{3!} = 4$$

(i), (ii) 에서 구하는 모든 순서쌍  $(a, b, c, d)$  의 개수는  $12 + 4 = 16$

27. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구한다.

10 장의 카드 중 임의로 카드 4 장을 뽑는 경우의 수는  ${}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$  이다.

$a_1 \times a_2$  의 값이 홀수인 경우는 다음과 같다.

(i) 순서쌍  $(a_1, a_2)$  가 (1, 3) 또는 (1, 5) 또는 (3, 5) 인 경우

$$a_3 + a_4 \geq 16 \text{ 을 만족시키는 순서쌍 } (a_3, a_4) \text{ 는}$$

(6, 10), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (8, 10), (9, 10)

으로 6 가지이다.

이때 구하는 경우의 수는  $3 \times 6 = 18$

(ii) 순서쌍  $(a_1, a_2)$  가 (1, 7) 또는 (3, 7) 또는 (5, 7) 인 경우

$$a_3 + a_4 \geq 16 \text{ 을 만족시키는 순서쌍 } (a_3, a_4) \text{ 는}$$

(8, 9), (8, 10), (9, 10)

으로 3 가지이다.

이때 구하는 경우의 수는  $3 \times 3 = 9$

(i), (ii) 에서 구하는 확률은

$$\frac{18}{210} + \frac{9}{210} = \frac{27}{210} = \frac{9}{70}$$

28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률변수의 평균과 표준편차를 구하는 문제를 해결한다.

곡선  $y = g(x)$  는 곡선  $y = f(x)$  를  $x$  축의 방향으로  $-6$  만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수  $X, Y$  의 표준편차는 같다.

확률변수  $X$  의 평균을  $m$ , 표준편차를  $\sigma$  라 하면 확률변수  $Y$  의 평균은  $m - 6$ , 표준편차는  $\sigma$  이다.

표준정규분포를 따르는 확률변수  $Z$  에 대하여 조건 (가) 에서

$$P(X \leq 11) = P(Y \geq 23)$$

$$P\left(Z \leq \frac{11-m}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{29-m}{\sigma}\right)$$

$$\frac{11-m}{\sigma} = -\frac{29-m}{\sigma} \text{ 에서 } m = 20$$

조건 (나) 에서

$$P(X \leq k) + P(Y \leq k) = 1$$

$$P\left(Z \leq \frac{k-20}{\sigma}\right) + P\left(Z \leq \frac{k-14}{\sigma}\right) = 1$$

$$\frac{k-20}{\sigma} = -\frac{k-14}{\sigma} \text{ 에서 } k = 17$$

$$P(X \leq 17) + P(Y \geq 17)$$

$$= P\left(Z \leq -\frac{3}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right)$$

$$= 2 \times P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq 17) + P(Y \geq 17) = 0.1336 \text{ 에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.0668$$

표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332, \text{ 즉 } P(Z \geq 1.5) = 0.0668$$

$$\frac{3}{\sigma} = 1.5 \text{ 에서 } \sigma = 2$$

$$\text{따라서 } E(X) + \sigma(Y) = m + \sigma = 20 + 2 = 22$$

29. [출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가) 를 만족시키는 함수  $f$  의 개수는

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

(i) 조건 (나) 를 만족시키지 않는 경우

$$f(1) \geq 4 \text{ 인 함수 } f \text{ 의 개수는 } {}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$$

(ii) 조건 (다) 를 만족시키지 않는 경우

$$f(3) - f(1) > 4 \text{ 에서}$$

$$f(1) = 1, f(3) = 6 \text{ 이어야 하므로}$$

$$f(4) = 6, 1 \leq f(2) \leq 6$$

이때 함수  $f$  의 개수는 6

(i), (ii) 를 동시에 만족하는 경우는 없다.

따라서 구하는 함수의 개수는  $126 - (15 + 6) = 105$

30. [출제의도] 조건부확률을 구하는 문제를 해결한다.

[실행 2] 가 끝난 후 주머니 B 에 흰 공이 남아 있지 않은 사건을  $X$ , [실행 1] 에서 주머니 B 에 넣은 공 중 흰 공이 2 개인 사건을  $Y$  라 하자.

(i) [실행 1] 에서 동전의 앞면이 나오고, [실행 2] 가 끝난 후 주머니 B 에 흰 공이 남아 있지 않은 경우

[실행 1] 에서 주머니 B 에 넣은 공이 흰 공 2 개이고, [실행 2] 에서 주머니 A 에 넣은 공이 흰 공 5 개이거나

[실행 1] 에서 주머니 B 에 넣은 공이 흰 공 1 개와 검은 공 1 개이고, [실행 2] 에서 주머니 A 에 넣은 공이 흰 공 4 개와 검은 공 1 개일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_5C_5}{{}_6C_5} + \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_4C_4 \times {}_2C_1}{{}_6C_5}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8}$$

(ii) [실행 1] 에서 동전의 뒷면이 나오고, [실행 2] 가 끝난 후 주머니 B 에 흰 공이 남아 있지 않은

경우

[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 2개와 검은 공 1개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 5개일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2 \times {}_1C_1}{{}_4C_3} \times \frac{{}_5C_5}{{}_7C_5} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{21} = \frac{1}{56}$$

(i), (ii)에서

$$P(X) = \frac{1}{8} + \frac{1}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

$$P(X \cap Y) = \frac{1}{24} + \frac{1}{56} = \frac{10}{168} = \frac{5}{84}$$

그러므로 구하는 확률은

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{5}{84}}{\frac{1}{7}} = \frac{5}{12}$$

따라서  $p=12$ ,  $q=5$ 이므로

$$p+q=17$$

[미적분]

23	①	24	③	25	⑤	26	②	27	④
28	②	29	20	30	12				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

24. [출제의도] 로그함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3} = \frac{f'(0)}{3}$$

$$\frac{f'(0)}{3} = 2 \text{에서 } f'(0) = 6$$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -3 \sin t + \cos t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 \sin t + \cos t}{\cos t + \sin t} \quad (\text{단, } \cos t + \sin t \neq 0)$$

$\frac{dy}{dx} = 3$ 인  $t$ 의 값을  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ )라 하면

$$\cos \alpha = -3 \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{이므로 } \sin^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha > 0 \text{이므로 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$a = \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$b = 3 \cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{따라서 } a+b = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

26. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n} - 2\right)^2} \times \frac{1}{n} = \int_{-2}^{-1} \frac{x+2}{x^2} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1} \\ &= 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

27. [출제의도] 도형 사이의 관계를 이용하여 등비급수의 합을 구한다.

그림  $R_n$ 에서 새로 색칠한 부분의 넓이를  $a_n$ 이라 하자.  $\angle A_n B_n D_n = \theta$ 라 하면

$$\overline{B_1 D_1} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{6})^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{A_n D_n}{B_n D_n} = \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \cos \theta = \frac{1}{5}$$

두 선분  $A_1 G_1$ ,  $G_1 B_2$ 와 호  $B_2 A_1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴  $B_1 B_2 A_1$ 의 넓이에서 삼각형  $A_1 B_1 G_1$ 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \sin \theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{6}}{10}$$

두 선분  $D_2 H_1$ ,  $H_1 F_1$ 과 호  $F_1 D_2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴  $D_1 F_1 D_2$ 의 넓이에서 삼각형  $D_1 F_1 H_1$ 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{20}$$

그러므로

$$a_1 = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{6}}{10}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{20}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{6}}{10} - \frac{1}{20}$$

$$\frac{B_{n+1} D_{n+1}}{B_n D_n} = \frac{B_2 D_2}{B_1 D_1} = \frac{B_1 D_1 - (B_1 B_2 + D_1 D_2)}{B_1 D_1} = \frac{3}{5}$$

두 직사각형  $A_n B_n C_n D_n$ 과  $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 의

$$\text{넓음비는 } 5:3 \text{이므로 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이  $a_1$ 이고 공비가  $\frac{9}{25}$ 인 등비수

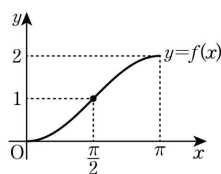
$$\text{열이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{25\pi - 10\sqrt{6} - 5}{64}$$

28. [출제의도] 곡선의 오목과 볼록을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

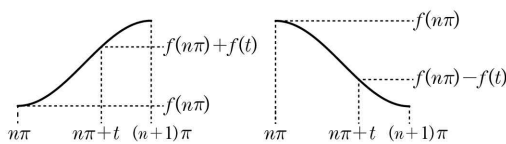
조건 (가)에서 곡선  $y=f(x)$ 는 구간  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서

아래로 볼록이고, 구간  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 에서 위로 볼록이므로

점  $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

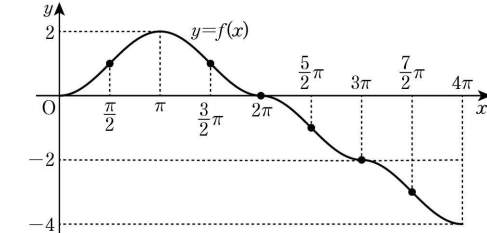


조건 (나)에 의하여  $n\pi < x \leq (n+1)\pi$ 에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0 < x < 4\pi$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(i) 함수  $y=f(x)$ 가  $x=\pi$ 에서 극대일 때

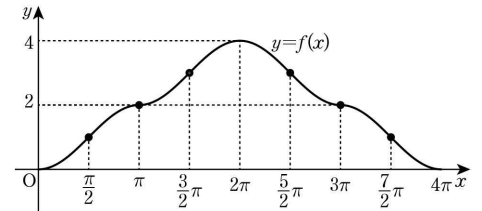


위 그림에서 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점은

$x$  좌표가  $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi, \frac{7}{2}\pi$ 인 점이다.

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} |f(x)| dx &= 4 \int_0^\pi f(x) dx + \pi \times 2 \\ &= 4 \int_0^\pi (1 - \cos x) dx + 2\pi \\ &= 4 \left[ x - \sin x \right]_0^\pi + 2\pi = 6\pi \end{aligned}$$

(ii) 함수  $y=f(x)$ 가  $x=2\pi$ 에서 극대일 때

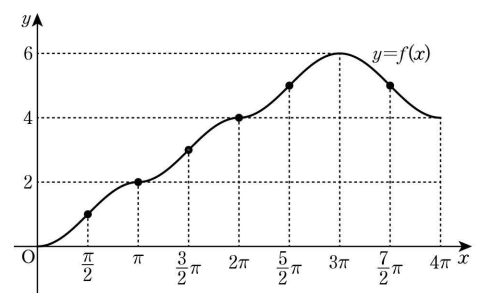


위 그림에서 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점은

$x$  좌표가  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi, \frac{7}{2}\pi$ 인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)| dx = 4 \int_0^\pi f(x) dx + 2\pi \times 2 = 8\pi$$

(iii) 함수  $y=f(x)$ 가  $x=3\pi$ 에서 극대일 때



위 그림에서 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점은

$x$  좌표가  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ 인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)| dx = 4 \int_0^\pi f(x) dx + 2\pi \times 5 = 14\pi$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최솟값은  $6\pi$ 이다.

29. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

$$\angle RBO = \angle BRQ = \frac{1}{2} \angle BOQ = \theta \text{이므로}$$

$$\angle OST = 2\theta, \quad \angle OTS = \pi - 3\theta$$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OS}}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(\pi - 2\theta)}, \quad \overline{OS} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta}$$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OT}}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(\pi - 3\theta)}, \quad \overline{OT} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}$$

$$\angle ROA = 2 \times \angle RBA = 2\theta, \quad \angle TOR = \pi - 4\theta$$

$f(\theta)$  = (부채꼴 ORA의 넓이)

+ (삼각형 OTR의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta + \frac{1}{2} \times 1 \times \overline{OT} \times \sin(\pi - 4\theta)$$

$$= \theta + \frac{\sin \theta \sin 4\theta}{2 \sin 3\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{4 \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta}}{6 \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right)$$

$$= 1 + \frac{4 \times 1 \times 1}{6 \times 1} = \frac{5}{3}$$

$g(\theta)$  = (부채꼴 OPQ의 넓이)

- (삼각형 OST의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \overline{OT} \times \sin \theta$$

$$= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin^3 \theta}{2 \sin 2\theta \sin 3\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^3}{12 \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1^3}{12 \times 1 \times 1} = \frac{5}{12}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}} = \frac{1}{4}$$

따라서  $a = \frac{1}{4}$  이므로  $80a = 80 \times \frac{1}{4} = 20$

30. [출제의도] 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

함수  $g(x)$ 의 한 부정적분을  $G(x)$ 라 하자. 조건 (가)에서

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t) dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t) dt$$

$$G(3a+x) - G(2a) = G(2a+2) - G(3a-x)$$

위 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$g(3a+x) = g(3a-x) \dots \dots \textcircled{1}$$

모든 실수  $x$ 에 대하여  $\textcircled{1}$ 이 성립하므로 함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 직선  $x = 3a$ 에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t) dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t) dt$$

$$= \int_{3a-x}^{4a} g(t) dt + \int_{4a}^{2a+2} g(t) dt$$

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t) dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t) dt \text{ 에서 } \int_{4a}^{2a+2} g(t) dt = 0$$

조건 (가)에서  $g(x) > 0$ 이므로  $2a+2 = 4a, a = 1$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x) = f(x) + f'(x) + 1 = x^2 + px + q$  ( $p, q$ 는 상수)라 하자.

함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 직선  $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로  $g(4) = g(2)$ , 즉  $h(4) = h(2)$

$$16 + 4p + q = 4 + 2p + q \text{ 에서 } p = -6$$

조건 (나)에서  $h(4) = 5$ 이므로

$$16 - 24 + q = 5 \text{ 에서 } q = 13$$

$$h(x) = x^2 - 6x + 13 \text{ 에서}$$

$$h'(x) = f'(x) + f''(x) = f'(x) + 2$$

$$\int_3^5 \{f'(x) + 2\}g(x) dx$$

$$= \int_3^5 \{f'(x) + 2\}g(x) dx = \int_3^5 h'(x) \ln h(x) dx$$

$$= \left[ h(x) \ln h(x) \right]_3^5 - \int_3^5 \left\{ h(x) \times \frac{h'(x)}{h(x)} \right\} dx$$

$$= h(5) \ln h(5) - h(3) \ln h(3) - \{h(5) - h(3)\}$$

$$= 8 \ln 8 - 4 \ln 4 - (8 - 4) = -4 + 16 \ln 2$$

따라서  $m = -4, n = 16$ 이므로

$$m + n = 12$$

[기하]

23	㉓	24	㉕	25	㉗	26	㉙	27	㉛
28	㉝	29	54	30	48				

23. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 중점의 좌표를 계산한다.

선분 AB의 중점이  $xy$ 평면 위에 있으려면 중점의  $z$ 좌표가 0이어야 하므로

$$\frac{-2+a}{2} = 0 \text{ 에서 } a = 2 \text{ 이다.}$$

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 구한다.

타원  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{16 \times 2^2 + 8}, y = 2x \pm 6\sqrt{2}$$

두 직선의  $y$ 절편은 각각  $6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}$ 이다.

따라서  $AB = 12\sqrt{2}$

25. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 벡터의 크기를 구한다.

조건 (가)에서  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

조건 (나)에서  $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = 6$

사각형 ABCD는 평행사변형이면서 두 대각선 AC, BD의 길이가 같으므로 직사각형이다.

따라서  $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$

26. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AH'} \times \overline{BC} = 6 \text{ 에서 } \overline{AH'} = 4$$

$\overline{AH} \perp (\text{평면 BCD}), \overline{AH'} \perp \overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{HH'} \perp \overline{BC}$

두 직각삼각형 BH'H, BCD의 닮음비는 1:3이므로

$$\overline{HH'} = 1, \overline{H'C} = 2$$

$$\overline{HC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \overline{AH} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

따라서 삼각형 AHC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{85}}{2}$$

27. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구한다.

포물선  $x^2 = 8(y+2)$ 에서

초점 F의 좌표는 (0, 0), 준선의 방정식은  $y = -4$

점 P의 좌표를 ( $a, b$ ) ( $a > 0, b > 0$ )이라 하자.

점 P는 포물선 위의 점이므로  $\overline{PF} = \overline{PH}$

$$\overline{PH} + \overline{PF} = 40 \text{ 에서 } \overline{PF} = \overline{PH} = 20$$

$$\overline{PH} = |b - (-4)| = 20 \text{ 에서 } b = 16$$

$$\overline{PF} = \sqrt{a^2 + 16^2} = 20 \text{ 에서 } a = 12$$

점 P(12, 16)은 포물선  $y^2 = 4px$  위의 점이므로

$$16^2 = 48p \text{ 이다.}$$

따라서  $p = \frac{16}{3}$

28. [출제의도] 벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0 \text{ 에서 } \angle COB = 90^\circ, \angle AOC = 30^\circ$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = |\overline{OA}| \times |\overline{OC}| \times \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times |\overline{OC}|$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 24 \text{ 에서 } |\overline{OC}| = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{PQ} = \overline{OP} \cdot (\overline{OQ} - \overline{OP})$$

$$= \overline{OP} \cdot \overline{OQ} - |\overline{OP}|^2$$

$$= \overline{OP} \cdot \overline{OQ} - 16 \dots \dots \textcircled{1}$$

$\overline{OP}$ 와  $\overline{OC}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 이고

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP} \cdot (\overline{OC} + \overline{CQ})$$

$$= \overline{OP} \cdot \overline{OC} + \overline{OP} \cdot \overline{CQ}$$

$$= 16\sqrt{3} \cos \theta + \overline{OP} \cdot \overline{CQ}$$

$\theta = 0^\circ$ 이고 두 벡터  $\overline{OP}, \overline{CQ}$ 의 방향이 같을 때,

$\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값이 최대이므로

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \leq 16\sqrt{3} + 4 \dots \dots \textcircled{2}$$

$\theta = 90^\circ$ 이고 두 벡터  $\overline{OP}, \overline{CQ}$ 의 방향이 반대일 때,

$\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값이 최소이므로

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \geq -4 \dots \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에서

$$-4 - 16 \leq \overline{OP} \cdot \overline{PQ} \leq 16\sqrt{3} + 4 - 16$$

$$M = 16\sqrt{3} - 12, m = -20$$

따라서  $M+m = 16\sqrt{3} - 32$

29. [출제의도] 이차곡선의 접선을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 6$ 에서 점 P는 두 초점이  $F_1(4, 0), F_2(-6, 0)$ 이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이다. 쌍곡선의 중심의 좌표는 (-1, 0)이므로

쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \dots \dots \textcircled{1}$$

점 P는 포물선  $y^2 = 16x$ 와 쌍곡선 ①의 교점이므로

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{16x}{16} = 1, x^2 - 7x - 8 = 0,$$

$$(x-8)(x+1) = 0, x = 8 \text{ 또는 } x = -1$$

제1사분면 위의 점 P의 좌표는 (8,  $8\sqrt{2}$ )이다.

포물선  $y^2 = 16x$  위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$$8\sqrt{2}y = 8(x+8), \text{ 즉 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+8) \dots \dots \textcircled{2}$$

이므로 점  $F_3$ 의 좌표는 (-8, 0)이다.

두 점  $F_1(4, 0), F_3(-8, 0)$ 을 초점으로 하는 타원의 꼭짓점은  $x$ 축 또는 직선  $x = -2$  위에 있다.

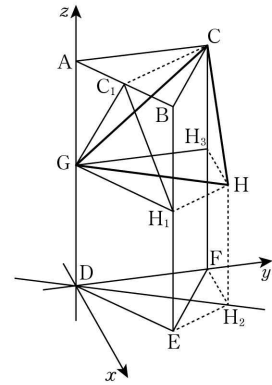
이때 선분  $PF_3$  위에 있는 꼭짓점은 직선  $x = -2$  위에 있으므로 ②에  $x = -2$ 를 대입하면  $y = 3\sqrt{2}$

이 타원의 단축의 길이는  $6\sqrt{2}$ 이고 두 초점 사이의 거리는 12이다.

따라서  $a^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 = 54$

30. [출제의도] 평면과 직선의 위치 관계를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

그림은 정삼각기둥 ABC-DEF를 좌표공간에 나타낸 것이다.



두 점 C, H의 평면 ADEB 위로의 정사영을 각각  $C_1, H_1$ 이라 하자.

$$\overline{AC_1} = 2, \overline{AG} = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{GC_1} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \angle AGC_1 = 30^\circ$$

조건 (가)에서 삼각형  $GH_1C_1$ 은 정삼각형이므로

$$\angle C_1GH_1 = 60^\circ, \overline{GH_1} = 4$$

조건 (나)를 만족시키려면 점  $H_1$ 은 점 G에서 선분 BE에 내린 수선의 발과 일치해야 한다.

점 H의 평면 DEF 위로의 정사영을  $H_2$ 라 하자.

조건 (나)에서 삼각형 CGH의 평면 DEF 위로의 정사영인 삼각형  $FDH_2$ 의 내부와 삼각형 DEF의 내부

의 공통부분의 넓이가 삼각형 DEF의 넓이의  $\frac{1}{2}$ 인

$$2\sqrt{3} \text{ 이므로 직선 } DH_2 \text{는 선분 } EF \text{의 중점을 지난다.}$$

그러므로 두 삼각형  $DEH_2, DFH_2$ 가 합동이고

$$\angle DEH_2 = 90^\circ \text{ 이므로 } \angle DFH_2 = 90^\circ \text{ 이다.}$$

점 H의 평면 ADFC 위로의 정사영을  $H_3$ 이라 하면

점  $H_3$ 은 점 G에서 선분 CF에 내린 수선의 발과 일치한다.

그러므로 삼각형 CGH의 평면 ADFC 위로의 정사영인 삼각형  $CGH_3$ 의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

따라서  $S^2 = 48$