2020학년도 수시모집
자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	평균과 분산, 다항식의 정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

㈜한국음료에서는 사과주스를 경기, 대구 두 공장에서 전량 생산하고 있다. 각 공장에서 하루 동안 생산되는 사과주스 병의 총 개수 및 병당 사과주스 양의 평균과 분산은 다음과 같다.

	경기공장	대구공장
사과주스 병의 총 개수	n_a	n_b
병당 사과주스 양의 평균	m_a	m_b
병당 사과주스 양의 분산	σ_a^2	σ_b^2

※ 참고: 공장 별 하루 동안의 생산 기준이며, $n_a > 0$, $n_b > 0$이다.

(1) 두 공장 전체(즉, 경기공장과 대구공장)에서 하루 동안 생산되는 병당 사과주스 양의 평균을 구하시오.

(2) 두 공장 전체에서 하루 동안 생산되는 병당 사과주스 양의 분산을 다음과 같은 형태로 표현하고자 한다. n_a, n_b, m_a, m_b만을 이용하여 빈 칸 ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 식을 각각 구하시오.

$$(\quad ㉠ \quad)\times\sigma_a^2 + (\quad ㉡ \quad)\times\sigma_b^2 + \frac{n_a n_b}{(n_a+n_b)^2}\times(\quad ㉢ \quad)$$

(3) ㈜한국음료에서는 각 개별 공장의 병당 사과주스 양의 평균을 조절하려고 한다. 이 경우, 두 공장 전체에서 생산되는 병당 사과주스 양의 분산을 최소화하기 위한 방법을 서술하고, 이때의 분산을 구하시오. 단, 각 개별 공장을 기준으로 평균 변화에 따른 사과주스 병의 개수와 병당 사과주스 양의 분산은 변화가 없다.

3. 출제 의도

최근 다양한 산업분야에 활용중인 데이터 분석 기술에 기초적으로 활용될 수 있는 통계지식인 평균과 분산 개념을 숙지하고 있는지 평가한다. 이를 위해 모평균과 모분산의 개념, 그리고 모분산과 모평균과의 관계에 대한 이해를 다항식의 정리를 통한 수식 정리 능력과 함께 종합적으로 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(70쪽) ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(70쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(145쪽) 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.(145쪽) 확통1312-2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.(145쪽)
문항 (1)	1	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(70쪽) ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(70쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(145쪽) 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.(145쪽)
문항 (2)	1	교육과정	[수학 I] - (가) 다항식 - $\boxed{1}$ 다항식의 연산 ① 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.(50쪽) ② 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.(50쪽)
		성취기준·성취수준	[수학 I] - (1) 다항식 - (가) 다항식의 연산 수학1111. 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.(43쪽) 수학1112-1. 다항식의 곱셈을 할 수 있다.(43쪽)

		수학1112-2. 다항식의 나눗셈을 할 수 있다.(43쪽)
2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(70쪽) ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(70쪽)
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(145쪽) 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.(145쪽) 확통1312-2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.(145쪽)

문항 (3)

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정	[수학 I] - ㈏ 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 ③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(51쪽)
	성취기준·성취수준	[수학 I] - (2) 방정식과 부등식 - (나) 이차방정식과 이차함수 수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(47쪽)
2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(70쪽)
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1312-2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.(145쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2014	97-103, 126-128
	확률과 통계	이강섭 외	미래엔	2014	99-103, 120-123
	확률과 통계	정상권 외	금성출판사	2014	126-133, 156-157
	확률과 통계	황선욱 외	좋은책신사고	2014	101-105, 128-132
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	14-21
	수학 I	이준열 외	천재교육	2014	12-20

5. 문항 해설

(1)~(2) 2개의 모집단이 존재하고, 각 모집단의 평균과 분산이 주어졌을 때, 2개의 모집단 전체의 평균과 분산을 묻는 문항이다. 이는 각각의 모집단 내 원소의 개수 및 변량 정보를 이용하여 구할 수 있으며, 추가로 전체 분산의 경우에는 공식 $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$ 및 다항식의 정리기법을 활용하여 구할 수 있다.

(3) (2)의 결과에서 정리된 식(즉, 전체 모집단의 분산값)을 보면, 해당 식이 최소값이 되기 위해서 각 모집단의 평균을 같은 값을 갖도록 조절해야 함을 알 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	풀이과정 및 모평균 식을 제대로 구한 경우 (4점) 풀이과정 없이 모평균 식만 구한 경우 (2점)	4
(2)	㉠, ㉡은 각각 2점씩, ㉢은 4점 부여 풀이과정이 없는 경우 (2)번 획득 점수의 50%만 부여	8
(3)	평균이 같아야 한다고 서술하였으나 이때 분산을 구하지 못함 (1점) 평균이 같아야 한다고 서술하고 이때 분산을 정확하게 구함 (8점)	8

7. 예시 답안

(1) 경기공장에서 생산되는 사과주스 병 i 의 양을 X_i, 대구공장에서 생산되는 사과주스 병 i의 양을 Y_i 라고 할 경우,

$m_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_a} X_i}{n_a}$, $m_b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_b} Y_i}{n_b}$ 로 표현할 수 있다.

이때, 두 공장 전체(즉, 경기공장과 대구공장)에서 하루 동안 생산되는 병당 사과주스 양의 평균은 전체 공장에서 생산되는 사과주스 양의 총합을 전체 공장에서 생산되는 사과주스의 개수로 나누어 구할 수 있다. 즉, 경기공장에서 생산되는 사과주스 양의 총합 = $\sum_{i=1}^{n_a} X_i = n_a m_a$, 대구공장에서 생산되는 사과주스 양의 총합 = $\sum_{i=1}^{n_b} Y_i = n_b m_b$ 이고, 전체 공장에서 생산되는 사과주스의 개수는 $n_a + n_b$이므로, 전체 공장의 모평균은 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_a} X_i + \sum_{i=1}^{n_b} Y_i}{n_a + n_b} = \dfrac{n_a m_a + n_b m_b}{n_a + n_b}$ 이 된다.

(2)

$$(\ ㉠ \ )\sigma_a^2 + (\ ㉡ \ )\sigma_b^2 + \frac{n_a n_b}{(n_a + n_b)^2}(\quad ㉢ \quad)$$

경기공장과 대구공장의 분산은 각각

$\sigma_a^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_a} (X_i)^2}{n_a} - (m_a)^2$, $\sigma_b^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_b} (Y_i)^2}{n_b} - (m_b)^2$ 로 표현될 수 있고,

공식 $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$ 을 활용하여,

$$\begin{aligned}
\sigma_{a \cup b}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_a} (X_i)^2 + \sum_{i=1}^{n_b} (Y_i)^2}{n_a + n_b} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_a} X_i + \sum_{i=1}^{n_b} Y_i}{n_a + n_b} \right)^2 \\
&= \frac{n_a(\sigma_a^2 + (m_a)^2) + n_b(\sigma_b^2 + (m_b)^2)}{n_a + n_b} - \left(\frac{n_a m_a + n_b m_b}{n_a + n_b} \right)^2 \\
&= \frac{n_a}{n_a + n_b}\sigma_a^2 + \frac{n_b}{n_a + n_b}\sigma_b^2 + \frac{n_a n_b}{(n_a + n_b)^2}(m_a - m_b)^2
\end{aligned}$$

즉 ㉠ = $\dfrac{n_a}{n_a + n_b}$, ㉡ = $\dfrac{n_b}{n_a + n_b}$, ㉢ = $(m_a - m_b)^2$

(3) 각 공장별로 생산하는 사과주스 병의 개수와 병당 사과주스 양의 분산은 변화하지 않으므로, (2) 결과의 1, 2번째 항은 변하지 않는다. 3번째 항에 포함되어 있는 각 공장별 병당 사과주스 양의 평균값(즉, m_a,m_b)은 조절이 가능하므로, 이 값을 조절하여 전체 분산 식을 최소로 만들면 된다. 이때, 이 3번째 항은 언제나 0보다 크거나 같기 때문에, 이를 최소로 만드는 방법은 m_a와 m_b 를 같게 하는 방법이며, 이렇게 하면 해당 항을 0으로 만들 수 있다. 즉, 두 공장에서 생산하는 병당 주스 양의 평균을 같도록 조절한다. 이때 분산은 다음과 같다.

$$\frac{n_a}{n_a+n_b}\sigma_a^2+\frac{n_b}{n_a+n_b}\sigma_b^2$$

4 자연계열 논술고사 (서울캠퍼스)

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제 2
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 미적분 I, 확률과 통계, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	이차함수의 최대·최소, 벡터의 연산, 함수의 그래프, 함수의 증가·감소
예상 소요 시간		40분 / 전체 120분

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

(가) n개의 수 $a_1, a_2, \dots, a_n$이 주어졌을 때, 이들을 대표하는 값으로는 평균, 중앙값 등이 있고 분산은 이들이 평균으로부터 얼마만큼 벗어나 있는지를 나타내는 양이다.

(나) 수직선 위의 두 점 a_1, a_2 사이의 거리는 $|a_1 - a_2|$ 이다.

(다) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}_1(a_1, b_1), \mathrm{P}_2(a_2, b_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2}$$ 이다.

(1) 수직선 위의 점 x와 주어진 n개의 점 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 사이의 거리의 제곱의 합을 $f(x)$라 하자. 즉, $f(x) = |x-a_1|^2 + |x-a_2|^2 + \cdots + |x-a_n|^2$ 이다. 이때, $f(x)$가 최소가 되는 점 $x=a$를 구하고, 위 제시문 (가)를 참고하여 a와 $f(a)$를 설명하시오.

(2) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 주어진 n개의 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ 사이의 거리의 제곱의 합 $\overline{\mathrm{PP}_1}^2 + \overline{\mathrm{PP}_2}^2 + \cdots + \overline{\mathrm{PP}_n}^2$이 점 $\mathrm{P}=\mathrm{P}_0$에서 최소가 된다고 하자. 이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$를 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$, ..., $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ 을 이용하여 나타내고, $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n}$ 을 구하시오. 단, O는 좌표평면의 원점이다.

(3) 수직선 위의 점 x와 주어진 n개의 점 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 사이의 거리의 합을 $g(x)$라 하자. 즉, $g(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|$ 이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리고, 이 함수가 미분가능한 각 구간에서 그래프의 기울기를 각각 구하시오. 또한 $g(x)$가 최소가 되는 점 x를 모두 구하시오. 단, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 이다. (힌트: n이 홀수와 짝수인 경우를 나누어 각각 구하시오.)

3. 출제 의도

주어진 n개의 점으로부터 거리의 (또는 거리의 제곱의) 합이 최소가 되는 점을 찾을 수 있는지 평가한다. 이 문제는 수직선 또는 좌표평면 위의 점들을 고려하는가, 그리고 거리의 제곱의 합 또는 거리의 합을 고려하는가에 따라 다양한 경우가 있으며 각각의 경우 요구되는 문제를 적절히 해결할 수 있는지 평가한다.

(1) 수직선 위의 n개의 점으로부터 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점을 찾을 수 있는지 평가한다. 거리의 제곱의 합이 이차함수임을 파악하고 최솟값을 취하는 점을 구할 수 있는지 평가한다. 이 점과 최솟값을 주어진 수들의 평균, 분산과 연관지을 수 있는지 평가한다.

(2) 좌표평면 위의 n개의 점으로부터 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점을 찾을 수 있는지 평가한다. 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점의 x, y좌표를 (1)의 결과를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 위치벡터의 뜻을 알고 벡터의 연산을 수행할 수 있는지 평가한다.

(3) 수직선 위의 n개의 점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 점을 찾을 수 있는지 평가한다. 함수의 그래프의 개형을 그리고 함수의 증감을 파악하여 최솟값을 취하는 점을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

<table>
<tr><td rowspan="8">제시문</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표
① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(52쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표
수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(50쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
① 수열의 뜻을 안다.(61쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열
수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.(107쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(70쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포
확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.(145쪽)
확통1312-2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.(145쪽)</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="9">문항 (1)</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅰ] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수
③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(51쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학Ⅰ] - (2) 방정식과 부등식 - (나) 이차방정식과 이차함수
수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(47쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표
① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(52쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표
수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(50쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
① 수열의 뜻을 안다.(61쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열
수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.(107쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포
② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(70쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포
확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.(145쪽)
확통1312-2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.(145쪽)</td></tr>
</table>

문항		과목명	교육과정 및 성취기준
문항 (2)	1	교육과정	[수학Ⅰ] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 ③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(51쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅰ] - (2) 방정식과 부등식 - (나) 이차방정식과 이차함수 수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(47쪽)
	2	교육과정	[수학Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(52쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(50쪽)
	3	교육과정	[수학Ⅱ] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 ① 수열의 뜻을 안다.(61쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.(107쪽)
	4	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - $\boxed{2}$ 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.(96쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (나) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.(276쪽)
문항 (3)	1	교육과정	[수학Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(52쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.(50쪽)
	2	교육과정	[수학Ⅱ] - (다) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 ① 수열의 뜻을 안다.(61쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.(107쪽)
	3	교육과정	[미적분Ⅰ] - (다) 다항함수의 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(79쪽) ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(79쪽)
		성취기준· 성취수준	[미적분Ⅰ] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(185쪽) 미1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(185쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2014	73-74
	수학 I	이준열 외	천재교육	2014	78-79
	미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	151-153
	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	145-147
	확률과 통계	김창동 외	㈜교학사	2014	119-120
	확률과 통계	황선욱 외	좋은책신사고	2014	101-102
	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014	57-60, 73-78
	기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2014	78-79, 83-85

5. 문항 해설

(1) 수직선 위의 점 x와 주어진 n개의 점 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 사이의 거리의 제곱의 합 $f(x) = |x-a_1|^2 + |x-a_2|^2 + \cdots + |x-a_n|^2 = (x^2 - 2a_1x + a_1^2) + \cdots + (x^2 - 2a_nx + a_n^2)$ 는 이차함수이다. 도함수를 이용하거나 이차식을 완전제곱꼴로 정리하면 $f(x)$는 $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, 즉, $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 평균에서 최솟값을 취하고, 이를 대입하면 최솟값은 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 분산의 n배임을 알 수 있다.

(2) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 주어진 n개의 점 $\mathrm{P}_1(a_1,b_1), \mathrm{P}_2(a_2,b_2), \cdots, \mathrm{P}_n(a_n,b_n)$ 사이의 거리의 제곱의 합은

$$\overline{\mathrm{PP_1}}^2 + \overline{\mathrm{PP_2}}^2 + \cdots + \overline{\mathrm{PP_n}}^2$$
$$= \left\{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2\right\} + \left\{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2\right\} + \cdots + \left\{(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2\right\}$$
$$= \left\{(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2\right\} + \left\{(y-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + \cdots + (y-b_n)^2\right\}$$ 이다.

문항 (1)의 풀이에서와 같이 위 식의 두 대괄호안의 식은 각각 $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, $y = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ 에서 최솟값을 취한다. 따라서 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점 P_0의 위치벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)$$ 이고

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right) - n\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = n\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} - n\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \vec{0}$$ 이다.

(3) 수직선 위의 점 x와 주어진 n개의 점 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 사이의 거리의 합은

$g(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$ 이다. $a_1, a_2, \ldots, a_n$로 나누어진 수직선의 구간별로,

즉, $x \le a_1$, $a_1 \le x \le a_2$, $a_2 \le x \le a_3$, … , $a_n \le x$ 에서 각각 $g(x)$의 식을 정리하면 $g(x)$의 그래프는 위의 각 구간에서 기울기가 $-n, -n+2, -n+4, \ldots, n$인 꺾은선 그래프임을 알 수 있다. 이로부터 $n = 2m+1$이 홀수일 경우, $g(x)$는 $x = a_{m+1}$에서 최솟값을 취하고, $n = 2m$이 짝수일 경우, $g(x)$는 $a_m \le x \le a_{m+1}$인 모든 x에서 최솟값을 취함을 알 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	함수 $f(x)$가 최소가 되는 점을 구하고 과정을 설명함 (3점) 함수가 최소가 되는 점과 이때 최솟값이 각각 평균, 분산$\times n$ 임을 적음 (1점)	4
(2)	거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점 $\mathrm{P_0}$의 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$를 구하고 $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$, ..., $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$를 이용하여 나타내었으며 그 과정을 설명함 (4점) $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} + \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{P_0P}_n} = \vec{0}$ 임을 설명함 (3점)	7
(3)	$n+1$개의 구간 $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \cdots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)$으로 나누어 각 구간에서 $g(x)$의 그래프의 기울기를 구하고 설명함 (3점) n이 홀수일 경우, 그래프의 개형을 그리고 $g(x)$가 최소가 되는 점을 구하고 설명함 (3점) n이 짝수일 경우, 그래프의 개형을 그리고 $g(x)$가 최소가 되는 점을 모두 구하고 설명함 (3점)	9

7. 예시 답안

(1) $f(x) = (x^2 - 2a_1x + a_1^2) + \cdots + (x^2 - 2a_n + a_n^2) = nx^2 - 2(a_1 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + \cdots a_n^2)$ 은

최고차항계수가 양수인 이차함수이므로 $f'(x) = 2nx - 2(a_1 + \cdots + a_n) = 0$ 인 점에서 최솟값을 취한다. 즉, $x = a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 에서 최솟값을 취한다.

a는 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 평균이며, 따라서

$f(a) = (a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \cdots + (a_n - a)^2$ 는 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 분산$\times n$ 이다.

(별해)

$$f(x) = (x^2 - 2a_1x + a_1^2) + \cdots + (x^2 - 2a_n + a_n^2) = nx^2 - 2(a_1 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + \cdots a_n^2)$$

$$= n\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + (a_1^2 + \cdots a_n^2) - n\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$$

이므로 $x = a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 에서 최솟값을 취한다.

a는 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 평균이며, 이때

$\dfrac{1}{n}f(a) = \dfrac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - a^2$ 은 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 분산이므로 $f(a)$는 분산$\times n$ 이다.

(2) 주어진 점들의 좌표를 $\mathrm{P}_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1), \mathrm{P}_2(a_2, b_2), \cdots, \mathrm{P}_n(a_n, b_n)$라 하자.

$\overline{\mathrm{PP}_1}^2 + \overline{\mathrm{PP}_2}^2 + \cdots + \overline{\mathrm{PP}_n}^2$

$= \left\{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2\right\} + \left\{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2\right\} + \cdots + \left\{(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2\right\}$

$= \left\{(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2\right\} + \left\{(y-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + \cdots + (y-b_n)^2\right\}$

(1)의 풀이에 의해서 첫 번째 대괄호 안의 식은 $x = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 에서 최솟값을 취하고, 마찬가지로 두 번째 대괄호 안의 식은 $y = \dfrac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ 에서 최솟값을 취한다. 따라서 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점 P_0의 위치벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)$ 이다.

이때,

$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_\mathrm{n}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right)$

$= \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right) - n\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = n\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} - n\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \vec{0}$ 이다.

(3) $x \le c$ 이면 $|x-c| = -(x-c)$ 이고, $c \le x$ 이면 $|x-c| = (x-c)$ 이다. 따라서

$x \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 이면,

$g(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|$

$\quad = -(x-a_1) - (x-a_2) - \cdots - (x-a_n) = -nx + (a_1 + \cdots + a_n)$

$a_1 \le x \le a_2 < \cdots < a_n$ 이면,

$g(x) = (x-a_1) - (x-a_2) - \cdots - (x-a_n) = (-n+2)x + (-a_1 + \cdots + a_n)$

$a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le x \le a_{k+1} < \cdots < a_n$ 이면 (단, $1 \le k \le n-1$),

$g(x) = (x-a_1) + \cdots + (x-a_k) - (x-a_{k+1}) - \cdots - (x-a_n) = (-n+2k)x + (-a_1 - \cdots + a_n)$

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \le x$ 이면,

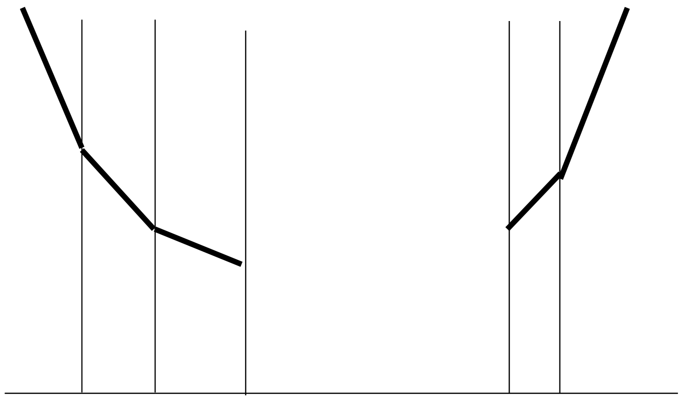
$g(x) = (x-a_1) + (x-a_2) + \cdots + (x-a_n) = nx + (-a_1 - \cdots - a_n)$ 이다.

즉 $y = g(x)$의 그래프는 꺾은선 그래프이고

각 구간 $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \cdots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)$에서 기울기는

$-n, -n+2, -n+4, \cdots, n$ 이다. (기울기는 $-n$부터 n까지 2씩 증가)

전체적인 그래프의 개형은 다음과 같다.



기울기

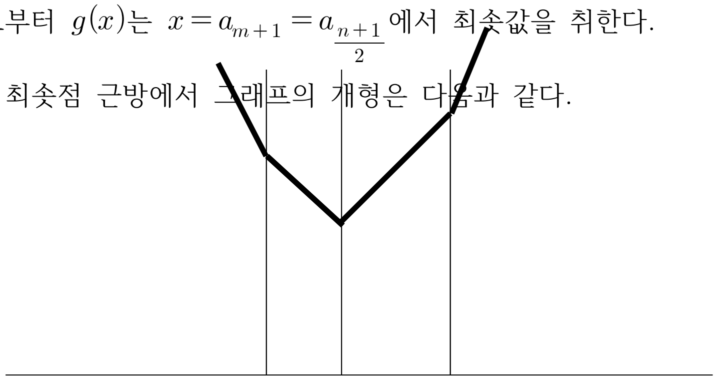
$-n$ $-n+2$ $-n+4$ $\cdots$ $n-2$ n

a_1 a_2 a_3 $\cdots$ a_{n-1} a_n

$n=2m+1$이 홀수이면 각 구간에서 기울기는 $-n, -n+2, \cdots, -1, 1, \cdots, n$ 이고

구간 (a_m, a_{m+1}), (a_{m+1}, a_{m+2})에서 그래프의 기울기가 각각 $-1, 1$ 이므로 함수의 증감으로부터 $g(x)$는 $x=a_{m+1}=a_{\frac{n+1}{2}}$에서 최솟값을 취한다.

최솟점 근방에서 그래프의 개형은 다음과 같다.



기울기

… -3 -1 1 3 …

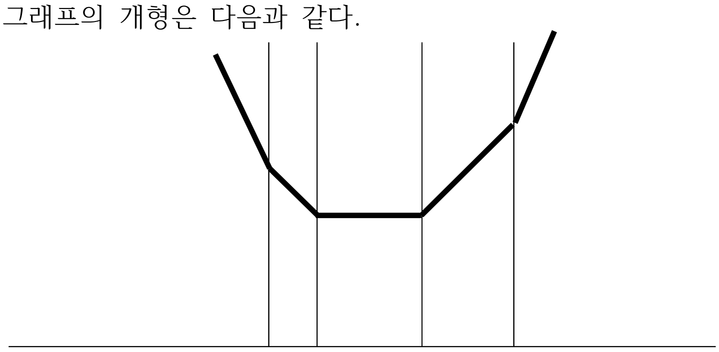
$\cdots$ a_m a_{m+1} a_{m+2} $\cdots$ $(a_{m+1}=a_{\frac{n+1}{2}})$

(※ 만약 홀수 n을 $n=2m+1$이 아니라 $n=2m-1$로 나타냈을 경우

$g(x)$는 $x=a_m=a_{\frac{n+1}{2}}$에서 최솟값을 취한다.

$n=2m$이 짝수이면 각 구간에서 기울기는 $-n, -n+2, \cdots, -2, 0, 2, \cdots, n$ 이고

구간 (a_m, a_{m+1})와 그 왼쪽, 오른쪽 구간에서 그래프의 기울기가 각각 $0, -2, 2$ 이므로 함수의 증감으로부터 $g(x)$는 $a_m \le x \le a_{m+1}$인 모든 x에서 최솟값을 취한다. 최솟점 근방에서 그래프의 개형은 다음과 같다.



기울기

… -4 -2 0 2 4 …

… a_{m-1} a_m a_{m+1} a_{m+2} $(a_m = a_{\frac{n}{2}})$

5 자연계열 논술고사 (서울캠퍼스)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	조합, 이항계수, 일대일대응
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

(가) 숫자 1, 2로 만들 수 있는 자연수 x에 대하여, x를 구성하는 숫자들의 재배열로 만들 수 있는 모든 수들을 생각하자. 이 수들을 작은 수부터 큰 수의 순으로 늘어놓을 때 x의 순위를 $r(x)$라 하자. 예를 들어, $x=1211$인 경우, 숫자 $1, 2, 1, 1$을 재배열하여 얻어지는 수들을 크기순으로 늘어놓으면

$$1112, 1121, 1211, 2111$$

이고, 1211은 세 번째이므로 $r(1211)=3$이다. 또한, 숫자 1과 2로 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중 숫자 2가 두 번 나오는 수들을 크기순으로 늘어놓으면

$$11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211, 21112, 21121, 21211, 22111$$

이고, 예를 들어, $r(11122)=1$, $r(11221)=3$, $r(22111)=10$이다.

(나) 위와 같이 숫자 1과 2로 만들 수 있는 n자리 자연수 중 숫자 2의 개수가 k인 자연수들의 집합을 A라 하자. A의 원소들 중 숫자 1로 시작하는 수들의 집합을 A_1, 숫

자 2로 시작하는 수들의 집합을 A_2라고 하자. 예를 들어, $n=5$, $k=2$인 경우,

$$A_1 = \{11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211\},$$
$$A_2 = \{21112, 21121, 21211, 22111\}$$

이다. 이때, $0 \le k \le n$인 임의의 n과 k에 대하여, 아래와 같은 사실을 알 수 있다.

(a) $A = A_1 \cup A_2$이고, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
(b) $x \in A_1$, $y \in A_2$이면, $x < y$이다.

(1) 순위 $r(1221)$과 $r(222)$의 값을 각각 구하시오.

(2) 임의의 n과 k에 대하여($0 \le k \le n$), 제시문 (나)에 기술한 A의 원소의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_k$이다. 이때, A의 부분집합 A_1과 A_2의 원소의 개수를 각각 구하시오.

(3) 순위 $r(2112211) = 26$이다. 이 사실과 제시문 (나)의 (a)와 (b)의 사실을 참고하여 $r(12112211)$의 값을 구하시오.

(4) 순위 $r(1122111) = 10$이다. 이 사실과 제시문 (나)의 (a)와 (b)의 사실을 참고하여 $r(21122111)$의 값을 구하시오.

(5) 순위 $r(1221121112)$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

이항계수를 정의하는 기본적인 성질(${}_{n}C_{l} = {}_{n-1}C_{l} + {}_{n-1}C_{l-1}$)과 그에 대응하는 조합으로 이루어진 집합의 기본적인 성질을 이해하는지 평가한다. 이를 바탕으로 위와 같은 조합으로 이루어진 집합사이의 자연스런 대응관계, 특히 일대일 대응을 이해하고 응용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

구분		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정	[수학Ⅱ] - ㈎ 집합과 명제 - [1] 집합 ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(59쪽) ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.(60쪽) ③ 집합의 연산을 할 수 있다.(60쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합 수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(103쪽) 수학2112. 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.(103쪽) 수학2113. 집합의 연산을 할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정	[확률과통계] - ㈎ 순열과 조합 - [2] 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(68쪽)
		성취기준· 성취수준	[확률과통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(139쪽) 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(139쪽)
문항 (1)	1	교육과정	[수학Ⅱ] - ㈎ 집합과 명제 - [1] 집합 ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(59쪽)
		성취기준· 성취수준	[수학Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합 수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - ㈎ 순열과 조합 - [2] 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(68쪽)
		성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(139쪽) 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(139쪽)

문항		과목명	교육과정 및 성취기준
문항 (2)	1	교육과정	[수학Ⅱ] - ㈎ 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(59쪽) ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.(60쪽) ③ 집합의 연산을 할 수 있다.(60쪽)
		성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합 수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(103쪽) 수학2112. 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.(103쪽) 수학2113. 집합의 연산을 할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - ㈎ 순열과 조합 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(68쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(139쪽)
문항 (3)	1	교육과정	[수학Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(59쪽)
		성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합 수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정	[수학Ⅱ] - (나) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 ① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.(60쪽)
		성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (2) 함수 - (가) 함수 수학2211. 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.(105쪽)
	3	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(68쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(139쪽) 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(139쪽)
문항 (4)	1	교육과정	[수학Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합 ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(59쪽)
		성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합 수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정	[수학Ⅱ] - (나) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 ① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.(60쪽)
		성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (2) 함수 - (가) 함수 수학2211. 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.(105쪽)
	3	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(68쪽)

<table>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td></td><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합
확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(139쪽)
확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(139쪽)</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>문항 (5)</td><td><table>
<tr><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - 1 집합
① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(59쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합
수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.(103쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합
① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(68쪽)
② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(68쪽)</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합
확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.(139쪽)
확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.(139쪽)</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외	동아출판	2014	52-57
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2014	29-32
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2014	35-38
	수학 II	조도연 외	경기도교육청	2014	16-31, 70-76
	수학 II	김창동 외	교학사	2014	12-34, 66-72
	수학 II	이강섭 외	미래엔	2014	10-35, 71-75

5. 문항 해설

(1) 제시문 (가)에 주어진 순위의 정의를 이해하여, 숫자 1과 2로 이루어진 비교적 작은 크기의 수에 대하여 순위를 구한다.

(2) 제시문 (나)에 기술한 집합 A와 그 부분집합 A_1과 A_2의 원소의 개수를 이항계수의 성질 (${}_nC_l = {}_{n-1}C_l + {}_{n-1}C_{l-1}$)과 연관하여 구하는 문제이다.

(3) 제시문 (나)의 (a)와 (b)의 사실을 이용하여, 숫자 1과 2로 이루어진 자연수 x와 y에 대하여, x가 y의 앞에 숫자 1을 붙인 수인 경우,

$$r(x) = r(y)$$

임을 알 수 있는데, $y=2112211$인 경우에 대하여 계산하는 문제이다.

(4) 제시문 (나)의 (a)와 (b)의 사실을 이용하여, 숫자 1과 2로 이루어진 자연수 x와 y에 대하여, x가 y의 앞에 숫자 2를 붙인 수인 경우, y의 자리수 m과 y에 숫자 2가 나오는 횟수 k에 대하여,

$$r(x) = {}_{m}\mathrm{C}_{k+1} + r(y)$$

임을 알 수 있는데, $y=21122111$인 경우에 대하여 계산하는 문제이다.

(5) 위 (3)과 (4)의 성질을 반복적으로 이용하여 주어진 수의 순위를 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$r(1221)$의 값을 구하고 이 과정을 설명함 (1점) $r(222)$의 값을 구하고 이 과정을 설명함 (1점)	**2**
(2)	$k=0$과 $k=n$인 경우, A_1과 A_2의 원소의 개수를 구하고 설명함 (1점) $0<k<n$인 경우, A_1과 A_2의 원소의 개수를 구하고 설명함 (2점)	**3**
(3)	해답의 집합 B와 집합 A_1사이의 순서를 보존하는 일대일 대응을 설명하고 순위 $r(12112211)=r(2112211)$를 이용하여 $r(12112211)$를 구함 (4점)	**4**
(4)	해답의 집합 B와 집합 A_2사이의 순서를 보존하는 일대일 대응을 설명하고 순위 $r(21122111) = {}_{7}\mathrm{C}_{3} + r(1122111)$를 이용하여 $r(21122111)$를 구함 (4점)	**4**
(5)	(3)과 (4)의 방법을 반복적으로 적용하여 $r(1221121112)$를 구함 (7점)	**7**

7. 예시 답안

(1) 숫자 2가 두 번 나오는 네 자리 자연수들을 크기 순서로 늘어놓으면

$1122,\ 1212,\ 1221,\ 2112,\ 2121,\ 2211$

이므로, $r(1221)=3$이다.

숫자 2만 세 번 나오는 경우, 한 가지 수 222만 나오므로 $r(222)=1$이다.

(2) $k=0$인 경우, 즉 A의 원소가 숫자 1로만 이루어진 경우, A는 하나의 원소만 가지고, $A=A_1,\ A_2=\varnothing$이다. 이때, A_1과 A_2의 원소의 개수는 각각 1, 0이다. 또한, $n=k$인 경우, 즉 A의 원소가 숫자 2로만 이루어진 경우, 비슷하게, $A_1=\varnothing$이고, A_1과 A_2의 원소의 개수

는 각각 0, 1이다.

위의 두 경우를 제외한 경우, 즉 $0 < k < n$인 경우, 집합 A_1은 숫자 2의 개수가 k인 $(n-1)$자리 자연수들의 집합이므로 ${}_{n-1}\mathrm{C}_k$개의 원소를 가진다. 또한, 이 경우, 집합 A_2는 숫자 2의 개수가 $k-1$인 $(n-1)$자리 자연수들의 집합이므로 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$개의 원소를 가진다.

(3) 숫자 2가 세 번 나오는 일곱 자리 자연수들의 집합을 B라 하면, $2112211 \in B$이다. 이 수에 숫자 1을 앞에 붙인 여덟 자리 자연수 12112211의 순위를 다음과 같이 계산한다.

숫자 2가 세 번 나오는 여덟 자리 자연수들의 집합을 A, 그중 1로 시작하는 수의 집합이 A_1이라 하면, $12112211 \in A_1 \subset A$이다. B의 각 원소의 앞에 숫자 1을 붙이면 A_1의 원소가 되고, 거꾸로 A_1의 원소의 앞의 숫자 1을 떼면 B의 원소가 되므로, 이 대응은 A_1과 B사이의 일대일 대응이고, 순서를 보존한다. 제시문 (나)의 (a)와 (b)에 의해 A_1의 원소들은 순위가 1부터 시작하므로, 이 대응관계는 순위를 보존한다. 즉,

$$r(12112211) = r(2112211) = 26$$

이다.

(4) 숫자 2가 두 번 나오는 일곱 자리 자연수들의 집합을 B라 하면, $1122111 \in B$이다. 이 수에 숫자 2을 앞에 붙인 여덟 자리 자연수 21122111의 순위를 다음과 같이 계산한다.

숫자 2가 세 번 나오는 여덟 자리 자연수들의 집합을 A, 그중 숫자 2로 시작하는 원소들의 집합을 A_2라 하면, $21122111 \in A_2 \subset A$이다. B의 원소의 앞에 숫자 2를 붙이면 A_2의 원소가 되고, 거꾸로 A_2의 원소의 앞의 숫자 2를 떼면 B의 원소가 되므로, 이 대응은 A_2과 B사이의 일대일 대응이고, 순서를 보존한다. 제시문 (나)의 (a)와 (b)에 의해 A_2의 원소들은 순위가 A_1의 원소의 개수 + 1 $= {}_7\mathrm{C}_3 + 1 = 35 + 1$부터 시작하므로, A_2의 원소의 순위는 이 대응에 의한 B의 원소의 순위에 ${}_7\mathrm{C}_3$를 더한 값이다. 즉,

$$r(21122111) = {}_7\mathrm{C}_3 + r(1122111) = 35 + 10 = 45$$

이다.

(5) 위 (3)과 같은 식으로 논증하면, 숫자 1과 2로 이루어진 자연수 x와 y에 대하여,

(i) x가 y의 앞에 숫자 1을 붙인 수인 경우,

$$r(x) = r(y)$$

이다.

또한, 위 (4)과 같은 식으로 논증하여,

(ii) x가 y의 앞에 숫자 2를 붙인 수인 경우,
y의 자리수 m과 y에 숫자 2가 나오는 횟수 k에 대하여,

$$r(x) = {}_m\mathrm{C}_{k+1} + r(y)$$

이다.

이 두 가지를 반복적으로 적용하면,

$$\begin{aligned} r(1221121112) &= r(221121112) \\ &= {}_8C_4 + r(21121112) \\ &= \ldots \\ &= {}_8C_4 + {}_7C_3 + {}_4C_2 + r(1112) \\ &= 70 + 35 + 6 + 1 = 112 \end{aligned}$$

이다.

(별해) 위의 (i)과 (ii)를 반대 방향으로 적용하여, 예를 들어

$$1 = r(2) = r(12) = r(112) = r(1112)$$
$$1 + 6 = r(1112) + {}_4C_2 = r(21112)$$
$$7 = r(21112) = r(121112) = r(1121112)$$
$$7 + 35 = r(1121112) + {}_7C_3 = r(21121112)$$
$$42 + 70 = r(21121112) + {}_8C_4 = r(221121112)$$
$$r(1221121112) = r(221121112) = 112$$

와 같은 식으로 구할 수도 있다.