

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

$$\begin{aligned}
 1. \quad 3_{n+3}C_{3k} &= 3_{n+2}C_{3k-1} + 3_{n+2}C_{3k} \\
 &= 3_{n+1}C_{3k-2} + 3_{n+1}C_{3k-1} + 3_{n+1}C_{3k-1} + 3_{n+1}C_{3k} \\
 &= 3_{n+1}C_{3k-2} + 2 \times 3_{n+1}C_{3k-1} + 3_{n+1}C_{3k} \\
 &= 3_n C_{3k-3} + 3_n C_{3k-2} + 2(3_n C_{3k-2} + 3_n C_{3k-1}) + 3_n C_{3k-1} + 3_n C_{3k} \\
 &= 3_n C_{3k-3} + 3 \times 3_n C_{3k-2} + 3 \times 3_n C_{3k-1} + 3_n C_{3k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad a_{n+1} &= 2 + \sum_{k=1}^n 3_{n+3}C_{3k} \\
 &= 2 + \sum_{k=1}^n (3_n C_{3k-3} + 3 \times 3_n C_{3k-2} + 3 \times 3_n C_{3k-1} + 3_n C_{3k}) \\
 &= 2 + \sum_{k=1}^n 3_n C_{3k-3} + 3 \sum_{k=1}^n (3_n C_{3k-2} + 3_n C_{3k-1}) + \sum_{k=1}^n 3_n C_{3k} \\
 &= 3_n C_0 + 3_n C_{3n} + \sum_{k=1}^n 3_n C_{3k-3} + \sum_{k=1}^n 3_n C_{3k} + 3 \sum_{k=1}^n (3_n C_{3k-2} + 3_n C_{3k-1}) \\
 &= 3_n C_{3n} + \sum_{k=0}^{n-1} 3_n C_{3k} + 3_n C_0 + \sum_{k=1}^n 3_n C_{3k} + 3 \sum_{k=1}^n (3_n C_{3k-2} + 3_n C_{3k-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n 3_n C_{3k} + \sum_{k=0}^n 3_n C_{3k} + 3 \sum_{k=1}^n (3_n C_{3k-2} + 3_n C_{3k-1})
 \end{aligned}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n 3_n C_{3k} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 a_n + a_{n+1} &= 3 \sum_{k=0}^n 3_n C_{3k} + 3 \sum_{k=1}^n (3_n C_{3k-2} + 3_n C_{3k-1}) \\
 &= 3 \sum_{k=0}^{3n} 3_n C_k \\
 &= 3 \times 2^{3n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \sum_{n=1}^{49} a_n &= a_1 + \sum_{n=2}^{49} a_n = 2 + \sum_{n=1}^{49} (a_{2n} + a_{2n+1}) \\
 &= 2 + \sum_{n=1}^{49} (3 \times 2^{3 \times 2n}) = 2 + \frac{64^{49} - 1}{64 - 1} \times 3 \times 64 \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{100} a_n &= \sum_{n=0}^{49} (a_{2n+1} + a_{2n+2}) \\
 &= \sum_{n=0}^{49} (3 \times 2^{3(2n+1)}) = \frac{64^{50} - 1}{64 - 1} \times 24 \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

(2)에서 (1)을 빼면

$$a_{100} = \frac{64^{50} + 2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{한편} \quad \sum_{k=1}^{100} 3_{300}C_{3k-1} &= \sum_{k=1}^{100} 3_{3(101-k)-1} = \sum_{k=1}^{100} 3_{302-3k} \\
 &= \sum_{k=1}^{100} 3_{300-(302-3k)} = \sum_{k=1}^{100} 3_{3k-2} \quad \text{이고,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{300} &= \sum_{k=0}^{300} 3_{300}C_k \\
 &= \sum_{k=0}^{100} 3_{300}C_{3k} + \sum_{k=1}^{100} 3_{300}C_{3k-1} + \sum_{k=1}^{100} 3_{300}C_{3k-2} \\
 &= a_{100} + \sum_{k=1}^{100} 3_{300}C_{3k-1} + \sum_{k=1}^{100} 3_{300}C_{3k-2}
 \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{100} 3_{300}C_{3k-1} &= \frac{2^{300} - a_{100}}{2} \\
 &= \frac{2^{300} - \frac{64^{50} + 2}{3}}{2} \\
 &= \frac{2^{300} - \frac{2^{300}}{3} - \frac{2}{3}}{2} \\
 &= \frac{\frac{2}{3} \times 2^{300} - \frac{2}{3}}{2} \\
 &= \frac{2^{300} - 1}{3}
 \end{aligned}$$

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(1-1)

정수 n 과 k 가 $1 \leq k \leq n$ 일때

$\langle n \rangle$ 에서 ${}_{n-1}C_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$ 이므로 이를 대입하면

$$3n+3 C_{3k} = 3n+2 C_{3k} + 3n+2 C_{3k-1}$$

$$= 3n+1 C_{3k} + 3n+1 C_{3k-1} + 3n+1 C_{3k-1} + 3n+1 C_{3k-2}$$

$$= 3n C_{3k} + 3n C_{3k-1} + 2 \cdot 3n C_{3k-1} + 2 \cdot 3n C_{3k-2} + 3n C_{3k-2} + 3n C_{3k-3}$$

$$= 3n C_{3k} + 3 \times 3n C_{3k-1} + 3 \times 3n C_{3k-2} + 3n C_{3k-3} \text{ 이 성립한다.}$$

(1-2)

(1-1)의 결과를 이용해 a_{n+1} 을 정리하면

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^n 3n+3 C_{3k} = 2 + \sum_{k=1}^n \{ 3n C_{3k} + 3n C_{3k-3} + 3(3n C_{3k-1} + 3n C_{3k-2}) \}$$

이때 $\sum_{k=1}^n 3n C_{3k-3} = \sum_{k=1}^n 3n C_{3k} \quad (3n C_0 = 3n C_{3n} = 1)$ 이므로

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^n \{ 2 \cdot 3n C_{3k} + 3(3n C_{3k-1} + 3n C_{3k-2}) \} \text{ 이다.}$$

$$a_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^n 3n C_{3k} + 3 \sum_{k=1}^n (3n C_{3k-1} + 3n C_{3k-2}) + 2 \sum_{k=1}^n 3n C_{3k} + 2$$

$$= 3 \left\{ \sum_{k=0}^n 3n C_{3k} + \sum_{k=1}^n (3n C_{3k-1} + 3n C_{3k-2}) \right\}$$

$$= 3 \{ 3n C_0 + 3n C_1 + 3n C_2 + \dots + 3n C_{3n} \} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{3n} 3n C_k \text{ 이므로}$$

이항정리에 의해 $a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{3n}$ 이 자연수 n 에 대해 성립한다.

(1-3)

$$X = \sum_{k=1}^{100} 300 C_{3k-1} \text{ 에서 } 300 C_{3k-1} = 300 C_{301-3k} \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^{100} 300 C_{301-3k} = 300 C_1 + 300 C_4 + \dots + 300 C_{298} = \sum_{k=1}^{100} 300 C_{3k-2} \text{ 이므로}$$

$$2X = \sum_{k=1}^{100} (300 C_{3k-2} + 300 C_{3k-1}) \text{ 이다.}$$

$$a_{100} = \sum_{k=0}^{100} 300 C_{3k} \text{ 이므로 } a_{100} + 2X = \sum_{k=0}^{300} 300 C_k \text{ 은 정리할 수 있고,}$$

이는 이항정리에 의해 $a_{100} + 2X = 2^{300}$ 이다.

(1-2) 에서 자연수 n 에 대해 $a_n + a_{n+1} = 3 \cdot 2^{3n}$ 이므로

$$+ (a_{100} + a_{99}) = 3 \cdot 8^{99}$$

$$- (a_{99} + a_{98}) = -3 \cdot 8^{98}$$

⋮

$$+ (a_2 + a_1) = 3 \cdot 8^1$$

$$a_{100} + a_1 = 3 \cdot (8^{99} - 8^{98} + \dots + 8^1) = 3 \cdot \sum_{k=1}^{99} (-8)^k \cdot (-1)$$

$$= 3 \cdot 8 \cdot \frac{1 - (-8)^{99}}{1 - (-8)} = \frac{2}{3} (1 + 2^{297})$$

이를 알 수 있다. $a_1 = \sum_{k=0}^1 3 C_{3k} = 3 C_0 + 3 C_3 = 2$ 이므로

$$a_{100} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2^{300} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2^{300}$$

$$2X = 2^{300} - a_{100} = \frac{2}{3} \cdot 2^{300} - \frac{2}{3}, \quad X = \frac{1}{3} (2^{300} - 1) \text{ 이 구해진 것이다.}$$

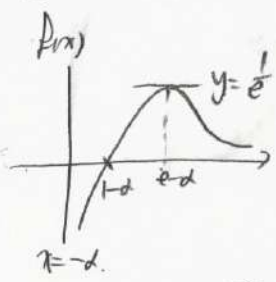
문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f(x)$ 는 $y = \frac{\ln x}{x}$ 를 x 축으로 -2 만큼 평행이동시킨 그래프이다

$\therefore \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 이고

x	0	1	e	...
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	↗	↘	↘	

$\frac{d}{dx} \frac{\ln x}{x} = 0$ 이므로
그래프로 그려보면

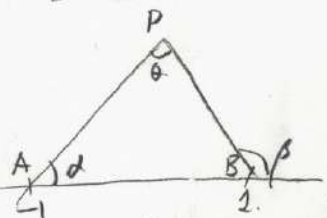


\therefore 방정식 $f(P(x)) = \frac{1}{e}$ 에 대하여
원래 함수 구간에서
 $P(x) = t$ 로 치환해도 구의 개수는
변하지 않는다.

$P(t) = \frac{1}{e} \quad t = e - d$
 $\rightarrow P(x) = e - d$ 의 x 개의 개수가
그래프 이동 후는 d 방정식

$0 < e - d < \frac{1}{e} \Rightarrow e - \frac{1}{e} < d < e$ 이다

2. 주어진 조건에 따라 만들 수 있는 $\triangle APB$ 를 그려보면 다양하다.



$\angle PA'B = d$ 라 하자
 $\angle PBA = \pi - \beta \Rightarrow \tan \alpha = \frac{f'(1)}{f(1)}$
따라서 $\theta = \beta - d$ 이다

$\therefore \cot(\angle APB) = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{1 + f'(1)f'(1)}{f'(1) - f'(1)}$

한편 점 P의 좌표는 점 A에서 2π 만큼 점 B까지 2π
만큼의 고정거리로 $f'(1)(x+1) = f'(1)(x-1)$

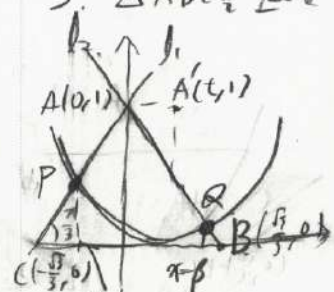
점 P의 x좌표 = $\frac{f'(1) - f'(1)}{f'(1) - f'(1)}$

점 P의 y좌표 = $\left(\frac{-f'(1) - f'(1)}{f'(1) - f'(1)} + 1\right) f'(1) = \frac{-2f'(1)f'(1)}{2f}$

$\therefore \triangle APB$ 의 넓이 = $S = \frac{1}{2} \times 2 \times (\text{점 P의 y좌표})$
 $= \frac{-2f'(1)f'(1)}{2f}$

$\therefore \cot(\angle APB) = \frac{1}{-2f} \left(1 - \frac{2f}{f}\right) = \frac{f}{2} - \frac{1}{2f}$

3. $\triangle ABC$ 를 그려보면 나타내 보라.
원래의 제시된 원의 방정식은
 $\Rightarrow (x-t)^2 + (y+1)^2 = 1$ 이고



$l_1: y = \sqrt{3}x + 1$
 $l_2: y = -\sqrt{3}x + 1$

\therefore 원의 방정식과 l_1, l_2 가 만나는 점은 각각

x_1, β 라 하자
따라서 $(x-t)^2 + (\pm\sqrt{3}x)^2 = 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 2tx + t^2 = 0$ 에서 근의 관계에 의해
 $\alpha + \beta = \frac{t}{2} \quad \beta - \alpha = \frac{\sqrt{4-t^2}}{2} \quad \alpha\beta = \frac{t^2-1}{4}$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{3}\alpha\beta)^2 + (t+1)^2} = 1$

$\therefore \angle PA'Q$ 는 $0 < t < 1$ 에서 $\frac{\pi}{2}$ 이다.
 $\therefore \overline{PQ}$ 과 \overline{PQ} 를 둘러싼 부분이 넓이는 $0 < t < 1$ 에서
 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다. 그러 $\triangle APQ$ 의 넓이는

$\overline{AP} = -2d \quad \overline{AQ} = 2\beta \quad \angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ 이므로
 $\frac{1}{2} \times (-4d\beta) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}d\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)$

$\therefore D(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로
 $= -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\pi}{6}$

$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$ 이다.

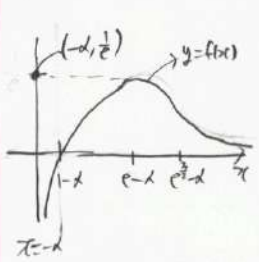
문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 로그함수의 성질에 의해, $f(x)$ 의 정의역은 $x > -\alpha$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x+\alpha)}{(x+\alpha)^2}, f'(e-\alpha) = 0, f''(x) = \frac{2\ln(x+\alpha)-3}{(x+\alpha)^3}, f''(e-\alpha) = 0$$

x	$-\alpha$	\dots	$e-\alpha$	\dots
$f'(x)$			+	0
				-

함수 $f(x)$ 는 $x=e-\alpha$ 에서 극댓값을 가진다.



$\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로
 $f(x)$ 의 그래프는 개형은 왼쪽과 같다.
 $f(e-\alpha) = \frac{1}{e}$ 이므로
 $f(f(x)) = \frac{1}{e}$ 이 서로 다른 두 실수를 가지기 위해서는
 $f(x) = e-\alpha$ 가 서로 다른 두 실수를 가져야 한다.

즉, $e-\alpha$ 의 범위가 $0 < e-\alpha < \frac{1}{e}$ 이어야 한다.
 따라서 α 의 범위는 $e - \frac{1}{e} < \alpha < e$

2. $y=f(x)$ 의 점 A(-1)에서의 접선을 직선 l, 점 B(1)에서의 접선을 직선 m이라고 하자.

$f'(-1) > 0, f'(1) < 0$ 이므로 점 P의 y좌표는 양수이다.

점 P의 y좌표를 β , x좌표를 α 라고 하면 $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \beta = \beta$

점에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 점 H라고 하자.

$$\angle APB = \angle APH + \angle BPH$$

$$\tan(\angle APH) = \frac{AH}{PH} = \frac{\alpha+1}{\beta}, \tan(\angle BPH) = \frac{BH}{PH} = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

$$\tan(\angle APB) = \tan(\angle APH + \angle BPH) = \frac{\tan(\angle APH) + \tan(\angle BPH)}{1 - \tan(\angle APH) \tan(\angle BPH)}$$

$$= \frac{\frac{2}{\beta}}{1 - \frac{1-\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{2\beta}{\beta^2 - 1 + \alpha^2}$$

$$\cot(\angle APB) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2\beta}$$

직선 l의 방정식: $y = f'(-1)x + f(-1)$, 직선 m의 방정식: $y = f'(1)x + f(1)$

$$f'(-1) \cdot \alpha + f(-1) = f'(1) \cdot \alpha - f(1), \alpha = \frac{f'(1) + f(1)}{f'(-1) - f'(1)}, \beta = \frac{2f(1)f(-1)}{f'(-1) - f'(1)}$$

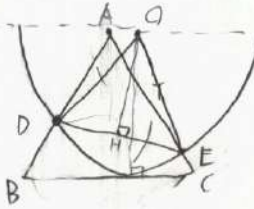
$$\alpha = \frac{f'(-1) + f(1)}{-23}, \beta = \frac{2f(-1)f(1)}{-23}, (-23\alpha)^2 - 2(-23\beta) = \{f'(-1) - f'(1)\}^2 = 23^2$$

$$23^2 \alpha^2 + 46\beta = 23^2, \alpha^2 = -\frac{2}{23} \beta$$

$$\cot(\angle APB) = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 1}{2\beta} = \frac{\beta^2 - \frac{2}{23}\beta - 1}{2\beta} = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{23}$$

$$S = \beta \text{ 이므로, } \cot(\angle APB) = \frac{1}{2} S - \frac{1}{23}$$

3.



평행이동한 원은 원 C라고 하자
 원 C의 중심을 점 C, 원 C와 선분 AB, AC가
 만나는 두 점을 점 D, 점 E라고 하자.
 점 A(0,0), 점 B(-1/e, 1), 점 C(1/e, 1)
 이라고 두면
 원 C의 방정식: $(x-1)^2 + y^2 = 1$

직선 AB의 방정식: $y = \sqrt{3}x$, 직선 PC의 방정식: $y = -\sqrt{3}x$

원 C의 방정식과 직선 AB의 방정식, 직선 PC의 방정식을 연립하면

$$(x-1)^2 + 3x^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ 근의공식에 의해,}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{4}, \text{ 점 D의 x좌표 } \alpha, \text{ 점 E의 x좌표를 } \beta \text{ 라고 하자.}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1-4}}{4}, \beta = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{4}, \text{ 점 D의 좌표 } (\alpha, \sqrt{3}\alpha), \text{ 점 E의 좌표 } (\beta, \sqrt{3}\beta)$$

점 O에서 DE에 내린 수선의 발을 점 H라고 하자.

$$\overline{DE} = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\sqrt{3}\alpha - \sqrt{3}\beta)^2} = \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{1-1}{4} = 0 \text{ 이므로 } \overline{DE} = 1$$

$$\text{부채꼴 ODE의 넓이} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\triangle ODE \text{의 넓이} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{OD}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle ADE \text{의 넓이} = \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2(\beta) \cdot 2(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - t^2)$$

$$f(t) = \text{부채꼴 ODE의 넓이} - \triangle ODE \text{의 넓이} + \triangle ADE \text{의 넓이}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} t^2$$

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} t$$