



## 2022학년도 논술고사 (자연계열)

## 1. 출제문제

**문제 1** 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} - x \right\} = -1 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

다음 물음에 답하시오. [총25점]

(1)  $f(x)$ 를  $x$ 에 대한 식으로 나타내시오. [7점]

(2) 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리고, 그래프 위에 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표와 변곡점의 좌표를 표시하시오. 또한, 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점을  $P(a, f(a))$ 라 할 때  $f(a-x) = 2f(a) - f(a+x)$ 가 성립함을 설명하시오. [8점]

(3)  $g(x) = \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{1}{3} - x\right) + f\left(\frac{1}{3} + x\right) \right\}$ 라 하고, 모든 실수  $k$ 에 대해 함수  $p(k)$ 를 집합

$$\{x \mid |f(x) - g(x)| = k, x \text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수라고 정의하자. 함수  $p(k)$ 를 구하고, 이 함수가 불연속이 되게 하는  $k$ 의 값을 모두 찾으시오. [10점]

**문제 2** 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 실수 전체집합에서 미분가능하고 도함수  $f'(x)$ 와  $g'(x)$ 가 실수 전체집합에서 연속이다. 모든 자연수  $n$ 에 대하여 함수  $H(n)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$H(n) = \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx$$

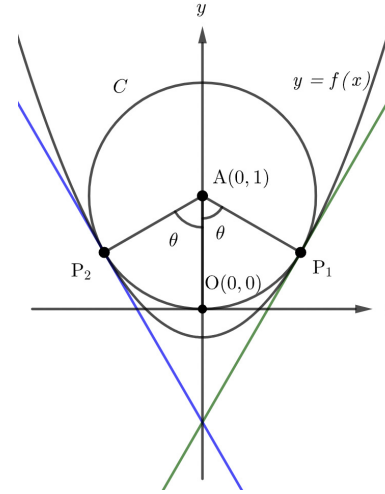
다음 질문에 답하시오. [총 25점]

(1)  $f(0) = 1, f(1) = 2, g(1) = 5, g(2) = -1$ 일 때,  $H(1)$ 의 값을 구하시오. [5점]

(2)  $f(x) = a^x$ 이고  $g(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$ 일 때,  $H(n)$ 을  $n$ 에 대한 식으로 나타내시오. (단,  $a > 0, a \neq 1$ 이다.) [10점]

(3) 위의  $H(n)$ 에 대하여  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \{H(4n-3) + H(4n-1)\}$ 의 합을 구하시오. [10점]

**문제 3** 중심이  $A(0, 1)$ 이고 원점  $O(0, 0)$ 을 지나는 원  $C$  위에  $\angle OAP_1 = \angle OAP_2 = \theta$ 인 두 점  $P_1, P_2$ 가 그림과 같이 놓여 있다. 다음 질문에 답하시오. (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [총 25점]

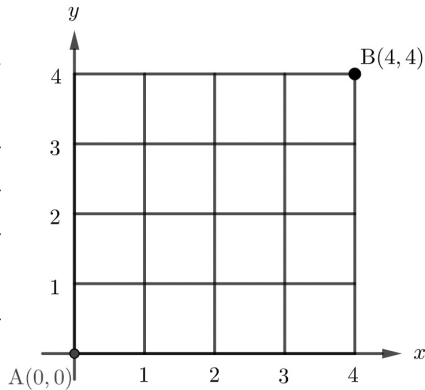


(1) 원  $C$ 와  $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점  $P_1, P_2$ 에서 만나고, 점  $P_1, P_2$ 에서 원  $C$ 의 접선과 곡선  $y = f(x)$ 의 접선이 일치한다.  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 점  $P_1$ 에서 원  $C$ 의 접선의 방정식과 함수  $f(x)$ 를 구하시오. [8점]

(2)  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 원  $C$ 와 곡선  $y = f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. [10점]

(3) 원  $C$ 와  $y$ 축 위의 한 점에서 만나고, 원  $C$  위의 점  $P_1$ 과  $P_2$ 에서의 두 접선에 모두 접하는 원 중 작은 원의 반지름을  $r_1$ , 큰 원의 반지름을  $r_2$ 라 하자.  $\frac{r_2}{r_1} = 4$ 일 때,  $\cos\theta$ 의 값을 구하시오. [7점]

**문제 4** 다음 그림과 같이  $A(0, 0), B(4, 4)$ 를 연결하는 도로망이 주어졌다. 성신이는 지점  $A$ 에서 출발하여 지점  $B$ 로 도로망을 따라 최단 경로로 이동하고, 수정이는 지점  $B$ 에서 출발하여 지점  $A$ 로 도로망을 따라 최단 경로로 이동한다. 도로망에서 두 지점 사이의 거리는 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 길이로 정의한다. 예를 들면 두 지점  $(1, 2)$ 와  $(3, 3)$  사이의 거리는  $|3 - 1| + |3 - 2| = 3$ 이다. 다음 질문에 답하시오. (단, 두 사람은 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동하고, 갈림길에서 가능한 다음 경로는 모두 같은 확률로 선택된다.) [총 25점]



(1) 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 이동한 후 멈추었을 때, 서로 만날 확률을 구하시오. [7점]

(2) 성신이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점을  $P$ 라 하고, 수정이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점을  $Q$ 라 하자. 성신이(지점  $P$ )와 수정이(지점  $Q$ ) 사이의 거리를 확률변수  $X$ 라 할 때,  $X$ 의 확률분포표를 구하시오. [10점]

(3) 위에서 구한 확률변수  $X$ 의 확률분포표로부터  $X$ 의 기댓값(평균)과 표준편차를 구하시오. [8점]