서 원 고 등 학 교

2019학년도 2학기 지필평가 2차 문제지				
과목명	학년	과정	시행 일시	과목코드
수학II	2	통합	2019. 12. 13. (1교시)	02

※ 먼저 답안지에 인적사항(반,번호,성명)과 과목코드를 정확히 기입하시오.
※ 선택형 답을 OMR 카드에 정확하게 표기하시오.
※ 논술형 답은 문항별로 OMR 카드의 논술형 답란에 검정색 볼펜으로 작성하시오.
※ 문항별 배점은 각 문항 끝에 표시되어 있습니다.
※ **선택형 15문항, 논술형 4문항, 총 6면**으로 구성되어 있으니 반드시 확인하시오.

1. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 이 $x=1$ 에서 극댓값 6 을 가질 때, $x=k$ 에서 극소이다. $a+b-k$ 의 값은? (단, a, b 는 상수) [3.6점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{13}{3}$

$1+a+b+1=6$
$3x^2+2ax+b$
$a+b=4$
$2a+b=-3$
$a=-7$
$b=11$
$3x^2-14x+11$

2. 모든 실수 x 에 대하여

$\int(3x^2-2x+a)dx = bx^3+cx^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

가 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은? [3.6점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

$x^3-x^2+ax = bx^3+cx^2+5x+C$

$b=1$ $c=-1$ $a=5$

3. 다항함수 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값이 8 일 때, $f(1)$ 의 값은? [3.6점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

$f(x) = x^2-4x+12$
$(x-2)^2-4+C$
$-4+C=8$
$C=12$
$1-4+12$
$13-4=9$

4. 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은? [3.8점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^2 f(x)dx = -\int_2^0 f(x)dx$

ㄴ. $\int_0^3 f(x)dx = 3\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

ㄹ. $f(-x)=f(x)$ 이면 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ 이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

5. 곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3.8점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3

④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$x(x-2)$

$-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+4$

$\frac{1}{6}\cdot 8+\int_2^3 (x^2-2x)dx$

$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$-(\frac{8}{3}-4)$

6. 사차함수 $f(x)=-x^4+8x^3-10x^2-6$ 이 구간 $[a, b]$에서 증가할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 양의 실수) [4.0점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

$-4x^3+24x^2-20x$

$-4x(x^2-6x+5)$

$x=5$, $x=1$

7. 삼차방정식 $x^3-6x^2-15x+a=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4.0점]

① 84 ② 88 ③ 92

④ 96 ⑤ 100

$a=-x^3+6x^2+15x$

$-3x^2+12x+15$

$-3(x^2-4x-5)$

$-3(x-5)(x+1)$

$-125+150+75$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=|x|+|x-1|$이고 $f(0)=0$일 때, $\int_{-1}^{2} f(x)dx$의 값은? [4.4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 4

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+1 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}$$

$-x^2+x$ $(x<0)$

x $(0<x<1)$

x^2-x+1 $(x>1)$

$\int_1^2 (x^2-x+1)dx+\int_0^1 x\,dx+\int_{-1}^0 (-x^2+x)dx$

9. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 속도가 $v(t)=t^2-2t+p$이다. 다시 원점으로 돌아온 시각이 $t=1$일 때, 상수 p의 값은? (단, $0<p<1$) [4.4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\frac{1}{3}t^3-t^2+pt$

$t(\frac{1}{3}t^2-t+p)$

$\frac{1}{3}-1+p=0$

$p=1-\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{3}$

10. 다음을 만족시키는 두 함수
$f(x)=x^4+2x^2$, $g(x)=-2x^2+12x-a$에 대하여 실수 a의 최솟값은? [4.6점]

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \ge g(x_2)$이다.

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

$4x^3+4x$

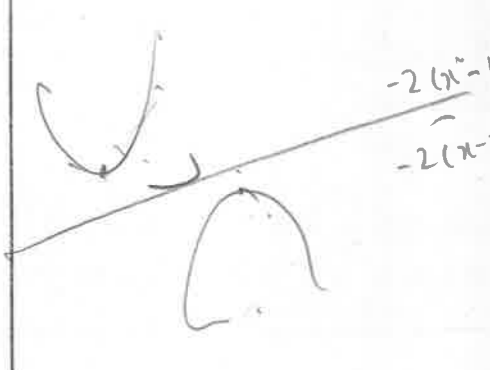
$4x(x^2+1)$

$0 \ge$

$6 \ 2 \ 1 \ 8$

$-2(x^2-6x)-a$

$-2(x-3)^2+18-a$



11. 이차함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$에 대하여
$g(x)=\int_0^x \{t^2-f(t)\}dt$, $f(x)g(x)=-x^4-2x^3$을 만족시킬 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4.6점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$ax+b$

t^2-at-b

$g'(x)=x^2-f(x)$

$=x^2-ax+b$

$g(x)=[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2-bt]_0^x$

$b=0$

$-\frac{9}{2}$

$\frac{1}{3}a=-1$

$a=-3$

$-2+\frac{5}{2}$

t^2-at-b

$g(x)=\int_0^x (t^2-at-b)dt$

$=[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2+bt]_0^x$

$b=0$

$\frac{1}{3}ax^4=-x^4$

$a=-3$

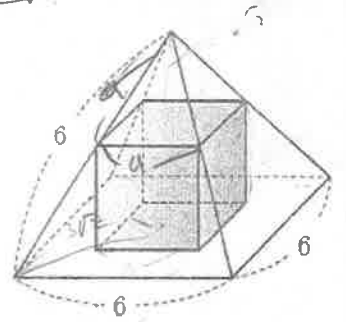
$f(x)=-3x$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$

$c=0$

$a-a^2=-3$

12. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6 인 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값은? [4.8점]



① $8\sqrt{2}$　　② $10\sqrt{2}$　　③ $12\sqrt{2}$

④ $14\sqrt{2}$　　⑤ $16\sqrt{2}$

$6 : 3\sqrt{2} = a : x$

$3\sqrt{2}a = 6x$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$36-18$

$16(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})$

$h = 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}a^2$

$a^2(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}a^2)$

$a^2(3\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2})$

$3\sqrt{2}a^2 - \frac{1}{2}a^4$

$3\sqrt{2}a^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$

$6\sqrt{2} - 2a^3$　　$a=4$

13. 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x)=9x^2+\int_0^1(3x-2)f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(-2)$의 값은? [4.8점]

① 20　　② 21　　③ 22

④ 23　　⑤ 24

$9x^2 + 3x\int_0^1 f(t)dt - 2\int_0^1 f(t)dt$

$9x^2 + 3ax - 2a$

$9x^2+6x-4$

$36-12-4$

$a = \int_0^1 9x^2+3ax-2a$

$[3x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - 2ax]_0^1$

$3+\frac{3}{2}a-2a = a$

$\frac{3}{2}a = 3$

$a=2$

14. 삼차함수 $f(x)=3x^3-9x-3$ 이 있다. 실수 $t\ (t\geq-1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. 정적분 $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값은?(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [5.0점]

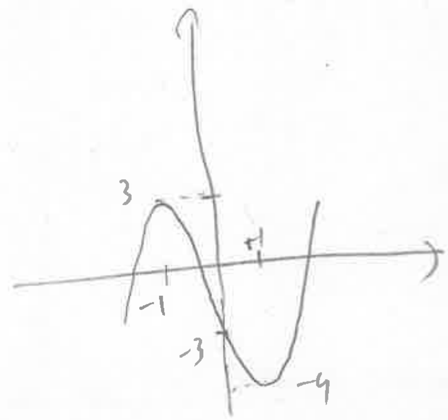
① 35　　② 37　　③ 39

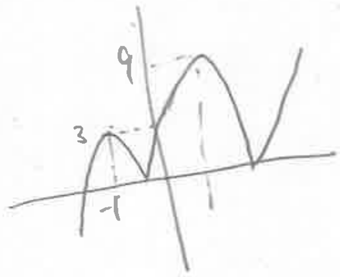
④ 41　　⑤ 43

$9x^2-9$

$9(x+1)(x-1)$

$-3+9-3$





$\int_0^1 (-3x^3+9x+3)dx$

$[-\frac{3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2+3x]_0^1$

$-\frac{3}{4}+\frac{9}{2}+3$

$\frac{-3+18+12}{4}$

$\frac{27}{4}+\frac{12}{4}$

$\frac{39}{4}$

서 원 고 등 학 교

15. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 좌표가 10인 점에서 출발하여 시각 t에서 속도가 $v(t)=t^2-6t+6$이고, 점 Q는 좌표가 k인 점에서 출발하여 시각 t에서 속도가 1이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한다고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, k는 실수이다.) [5.0점]

< 보 기 >

ㄱ. 점 Q의 시각 t에서의 위치는 $k+t$이다.
ㄴ. $k=5$일 때, 두 점은 한 번만 만난다.
ㄷ. $k=5$일 때, 시각 $0<t<5$에서 두 점 사이의 거리의 차의 최댓값은 $\frac{22}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[논술형 1] 다항함수 $f(x)$가

$$\int_1^x (x-t)f'(t)dt = 2x^3+ax^2-4x+3$$

을 만족시키고 $f(0)=1$일 때, $a+f(2)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a는 상수) [8.0점]

[논술형 2] 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고, 구간 $(3, \infty)$에서 증가하도록 하는 a의 범위를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a, b는 실수) [9.0점]

[논술형 3] 함수 $f(x)=3x^2-4x$에 대하여 $g(x)=\int_1^x f(t)dt$를 만족시키는 곡선 $y=g(x)$와 이 곡선 위의 점 $(2, g(2))$에서 접하는 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오. [9.0점]

$g(x)=[x^3-2x^2]_1^x$

$=x^3-2x^2+1$

$y=4(x-2)+1$

$=4x-7$

$x^3-2x^2+1=4x-7$

$x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x-1)(x^2-x-1)$

$\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)\,dx$

$(x+2)(x-2)^2$

$=\frac{64}{3}$

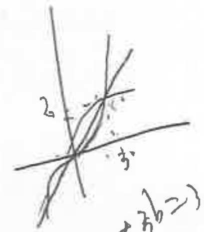
[논술형4] 실수 전체의 집합에서 증가하는 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(3)=g(3)$

정적분 $\int_0^3 g(x)dx$ 의 최댓값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [10.0점]

$f(x)=ax^3+bx$

$3ax^2+b\geq 0$



$b=1-9a$

$f(x)=ax^3+(1-9a)x$