

2019학년도 논술고사

자연계열(오전)



| | |
|------|--|
| 성 명 | |
| 전 형 | |
| 수험번호 | |

표지를 제외한 페이지 수 : 4



[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 자연수 N 에 대하여 1부터 2^N 까지 번호를 갖는 2^N 개의 흰색 공이 있다. 아래 규칙에 따라 N 단계까지 공을 색칠하자.

- 1단계: 번호가 홀수인 공을 모두 빨간색으로 칠한다.
- 2단계: 번호가 2^2 로 나누어 나머지가 2인 공을 모두 노란색으로 칠한다.
- k 단계 ($3 \leq k \leq N$): k 가 홀수이면 번호가 2^k 로 나누어 나머지가 2^{k-1} 인 공을 모두 빨간색으로 칠하고, k 가 짝수이면 번호가 2^k 로 나누어 나머지가 2^{k-1} 인 공을 모두 노란색으로 칠한다.

| 공번호 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | ... |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1단계 | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | ○ | ... |
| 2단계 | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | ... |
| 3단계 | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓡ | ... |
| 4단계 | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | ○ | Ⓡ | Ⓨ | Ⓡ | Ⓡ | ... |

[그림 1-1] $N \geq 5$ 일 때 4단계까지의 작업 (○은 흰색 공, Ⓡ는 빨간색 공, Ⓨ는 노란색 공)

(나) 자연수 N 에 대하여 1부터 3^N 까지 번호를 갖는 3^N 개의 흰색 공이 있다. 아래 규칙에 따라 N 단계까지 공을 색칠하자.

- 1단계: 번호가 3으로 나누어 나머지가 1인 공을 모두 노란색으로 칠한다.
- 2단계: 번호가 3^2 로 나누어 나머지가 2 또는 3인 공을 모두 노란색으로 칠한다.
- k 단계 ($3 \leq k \leq N$): k 가 홀수이면 번호가 3^k 로 나누어 나머지가 3^{k-1} 인 공을 모두 노란색으로 칠하고, k 가 짝수이면 번호가 3^k 로 나누어 나머지가 $3^{k-1} - 1$ 또는 3^{k-1} 인 공을 모두 노란색으로 칠한다.

| 공번호 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | ... |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1단계 | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ... |
| 2단계 | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | Ⓨ | ... |
| 3단계 | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | ○ | ○ | Ⓨ | Ⓨ | ... |

[그림 1-2] $N \geq 3$ 일 때 3단계까지의 작업 (○은 흰색 공, Ⓨ는 노란색 공)



[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)와 같이 N 단계까지 공을 색칠했을 때 다음 문제에 답하라.

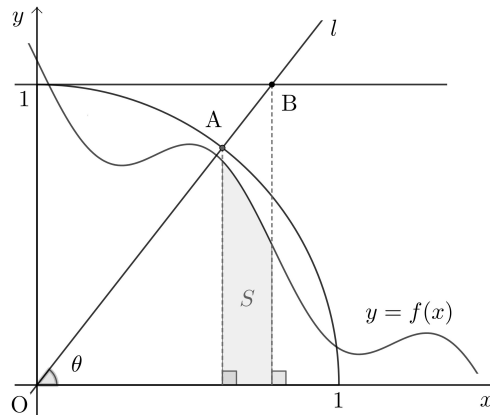
- (1) $N \geq 10$ 일 때 번호가 800인 공은 몇 번째 단계에서 색칠이 되는지 구하라. 또한 빨간색인지 노란색인지 답하라.
- (2) 전체 공들 중에서 색칠되지 않고 남아있는 흰색 공의 개수를 구하라.
- (3) $N=20$ 일 때 빨간색 공의 개수와 $N=21$ 일 때 빨간색 공의 개수를 각각 구하라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)와 같이 N 단계까지 공을 색칠했을 때 다음 문제에 답하라.

- (1) 전체 공들 중에서 노란색 공의 개수를 Y 라 할 때, Y 를 N 에 관한 식으로 나타내라.
- (2) (1)의 결과를 이용하여, 극한 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Y}{3^N}$ 가 존재하면 그 값을 구하라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) [그림 2-1]과 같이 원점을 중심으로 하는 반지름의 길이가 1인 원과 원점을 지나고 x 축과 이루는 각의 크기가 θ 라디안인 직선 l 을 생각하자. (단, $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$) 직선 l 이 제1사분면에서 원과 만나는 점을 A , 점 $(0,1)$ 을 지나고 x 축과 평행한 직선과 만나는 점을 B 라 하자. 함수 $f(x)$ 가 $0 < x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 인 연속함수이다. 점 A 를 지나고 y 축에 평행인 직선, 점 B 를 지나고 y 축에 평행인 직선, x 축, 그리고 곡선 $y = f(x)$ 로 둘러싸인 도형을 S 라 하자.



[그림 2-1]

(나) 제시문 (가)에서 점 A 의 x 좌표를 a , 점 B 의 x 좌표를 b 라 하고 도형 S 의 넓이를 T , 밑변의 길이를 $L = b - a$ 라 하자. 만일 $f(x)$ 가 구간 $(0,1)$ 에서 감소하고 $f(x) \geq 0$ 인 연속함수이면

$$f(b) \cdot L \leq T \leq f(a) \cdot L \quad (*)$$

이 성립한다. θ 가 $\frac{\pi}{2}$ 보다 작으면서 $\frac{\pi}{2}$ 에 한없이 가까워지면 a 와 b 는 0보다 크면서 0에 한없이 가까워진다. 따라서 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 가 존재하면 부등식 $(*)$ 에 의해 극한값 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{T}{L}$ 도 존재한다.

(다) 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 정의된 연속함수 $g(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 이를 최대·최소 정리라고 한다.



[문제 2-1] (15점) 제시문 (가)를 참조하여 다음 문제에 답하라.

(1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 일 때, 도형 S 의 넓이가 θ 에 관계없이 일정함을 보여라.

(2) $f(x) = (1-x)e^{-x}$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 도형 S 의 넓이를 구하라.

[문제 2-2] (23점) 제시문 (가)와 (나)를 참조하여 다음 문제에 답하라.

(1) 제시문 (나)의 부등식 (*)가 성립하는 이유를 도형의 넓이를 이용하여 설명하라.

(2) 함수 $f(x) = 2 + x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ 가 열린 구간 $(0,1)$ 에서 감소함을 보여라.

(3) (2)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 극한값 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{T}{L}$ 를 구하라.

[문제 2-3] (12점) 제시문 (가)의 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0,1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $f(0) = 2$ 인 연속함수라

하자. 이 때 도형 S 의 밑변의 길이를 L , 넓이를 T 라 하자. 제시문 (다)를 참조하여 극한값 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{T}{L}$ 를 구

하라.