한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-1번

1.$f(0)=0$ 이다. $s=x-t$ 라 놓으면, $ds/dt=-1$ 이고, $f(x)=\int_x^0 (x-s)se^s(-1)ds=\int_0^x (x-s)se^s ds \ =\int_0^x xse^s ds-\int_0^x s^2e^s ds$.

$f(x)$를 x로 미분을 하면, $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x\int_0^x se^s ds-\int_0^x s^2e^s ds\right] \ = \ \int_0^x se^s ds+x^2e^x-x^2e^x=\int_0^x se^s ds$ 이고 $f'(0)=0$이다.

$f'(x)$를 한번 더 x에 대하여 미분하면, $f''(x)=xe^x$ 이고 $f''(0)=0$이다.
함수의 오목과 볼록을 조사하기 위해서, $x<0$일 때 $f''(x)<0$이고 $x>0$일 때 $f''(x)>0$이다.
따라서, 열린구간 $(-\infty,0)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록하다. 변곡점의 판정으로 $f''(0)=0$ 이고, $x=0$ 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 달라졌기에 점 $(0,f(0))$ 는 주어진 곡선의 변곡점이다.

2. $f(x)=xe^x\int_0^x te^{-t}dt-e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt$. $A=xe^x\int_0^x te^{-t}dt$, $B=e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt$ 라고 하자.

$$\begin{aligned}A&=xe^x\int_0^x te^{-t}dt=xe^x\left[(-1)te^{-t}\right]_0^x-\int_0^x(-1)e^{-t}dt\\&=xe^x\left[-xe^{-x}+\int_0^x e^{-t}dx\right]=xe^x\left[-xe^{-x}-e^{-x}+1\right]\\&=\ -x^2-x+xe^x\end{aligned}$$

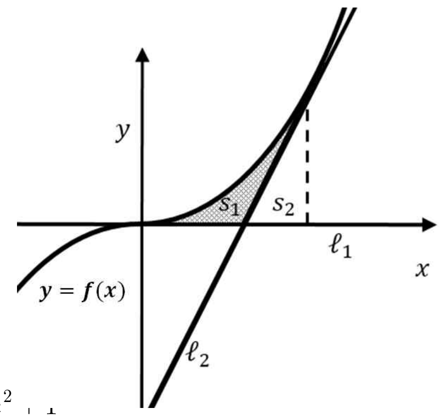
이고,

$$\begin{aligned}B=&\ e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt=e^x\left[(-1)t^2e^{-t}\right]_0^x-\int_0^x(2t)(-1)e^{-t}dt\\&=e^x\left[-x^2e^{-x}+2\int_0^x te^{-t}\,dt\right]=e^x\left[-x^2e^{-x}+2\left\{\left[(-1)te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt\right\}\right]\\&=\ e^x\left[-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x}+1)\right]=-x^2-2x-2+2e^x\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}f(x)&=(-x^2-x+xe^x)-(-x^2-2x-2+2e^x)\\&=\ xe^x-2e^x+x+2\\f'(x)&=xe^x-e^x+1\end{aligned}$$

이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=0$이므로 접선 ℓ_1의 방정식은 $y=0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2+1$이므로 접선 ℓ_2의 방정식은 $y=(e^2+1)x-2(e^2-1)$ 이다.
$f(x)-\{(e^2+1)x-2(e^2-1)\}=xe^x-2e^x+x+2-(e^2+1)x+2(e^2-1)=(x-2)(e^x-e^2)\geq 0$이므로 곡선 $f(x)$는 접선 ℓ_2보다 항상 위에 있다.



영역 S_1+S_2는

$S_1+S_2=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(xe^x-2e^x+x+2)\,dx=\left[xe^x-3e^x+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2=9-e^2$

ℓ_2의 x절편이 $\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}$ 이므로 삼각형 S_2의 넓이는

$\left(2-\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}\right)\times 4\times\dfrac{1}{2}=4-\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}$

따라서 구하고자 하는 영역 S_1의 넓이는

$(S_1+S_2)-S_2=(9-e^2)-\left(4-\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}\right)=5-e^2+\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}=9-e^2-\dfrac{8}{e^2+1}=\dfrac{-e^4+8e^2+1}{e^2+1}$

답: $5-e^2+\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}$ 또는 $\dfrac{-e^4+8e^2+1}{e^2+1}$

3. 양변을 x에 대해 미분하면

$$-e^{-x}\int_0^x g'(t)dt + e^{-x}g'(x) = e^{-x}g'(x) - \sin(2\pi x) - 2\pi x\cos(2\pi x)$$

$g(0)=0$이고,

$$\begin{aligned}&g(x)-g(0) = e^x[\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)]\\&\Rightarrow g(x) = e^x[\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)]\end{aligned}$$

모든 양의 실수 x에 대해 $\sin(2\pi x) \le 1$, $\cos(2\pi x) \le 1$ 이므로 $\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x) \le 1 + 2\pi x$ 이다.

그러므로 $g(x) = e^x\{\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)\} \le e^x(1+2\pi x)$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2023} g(x)dx &\le \int_0^{2023} e^x(1+2\pi x)dx = \int_0^{2023} e^x dx + 2\pi\int_0^{2023} xe^x dx = [e^x]_0^{2023} + 2\pi\left([xe^x]_0^{2023} - \int_0^{2023} e^x dx\right)\\&= e^{2023} - 1 + 2\pi\left(2023e^{2023} - e^{2023} + 1\right) = 4046\pi e^{2023} + (1-2\pi)(e^{2023}-1)\end{aligned}$$

$(1-2\pi)(e^{2023}-1) < 0$이므로 $\int_0^{2023} g(x)dx \le 4046\pi e^{2023} + (1-2\pi)(e^{2023}-1) < 4046\pi e^{2023}$

한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	오후(1)-2번

1. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AP}} = t \ \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right)$라 하면,

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{t^2+1}$, $\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{(1-t)^2+1} = \sqrt{t^2-2t+2}$ 이다.

$\angle \mathrm{BPH} = \alpha$ 라 하면, 삼각형 BPH 에서

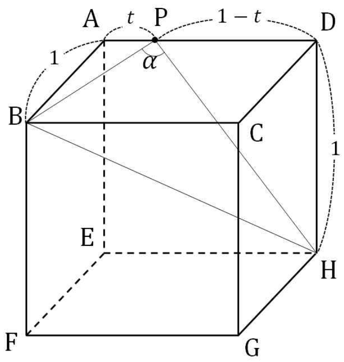
$\overline{\mathrm{BH}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PH}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{PB}} \times \overline{\mathrm{PH}} \times \cos\alpha$ 이고 정리하면

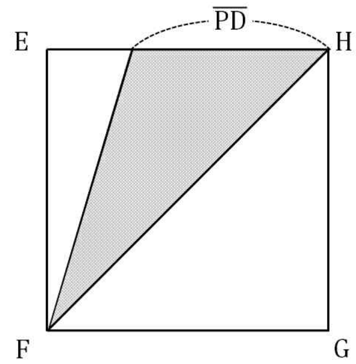
$\cos\alpha = \dfrac{t^2-t}{\sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}}$ 이다. 삼각형 BPH 의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PB}} \times \overline{\mathrm{PH}} \times \sin\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{t^2-t+1}{2}}$

이고, 이로부터 $t = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \ \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right)$ 를 구한다.

따라서 정사영의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 1 \times \overline{\mathrm{PD}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{8}$ 이다.





답 : $\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}$

2. 공을 꺼내어 얻은 세 숫자를 x, y, z라 하자. 그러면 $A_{n+1} - A_n$는 x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이가 되면서 그 중 적어도 하나가 $n+1$인 경우의 수와 같다. 먼저 $x = n+1$이고 $y, z \le n$이라 가정하자. 만약 $y = 1$이면 조건을 만족하는 z를 고를 수 없고, $a > 1$인 각 $y = a$마다 z를 $a-1$개의 숫자 $n-a+2, n-a+3, \cdots, n$ 중에서 고르면 충분하다. 따라서 이 경우 $\sum_{a=2}^{n}(a-1) = \sum_{a=1}^{n-1} a = \frac{n(n-1)}{2}$ 만큼의 가짓수가 있다. 대칭적으로 생각하면 y만 $n+1$이거나 z만 $n+1$인 경우의 수도 이와 같다. 만약 두 숫자 x, y가 모두 $n+1$이고 $z \le n$이라면, z는 1부터 n중 어느 숫자여도 x, y, z가 삼각형의 세 변이 된다. 이와 대칭적인 경우들도 모두 따져 보면 합쳐서 $3n$가지 경우의 수가 된다. 마지막으로 $x = y = z = n+1$의 경우도 세어 주면 관계식

$A_{n+1} - A_n = \dfrac{3n(n-1)}{2} + 3n + 1 = \dfrac{3n(n+1)}{2} + 1$을 얻는다.

답 : $A_{n+1} - A_n = \dfrac{3n(n+1)}{2} + 1$

3. 대칭성에 의해 $\sum_{k=0}^{n/3} {}_nC_k = \sum_{k=0}^{n/3} {}_nC_{n-k} = \sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k$임을 알 수 있다. 모든 $x > 1$에 대해 $\sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k \le \sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k\, x^{k-2n/3}$이 성립하므로 $\sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k \le \sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k\, x^{k-2n/3} \le \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{k-2n/3} = x^{-2n/3}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k = \left(\frac{1+x}{x^{2/3}}\right)^n$을 얻는다. $A = \left(\sum_{k=0}^{n/3} {}_nC_k\right)^{1/n}$ 라 하자. $f(x)$는 아래 그림과 같이 $x = 2$에서 1.9보다 작은 최솟값을 갖고, $x > 1$범위에서 항상 A보다 크기 때문에 $A < f(2) < 1.9$임을 알 수 있다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{n/3} {}_nC_k < 1.9^n$ 임이 증명된다.