

1. 문제

※ <문제 1>에서부터 <문제 4>까지 총 4개의 문제가 있고, 각 문제마다 3개의 세부 문항이 있습니다. 답안지의 지정된 양식 안에 각 세부 문항별로 해당 문항 번호를 쓰고 답을 작성하십시오. 수식과 논리를 명확히 전개하고 근거와 과정을 제시하십시오. (시험 시간: 100분, 답안 분량: 지정된 답안 양식 내 작성)

문제 1 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \sin\left(kx + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left((k+1)x + \frac{\pi}{4}\right)$$

다음 물음에 답하십시오. [총 25점]

(1) $n = 1$ 일 때, $f(0)$ 과 $f'(0)$ 의 값을 구하십시오. [5점]

(2) $f(0)$ 과 $f'(0)$ 을 n 에 대한 식으로 나타내시오. [12점]

(3) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 의 값을 구하십시오. [8점]

문제 2 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2$ 가 성립한다. 다음 물음에 답하십시오.

(단, a, b 는 실수) [총 25점]

(1) a 와 b 의 값을 구하십시오. [5점]

(2) 실수 c 에 대해서 곡선 $y = x^3 + x^2 - 7x + c$ 와 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 어떤 한 점에서 두 곡선이 공통접선을 갖도록 하는 c 의 값을 모두 구하십시오. [10점]

(3) 위 (2)에서 구한 c 의 최솟값에 대하여 곡선 $y = x^3 + x^2 - 7x + c$ 와 곡선 $y = f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하십시오. [10점]

문제 3 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2\ln(t^2 + 1), \quad y = t^2 + \frac{1}{t^2 + 1} \quad (t \geq 0)$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

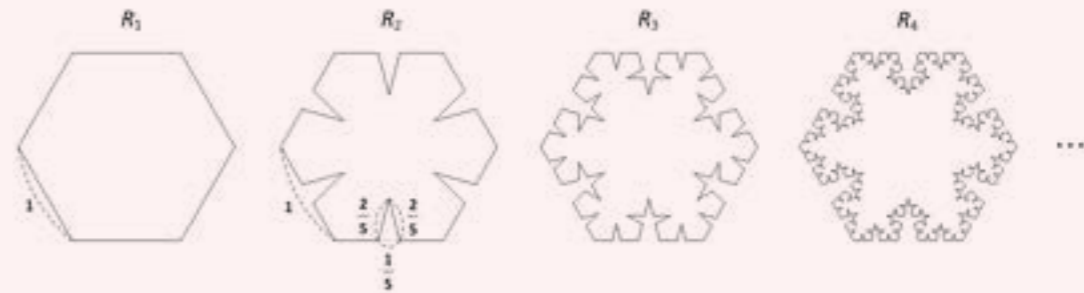
(1) $t = 1$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오. [10점]

(2) $\{f(t)\}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ 이라 하자. $f(t) \geq 0$ 인 $f(t)$ 의 식을 구하시오. [5점]

(3) $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [10점]

문제 4 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 R_1 에서 각 변을 5등분했을 때의 가운데 부분의 선분과

각 변의 길이의 $\frac{2}{5}$ 인 길이의 선분 2개로 이루어진 이등변삼각형을 정육각형의 내부에 그리고, 정육각형의 모든 변에서 그 변을 5등분했을 때의 가운데 부분의 선분을 지워서 얻은 도형을 R_2 라 하자. 다시 도형 R_2 에서 각 변을 5등분했을 때의 가운데 부분의 선분과 각 변의 길이의 $\frac{2}{5}$ 인 길이의 선분 2개로 이루어진 이등변삼각형을 도형 R_2 의 내부에 그리고, 도형 R_2 의 모든 변에서 그 변을 5등분했을 때의 가운데 부분의 선분을 지워서 얻은 도형을 R_3 라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n 번째 도형 R_n 을 만든다.



(1) 도형 R_n 으로부터 도형 R_{n+1} 을 얻는 과정에서 새로 그려지는 이등변삼각형의 개수를 N_n 이라 할 때, N_n 을 n 에 관한 식으로 나타내시오. [5점]

(2) 도형 R_n 으로부터 도형 R_{n+1} 을 얻는 과정에서 새로 그려지는 모든 이등변삼각형의 넓이의 합을 x_n 이라 할 때, $\{x_n\}$ 은 등비수열이다. 이 수열에 대하여 x_1 과 공비를 구하시오. [10점]

(3) 도형 R_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구하시오. [15점]